Prüfung aus Mathematik 2 f. MB u. VT
am 2. Dezember 2005

ZUNAME: ....
Vorname: ....
Kennzahl: ....
Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben sei das Vektorfeld
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ -\alpha \cdot xy \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$
   (a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ und $\operatorname{div} \mathbf{v}$.
   (b) Für welchen Wert α ist $\mathbf{v}$ ein Potentialfeld? Bestimmen Sie die zugehörige Potentialfunktion $P(x, y, z)$.
   (c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$ entlang der Kurve $C(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$, $t \in [0, \pi]$.
   (d) Für welchen Wert von α stimmt das Ergebnis aus (c) mit der Differenz $P(-1, 0, 1/2) - P(1, 0, 0)$ überein und warum?

2. Lösen Sie die lineare Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = f(x)$, mit $f(x) = e^x$. Sind die Lösungen stabil? Wie lautet der Ansatz bei der Störfunktion $g(x) = 2e^{-x} + 3e^x \cos x$?

3. Die 2π-periodische Funktion f sei definiert durch
$$f(x) = 2x,\ x \in (-\pi, \pi).$$
   (a) Bestimmen Sie die Fourierreihe F zu f.
   (b) Bilden Sie die Stammfunktion von F und stellen Sie fest, ob diese wieder Fourierreihe einer Funktion g ist (welcher?). Welchen Satz müssen Sie hierbei verwenden?
   (c) Gilt das gleiche für die Ableitung von F? *Hinweis: Werten Sie F'(x) z.B. in $x_0 = 0$ aus.)*

4. Lösen Sie die partielle Differentialgleichung $xu_{xt}(x, t) - u_t(x, t) = \cos t$ mit $u(x, 0) = u_x(x, 0) = 0$ und $u(1, t) = 0$, indem Sie eine Laplacetransformation bezüglich t durchführen. Verwenden Sie die Beziehung $\mathcal{L}(u_{xt}(x, t))(s) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(u_t(x, t))(s)$, um eine Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich der Variablen x für $\mathcal{L}(u(x, t))(s)$ zu erhalten.
   Hinweis zur Kontrolle: $\mathcal{L}(u(x, t))(s) = c(s)x - \frac{1}{1+s^2}$. *$c(s)$ ist mittels $u(1, t) = 0$ zu bestimmen.*

5. Der Hals einer rotationssymmetrischen (Bier-)flasche wurde durch
$$z = f(x, y) = \frac{25}{x^2 + y^2 + 1} - 2.5$$
   modelliert (siehe Skizze).
   (a) Berechnen Sie das Volumen V der Flasche, indem Sie sie in geeignete Teilstücke zerlegen.
   (b) Geben Sie den nach außen zeigenden Normalenvektor an die Flaschenhalsoberfläche an. Wie kann man damit den Inhalt der Oberfläche des Halses berechnen? Stellen Sie das entsprechende Integral auf (nicht ausrechnen).