Prüfung aus Mathematik 2 für MB

am 25. Juni 2004

Zuname: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = xy(1-x-y)$.
   (a) Bestimme alle Nullstellen von (f_x, f_y).
   (b) Untersuche, ob f an der Stelle $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ einen lokalen Extremwert besitzt.
   (c) Bestimme den maximalen Wert, den die Funktion f am Quadrat $Q = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ annimmt.

2. Gegeben ist die Kurve $\mathcal{C} : \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ 1 \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -yz \\ x^2 \\ xy \end{pmatrix}$.
   (a) Beschreiben Sie in kurzen Worten Form und Lage der Kurve $\mathcal{C}$.
   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}$.
   (c) Ist $\boldsymbol{v}$ konservativ? Begründung!

3. (a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''' - 2y''' - 2y'' = 0?$$

   Geben Sie den Ansatz für eine partikuläre Lösung von

$$y'''' - 2y''' - 2y'' = xe^{3x} + e^x \sin x.$$

   (b) Bestimmen Sie jene Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$2(y-x)y' + (-2y + 2x - 3x^2) = 0,$$

   die die Anfangsbedingung $y(2) = -1$ erfüllt.

4. (a) Löse mittels Laplacetransformation:

$$y'' - y = 3e^{2x} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$$

   (b) Berechnen Sie das Volumen des unterhalb der x-y–Ebene gelegenen Teils des Drehparaboloids: $z = x^2 + y^2 - 16$.

5. (a) Gegeben ist das Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem:

$$y'' + \mu y = 0 \qquad \text{RB: } y'(0) = y'(1) = 0.$$

   i. Lösen Sie das obige Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem.
   ii. Was bedeutet die Aussage: “Eigenfunktionen des Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblems zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.”?
   Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Aussage am Beispiel des obigen Eigenwertproblems und den Eigenfunktionen $y_0(x) = 1$ und $y_1(x) = \cos \pi x$.

   (b) Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} = u_{tt} \qquad \text{RB: } u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$$

   i. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zum Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblem aus (a) führt.
   ii. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung.