

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Bestimmen Sie den größten Anstieg der Fläche $f(x, y) = x^y$ im Punkt $(1, 2, z)$, d.h. berechnen Sie den Wert der Richtungsableitung in Richtung des maximalen Anstiegs. (Hinweis: Um $f(x, y)$ zu differenzieren, ist die Auflösung der Potenz mit der Exponential- und der Logarithmusfunktion hilfreich.)
- (b) Der Schatz des Piraten Paul hat ein Volumen von $V = 16$ Einheiten. Paul möchte eine möglichst billige quaderförmige Schatztruhe mit Höhe h und quadratischer Grundfläche mit Seitenlänge x bauen. Angenommen das Material für die Seitenwände kostet eine Goldmünze pro Flächeneinheit und das Material für Deckel und Boden kostet 2 Goldmünzen pro Flächeneinheit.

Helfen Sie Paul beim Sparen und bestimmen Sie x und h mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren so, dass die Kosten für das verwendete Material (unter der Nebenbedingung $V = hx^2 = 16$) minimal werden.

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y' - 2y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

- (a) mit dem Ansatz der unbestimmten Koeffizienten und
 - (b) mittels Laplace Transformation (Anleitung: Partialbruchzerlegung).
3. (a) Skizzieren Sie jenen Bereich, der von den Parabeln $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ begrenzt wird. Berechnen Sie den Inhalt dieses Bereichs mittels Doppelintegral.
 - (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

entlang des geschlossenen (einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen) Kreises mit Radius 1 und Mittelpunkt 0 direkt (d.h. ohne Integralsatz). Könnte aufgrund Ihres Ergebnisses das zugrundeliegende Vektorfeld ein Potentialfeld sein (Die Potentialfunktion ist gegebenenfalls nicht zu berechnen!)? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= -5x - 3y \end{aligned}$$

mit der Eigenwert-Eigenvektormethode. Was bedeutet allgemein die Stabilität einer Lösung? Ist die Lösung dieses Systems stabil (Begründung!)?

5. Berechnen Sie mit dem Integralsatz von Gauß das Oberflächenintegral

$$\int \int_F \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ 4z \end{pmatrix} dO,$$

wobei F die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ist. (Hinweis: Kugelkoordinaten!) Was wird durch dieses Integral berechnet (physikalische Deutung)?