Prüfung Mathematik 1 für BI – 26.1.2011

Name/ Matrikelnummer:..

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend und fassen Sie sich kurz!

1. (a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $3^n \leq 4 \cdot n!$ für $n \geq 4$.
   (b) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$? Wenn ja, gegen welchen Wert?
   (c) Formulieren Sie einen Satz/ ein Kriterium, mit welchem aus (a) und (b) die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot n!}$ folgt.

   4 Punkte (2+1+1)

2. (a) Skizzieren Sie in der Gauß'schen Zahlenebene die Menge M aller komplexen Zahlen z mit $1 < |z| < 4$, deren Argument ϕ im Intervall $(\pi/4, \pi/2)$ liegt.
   (b) Geben Sie ein konkretes z_0 aus M an. Was sind Real– und Imaginärteil Ihres z_0? Geben Sie die zu z_0 konjugiert komplexe Zahl an.
   (c) Geben Sie die Formel von Euler an und erklären Sie was die Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl ist.
   (d) Wie multipliziert man zwei komplexe Zahlen in Polarform? Begründen Sie die Rechenvorschrift anhand der Exponentialdarstellung.

   4 Punkte (1+1+1+1)

3. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Wenn Sie eine Aussage für richtig halten, argumentieren Sie dies mit einer **kurzen** Erklärung. Falsche Aussagen widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel. (Ohne Erklärung, d.h. für Raten, gibt es keine Punkte.)
   (a) Nimmt eine Folge unendlich oft den Wert 17 an, so konvergiert die Folge.
   (b) Sind alle Folgenglieder ab dem 17000 Folgenglied gleich 17, so konvergiert die Folge.
   (c) Sind alle Summanden einer Reihe ab dem 17000 Summanden gleich 17, so konvergiert die Reihe.
   (d) Ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe größer als 1, so liegen zumindest zwei ganze Zahlen im Konvergenzbereich.
   (e) Ist eine Funktion $f(x)$ auf $[0, 1]$ differenzierbar, so nimmt $f(x)$ alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(1)$ zumindest einmal an.
   (f) Ist eine Funktion $f(x)$ auf $[0, 1]$ differenzierbar, so nimmt $f(x)$ alle Werte zwischen 0 und 1 zumindest einmal an.

   3 Punkte (jeweils 0,5)

4. (a) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ mittels Potenzreihen.
   (b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine (allgemeine) Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius und $a_0 \neq 0$. Sei weiters $s(x)$ die Summenfunktion der Potenzreihe.
      i. Berechnen Sie $\lim_{x\to a} \frac{s(x)-a_0-a_1(x-a)}{s(x)}$.
      ii. Erklären Sie mit dem Ergebnis von i. die Schreibweise $s(x) \sim a_0 + a_1(x-a)$ für x nahe bei a.
   (c) Berechnen Sie mittels Taylorformel, d.h. mittels Differentialrechnung, das Taylorpolynom zweiten Grades von $f(x) = \sin(2x^2)$ mit Entwicklungspunkt $a = 0$. Wie lautet die Tangente an $f(x)$ in $a = 0$?

   4 Punkte (1+1,5+1,5)

5. (a) Sei $f(x)$ eine allgemeine stetige Funktion. Geben Sie eine Stammfunktion zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass das tatsächlich eine Stammfunktion ist.
   (b) Berechnen Sie eine Stammfunktion von $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$, indem Sie den Ausdruck unter der Wurzel (oder die Wurzel) substituieren.
   (c) Zeigen Sie, wie aus der Produktregel der Differentialrechnung die Formel für die partielle Integration folgt.
   (d) Zeigen Sie mit partieller Integration für stetig differenzierbares $f(x)$ die Gültigkeit der Gleichung

   $$\int f(x)f'(x)dx = \frac{(f(x))^2}{2} + C.$$

   5 Punkte (1,5+1,5+1+1)

Viel Erfolg!