Prüfung aus Mathematik 1 f. MB u. BI

am 01. März 2005

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Es sei $a_n := \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß $a_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ gilt, und stellen Sie fest, ob die Folge a_n konvergiert.
   Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$.

   (b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:
   $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 2x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{e^{x^2}}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \arctan x}{x^3}.$$

   (c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{n^3\sqrt{n}}$.

   (d) Zeigen Sie, daß gilt $\frac{(x+2)^{3n}}{n^3\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^3}$ für alle $x \in [-3,-1]$ und alle $n \ge 1$. Was folgt daraus für die Konvergenzeigenschaften von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{n^3\sqrt{n}}$?

2. Es seien die Funktionen $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ und $g(x) = x^2 - 4 + \sqrt{8}$ gegeben.

   (a) Konvergieren $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ und $\int_2^{\infty}\frac{1}{g(x)}\,dx$?

   (b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int e^x g(x)\,dx$ mithilfe von partieller Integration.

   (c) Zwei Marienkäfer krabbeln mit gleicher konstanter Geschwindigkeit in der Ebene zum Punkt $(2,\sqrt{8})$. Der eine bewegt sich entlang der Kurve $y = f(x)$, der andere entlang der Kurve $y = g(x)$. Welcher kommt als erster an, wenn sie gleichzeitig bei $x = 0$ starten?
   Hinweis: Kurvenlänge! Es gilt $\frac{8}{27} \approx \frac{1}{3}, (5.5)^{\frac{3}{2}} \approx 13, \sqrt{17} \approx 4, \operatorname{arsinh} 4 \approx 2$.

   (d) Treffen sich beide wieder, wenn sie bis in alle Ewigkeit weiterlaufen?

3. Begründen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. Hierzu seien $f(x)$ und $g(x)$ beliebige relle Funktionen und a und b reelle Zahlen.

   (1) Ist $f(x)$ stetig, so ist $f(x)$ differenzierbar.
   (2) Ist $f(x)$ differenzierbar, so ist $f(x)$ stetig.
   (3) $|\int_a^b f(x)\,dx| \ge \int_a^b |f(x)|\,dx$
   (4) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$
   (5) $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ impliziert $f(x) \ge 0$.
   (6) $f(x) \ge 0$ impliziert $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

4. Die folgende unvollständige 3×3-Matrix beschreibt eine lineare Abbildung
   $$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ mit } A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } A\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die fehlenden Einträge von A.

   (b) Es gibt zwei verschiedene Vektoren (keiner davon ist der Nullvektor), die durch A auf sich selbst abgebildet werden. Was bedeutet das für die Eigenwerte von A?

   (c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A^n x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für beliebige natürliche Zahlen n (dies ist ohne Rechnung möglich).