

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-2(x^2+y^2)} dy dx$$

und berechnen Sie das Integral durch Transformation auf Polarkoordinaten (Führen Sie alle Rechnungen aus, welche für die Transformation nötig sind).

- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0.$$

Anleitung: Eine Lösung hat die Gestalt $y_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und damit $y_1(x)$ durch Einsetzen (zur Kontrolle: $y_1(x) = c(1+x^2)$). Berechnen Sie die zweite Lösung mit Hilfe von y_1 durch den Reduktionsansatz von d'Alembert. Verwenden Sie $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}(\frac{x}{(1+x^2)} + \arctan(x))$ (nicht nachzurechnen).

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' - y = e^x$.

- (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

- (b) Sei zusätzlich der Anfangswert $y(0) = 0$ gegeben.

i. Lösen Sie das Anfangswertproblem mittels Laplace Transformation.

ii. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades der Lösung des Anfangswertproblems durch fortgesetzte Ableitungsbildung.

3. (a) Angenommen ein Fußball rollt entlang der Gerade $y = -x/2 + 5$ und der Tormann befinde sich im Ursprung $(0, 0)$. In welchem Punkt ist der Abstand Fußball-Tormann minimal? Geben Sie die zu minimierende Funktion und die zu berücksichtigende Nebenbedingung an, und lösen Sie das Extremalproblem unter Benutzung der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

- (b) i. Formulieren Sie den Satz von Dirichlet über Fourierreihen.

ii. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \pi - x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, 2π -periodisch fortgesetzt. Skizzieren Sie $f(x)$ berechnen Sie deren Fourierreihe.

4. Gegeben sei die Sturm-Liouville-Randwertaufgabe

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

- (a) Bringen Sie die Differentialgleichung auf selbstadjungierte Form.

- (b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung. Unterscheiden Sie die 3 Fälle $\lambda = 1$, $1 - \lambda = \mu^2 > 0$ und $1 - \lambda = -\mu^2 < 0$.

- (c) Passen Sie zu jedem der 3 unter (b) betrachteten Fälle das Fundamentalsystem an die Randwerte an.

5. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$