Prüfung aus Mathematik 2 für MB & VT
am 3. 12. 2004

Zuname: ....
Vorname: ....
Kennzahl / Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten

1.) a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ in einem Punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ in Richtung des Nullpunktes.

b) Gegeben sei eine differenzierbare Rotationsfläche $z = f(x,y) = h(r)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$, die Tangentialebene in einem Flächenpunkt $\boldsymbol{x} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ und die durch $\boldsymbol{x}$ gehende Falllinie in der Tangentialebene. Zeigen Sie, dass die Projektion einer solchen Falllinie auf die x-$y-$Ebene stets durch den Ursprung geht.

2.) a) Gegeben seien die Punkte $(x_1, y_1) = (0,0)$, $(x_2, y_2) = (1,0)$, $(x_3, y_3) = (2,0)$, $(x_4, y_4) = (3,1)$. Bestimmen Sie die Parabel $y = y(x) = a + bx + cx^2$, für die $\sum_{k=1}^{4}(a + bx_k + cx_k^2 - y_k)^2$ minimal wird (Zeichnung!)

b.) Schreiben Sie auf, was Sie über hinreichende Bedingungen für die Existenz von inneren Extremstellen einer Fläche wissen.

3.) a) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $y'' + 4y = 2\tan x$.

b.) Was lässt sich über die Lösungsmenge einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung sagen? Wie bekommt man (im Prinzip) die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung?

4.) Es sei $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Substanz. Berechnen Sie den Durchsatz pro Zeiteinheit durch das Dreieck F im ersten Quadranten mit den drei Eckpunkten $(1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)$, also das Oberflächenintegral $\iint\limits_F \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{O}$.

5.) Bestimmen Sie den Schwingungszustand $z(x,t)$, $0 \leq x \leq 1$, $t \in \mathbb{R}^+$ einer beidseitig eingespannten Saite, die anfangs die Form $z(x,0) = f(x) = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - x|$ hat und losgelassen wird.

Hinweis: Lösen Sie die Schwingungsgleichung $z_{tt} = c^2 z_{xx}$ mit den Randbedingungen $z(0,t) = z(1,t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $z(x,0) = f(x)$, $z_t(x,0) = 0$.