Prüfung aus Mathematik 1 f. MB u. BI

am 25. Juni 2004

ZUNAME:......................

Vorname:......................

Kennzahl:......................

Mat.Nr.:......................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz bzw. Divergenz.

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \qquad\qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$$

   (b) Benutzen Sie die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ in eine Taylorreihe, um den Wert der siebten Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ zu bestimmen.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) \tan x - y(x) = 2.$$

   (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung (Trennung der Variablen).

   (b) Zeichnen Sie die eindeutigen Lösungen für die Anfangswerte $y(\frac{\pi}{2}) = -2$ und für $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

3. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2}\, dx \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int x \cdot 3^x \, dx$$

4. Begründen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

   (a) Gilt für eine Folge $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, daß die Folge $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ gegen a konvergiert, so konvergiert auch die Folge selber gegen a.

   (b) Wenn a_n und b_n zwei konvergente Folgen sind mit $a_n > b_n$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

5. Es sei

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ 2b \end{pmatrix} : a, b \in I\!R \right\}.$$

   (a) Geben Sie eine Basis für $\mathcal{V}$ an, und berechnen Sie die Dimension von $\mathcal{V}$.

   (b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{w} \in I\!R^3$, der nicht in $\mathcal{V}$ liegt.

   (c) Geben Sie eine 3×3 Matrix A an, für die gilt, daß $A \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}$ für alle $\vec{x} \in I\!R^3$. Wie groß ist der Rang von A höchstens? Gehören alle Eigenvektoren von A zu $\mathcal{V}$?