Prüfung aus Mathematik 1 f. MB u. BI

am 03. Dezember 2004

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Wir definieren: $a_1 := 2$ und $a_{n+1} := 2 - \frac{1}{a_n}$, n=1,2,3,. . . .
   (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $a_n = \frac{n+1}{n}$.
   (b) Untersuchen Sie Konvergenz und absolute Konvergenz der folgenden Reihen: $\sum(-1)^n a_n$, $\sum(-1)^n(a_n - a_{n+1})$.
   (c) Geben Sie den Konvergenzbereich für die Reihe $\sum a_n x^n$ an und untersuchen Sie das Randverhalten.

   Hinweis: Benutzen Sie für (b) und (c) das Ergebnis aus (a).

2. (a) Man berechne die Grenzwerte. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{x}}$, $\quad \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(2+e^x) - \ln(x^2)}{1+2x}$.
   (b) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 1 - \ln(\cos(x))$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, und machen Sie insbesondere Aussagen zu Nullstellen, Extremwerten, Monotonie und Grenzverhalten.

3. (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = \sqrt{|x|}$ mit $y(1) = 0$. Unterscheiden Sie bei der Lösung die Fälle $x < 0$ und $0 \le x \le 1$.
   (b) Bilden Sie den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ im Punkt $x = 0$.
   (c) Erläutern Sie, wie der Differenzenquotient mit der Ableitung $f'(x)$ zusammenhängt.

4. Begründen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. Hierzu seien $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen.
   (a) Falls $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \infty$, so gilt $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(f(x) + g(x)) = \infty$.
   (b) Falls $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g(x)$ existiert, so gilt $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(f(x) + g(x)) = \infty$
   (c) Es gibt eine Funktion, die an der Stelle $x = 37$ eine 12-fache Nullstelle hat.
   (d) Es gibt eine Funktion, die an der Stelle $x = -37$ nicht definiert und auch nicht stetig fortsetzbar ist.

5. Es sei $a \in I\!\!R$. Die Matrix 4×4-Matrix A sei definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & a & a-1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie
   (a) Den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von a.
   (b) Die Determinante $\det A$ für $a = 1$.
   (c) Die Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ für $a = 3$.