Prüfung aus Mathematik 2 f. MB

am 12. Jänner 2007

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Berechnen Sie mit einem Dreifachintegral das Volumen jenes Bereiches im 1. Oktanten (= $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$) im $\mathbb{R}^3$, der unter der Ebene $z = 1 - x - y$ liegt.

   (b) Pirat Paul segelt in der (x, y)–Ebene vom Punkt $P_1 = (0, 0)$ zu $P_2 = (2, 0)$, weiter zu $P_3 = (2, 2)$ und schließlich zurück zu P_1. Skizzieren und parametrisieren Sie Pauls Route C und berechnen Sie $\int_C 0dx + (x^2)dy$ direkt (d.h. ohne Verwendung eines Integralsatzes).

2. (a) Berechnen Sie die Funktion $y = y(x)$, welche die Differentialgleichung $xy''y + x(y')^2 = 3yy'$ erfüllt.
   Anleitung:
   - Setzen Sie $p(x) = y(x)y'(x)$ und bestimmen Sie $p'(x)$.
   - Schreiben Sie obige Differentialgleichung als Differentialgleichung von $p(x)$ an und bestimmen Sie $p(x)$.
   - Bestimmen Sie $y(x)$ aus $p(x)$.

   (b) Sei $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, 2π–periodisch fortgesetzt. Erklären Sie die Begriffe *gerade Funktion* und *ungerade Funktion.* Ist $f(x)$ gerade oder ungerade? Berechnen Sie die Fourrierreihe von $f(x)$.

3. (a) Sei $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$.
   i. Bestimmen Sie die Tangentialebene an $f(x, y)$ im Punkt $P = (1, 1, f(x, y))$.
   ii. Bestimmen Sie alle Extrema (d.h. auch Randextrema) von $f(x, y)$ über dem Rechteck D, das von den Geraden $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ und $y = 2$ begrenzt wird. Geben Sie den absolut höchsten und den absolut niedrigsten Punkt von $f(x, y)$ über D an.

   (b) Bestätigen Sie die Exaktheit der Differentialgleichung $xdy = (1 - y)dx$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = 4u_{xx} + t, \qquad u(x, 0) = x, \qquad u_t(x, 0) = 0.$$

   Anleitung: Diese Differentialgleichung modelliert eine beidseitig unbeschränkte Schwingung und ist mit einer Koordinatentransformation zu lösen, d.h. bestimmen Sie $u(x, t)$, indem Sie $X = x+2t$, $T = x - 2t$ und $U(X, T) = u(x, t) = u(1/2(X + T, 1/4(X - T)))$ setzen. Drücken Sie u_x, u_{xx}, u_t und u_{tt} durch partielle Ableitungen von $U(X, T)$ aus und transformieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung zu einer für $U(X, T)$ (zur Kontrolle: $U_{XT} = F(X, T) = -t/16 = (T-X)/64$). Lösen Sie diese und bestimmen Sie schließlich $u(x, t)$ unter Verwendung der Anfangswerte.

5. Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y - 1 \\ \dot{y} &= -y + 2t - 2 \end{aligned}$$

   mit der Eliminationsmethode, d.h. transformieren Sie obiges Sytem auf eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung und lösen Sie diese mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten.