Prüfung aus Mathematik 2 für MB & VT	Zuname: ....
am 15. 10. 2004	Vorname: ....
Deckblatt bitte nicht herunterreißen!	Kennzahl / Mat.Nr.: ....

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Bestimmen Sie mit der Methode des Lagrangeschen Multiplikators denjenigen Punkt (x_0, y_0, z_0) der Fläche $z = \dfrac{1}{x^2 y}$ im ersten Oktanten $(x > 0, y > 0, z > 0)$, der vom Ursprung $(0,0,0)$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat. <u>Hinweis zur Kontrolle</u>: $x_0 = \sqrt[4]{2}$.

b) Wie sind innere Extrema erklärt und was hat die Differentialrechnung mit ihrer Bestimmung zu tun?

2.) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\displaystyle\int_C x\,dy - y\,dx$ über die im Gegenzeigersinn durchlaufene Kurve C mit Polargleichung $r = r(\varphi) = 2\sin\varphi \ \ (0 \le \varphi \le \pi)$. Skizzieren Sie Kurve.

<u>Hinweis zur Kontrolle</u>: Das Resultat ist 2π. Welche geometrische Bedeutung hat dieses Ergebnis?

3.) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = \dfrac{\sin x(t)}{\cos^3 x(t)}$ mit den Anfangsbedingungen $x(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{x}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$. <u>Hinweis</u>: Schreiben Sie die Randbedingungen für die Funktion $v = v(x)$ um.

4.) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ mit der Eigenwert- Eigenvektor-Methode.

Sie erhalten zunächst (konjugiert) komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Geben Sie auch ein reelles Fundamentalsystem an.

Erklären Sie den Begriff Fundamentalsystem.

5.) Die stationäre Temperaturverteilung $u(r, \varphi)$ in einer kreisförmigen, an Ober- und Unterseite isolierten Platte mit Radius 1 ist beschrieben durch die Differentialgleichung $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$.

Deren Lösung wird durch eine Reihe der Form $u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \cos k\varphi + b_k r^k \sin k\varphi$ dargestellt (braucht nicht hergeleitet zu werden). Passen Sie diese allgemeine Lösung an die Randtemperatur $u(1, \varphi) = f(\varphi) = \varphi \ (-\pi < \varphi < \pi)$ an.

<u>Hinweis zur Kontrolle</u>: Die Koeffizienten der Fourierreihe für $f(\varphi)$ lauten $b_k = 2\,\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.