Prüfung aus Mathematik 2 f. WI

am 2. Dezember 2005

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 120 Minuten!

1. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ -\alpha \cdot xy \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Für welchen Wert α ist $\mathbf{v}$ ein Potentialfeld? Bestimmen Sie die zugehörige Potentialfunktion $P(x, y, z)$.

   (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$ entlang der Kurve $C(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi})$, $t \in [0, \pi]$.

   (c) Für welchen Wert von α stimmt das Ergebnis aus (c) mit der Differenz $P(-1, 0, 1/2) - P(1, 0, 0)$ überein und warum?

2. Lösen Sie die lineare Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = f(x)$, mit $f(x) = e^x$. Sind die Lösungen stabil? Wie lautet der Ansatz bei der Störfunktion $g(x) = 2e^{-x} + 3e^x \cos x$?

5. Der Hals einer rotationssymmetrischen (Bier-)flasche wurde durch

$$z = f(x, y) = \frac{25}{x^2 + y^2 + 1} - 2.5$$

   modelliert (siehe Skizze).

   (a) Berechnen Sie das Volumen V der Flasche, indem Sie sie in geeignete Teilstücke zerlegen.

   (b) Geben Sie den nach außen zeigenden Normalenvektor an die Flaschenhalsoberfläche an. Wie kann man damit den Inhalt der Oberfläche des Halses berechnen? Stellen Sie das entsprechende Integral auf (nicht ausrechnen).