Prüfung aus Mathematik 2 f. MB

am 2. März 2007

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int\int_F v dO,$$

wobei F das im 1. Oktanten ($=\{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$) liegende Stück der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=1$ sei und $v = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Das Integral ist direkt, d.h. ohne Integralsatz zu bestimmen.)

   (b) Weisen Sie nach, dass $v = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie das Potential. Geben Sie eine Eigenschaft von Kurvenintegralen über Potentialfeldern an.

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''' - y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$, mittels

   (a) Laplacetransformation.

   (b) Potenzreihenansatz (die ersten 5 Koeffizienten der Potenzreihe (d.h. bis x^4) sind zu berechnen).

3. (a) Pirat Paul entwickelt eine neue Augenklappe für seine Kollegen. Er hat insgesamt 11 Goldmünzen zur Verfügung und weiß, dass er $f(x,y) = 50x^{1/3}y^{3/2}$ einnimmt, wenn er x Goldmünzen in die Entwicklung und y Goldmünzen in die Werbung investiert. Ermitteln Sie, unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatoren, x und y so, dass Paul's Gewinn maximal wird.

   (b) Bestimmen Sie eine Lösung der autonomen Differentialgleichung

$$\ddot{x} = (\dot{x})^3.$$

   Hinweis: Integrationskonstanten nicht vergessen.

4. (a) Geben Sie die Definitionen und physikalischen Deutungen von $\text{rot}(v)$ und $\text{div}(v)$ an.

   (b) Bestätigen Sie die Identität $\text{div}(v \times w) = w \cdot \text{rot}(v) - v \cdot \text{rot}(w)$ für $v = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$.

5. Gegeben sei das Anfangswertproblem, welches eine schwingende Saite modelliert.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= x - x^2, \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

   (a) Skizzieren Sie den Anfangswert $u(x,0)$. Deuten Sie die Rand– bzw. Anfangswerte.

   (b) Finden Sie eine Lösung des Problems durch Separation der Variablen, Diskussion des Sturm–Liouvillschen Randwertproblems und Anpassen der Eigenfunktionen an die Anfangsbedingungen.