Prüfung aus Mathematik 1 f. MB u. BI

am 2. Dezember 2005

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für jede natürliche Zahl n: $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$.

   (b) Es seien $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}$ und $b_n = \frac{1}{n^3} + \frac{(-1)^n}{n^2}$. Untersuchen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

   (c) Geben Sie das genaue Konvergenzintervall der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{\sqrt{n}+7}x^{3n}$ an.

2. (a) Zeigen Sie, daß jede komplexe Zahl $w = \frac{1-\mathrm{i}t}{1+\mathrm{i}t}$, $t \in \mathbb{R}$ beliebig, den Betrag $|w| = 1$ hat.

   (b) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{z \in \mathbb{C} : |z^2| \leq 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z^2) \leq 0\right\}$ in der komplexen Zahlenebene.

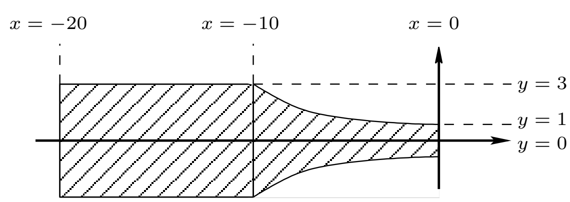
3. Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen gelten und welche nicht gelten.

   (a) Es gibt eine Funktion $f(x)$, die im Punkt $x = 15$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

   (b) Es gibt eine Funktion $f(x)$, die im Punkt $x = 15$ differenzierbar, aber nicht stetig ist.

   (c) (i) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot 0.5^n = 0$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n) \ln(\frac{1}{n}) = 0$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{n^3+3n}{4\sqrt{n}+n^4}) = 1$

4. Der Hals der abgebildeten rotationssymmetrischen (Bier-)flasche wurde durch $f(x) = \frac{a}{x+b}$ modelliert.



   (a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b sowie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche Q mit den aus der Skizze ersichtlichen Vorgaben.

   (b) Berechnen Sie das Volumen V der Flasche.

   (c) Angenommen, man würde bei der Herstellung den Flaschenhals beliebig lang ziehen, d.h., die Funktion f im Intervall $[-10, \infty)$ betrachten. Konvergieren Q und V? Geben Sie die Grenzwerte explizit an sofern vorhanden.

5. (a) Bestimmen Sie die 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, die den Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ abbildet.

   (b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sowie $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$