Prüfung aus Mathematik 1 f. MB u. BI

am 7. Oktober 2005

ZUNAME:............................

Vorname:............................

Kennzahl:............................

Mat.Nr.:..............................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = e^x x(x-1)$.

   (a) Diskutieren Sie $f(x)$ und fertigen Sie im Bereich $-2 < x < 2$ eine Skizze an (Nullstellen, Extremwerte, Verhalten im Unendlichen, *keine* Wendepunkte). *Hinweis:* $\sqrt{5} \approx 2.23$.

   (b) Die Funktion f, die Koordinatenachsen und jede Gerade $x = u$ für $u < 0$ schließen miteinander eine Fläche ein. Geben Sie den Flächeninhalt $A(u)$ dieser Fläche in Abhängigkeit von u an. Konvergiert
   $$\lim_{u\to-\infty} A(u)?$$

   (c) In welchen Bereichen besitzt $f(x)$ eine Umkehrfunktion (Begründung)?

2. Begründen Sie, daß folgende Aussagen gelten oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. Dazu seien a_n und b_n beliebige Folgen reeller Zahlen.

   (a) Wenn a_n und b_n divergent sind, sind auch die Folgen $a_n + b_n$ und $a_n \cdot b_n$ divergent.

   (b) Konvergieren sowohl die Summe $a_n + b_n$ als auch die Differenz $a_n - b_n$ zweier Folgen, so konvergieren auch die Folgen a_n und b_n selbst.

   (c) Divergieren sowohl die Summe $a_n + b_n$ als auch die Differenz $a_n - b_n$ zweier Folgen, so divergieren auch die Folgen a_n und b_n selbst.

3. (a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für jede natürliche Zahl n: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

   (b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = -\dfrac{y(x)^2 x^{\frac{1}{3}}}{1 + x^{\frac{4}{3}}}$, $x > 0$ zum Anfangswert $y(0) = 4$.

4. Es sei $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 4}{(x+1)(x-2)^2}$ und $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

   (a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f.

   (b) Die Funktion g besitzt im Punkt $x_0 = 0$ die Taylor-Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n$. Bestimmen Sie den genauen Konvergenzbereich dieser Reihe.

   (c) Ermitteln Sie mithilfe von (a) und (b) die Taylor-Entwicklung von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und geben Sie daraus eine allgemeine Formel für $f^{(n)}(0)$ an.

5. Die 3×3–Matrix A sei gegeben durch
   $$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Rechnen Sie nach, daß $A^3 = I$ gilt, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

   (b) Zeigen Sie, daß für eine beliebige 3×3 Matrix B gilt: Ist λ ein Eigenwert von B, so ist λ^2 ein Eigenwert von B^2 und λ^3 ein Eigenwert von B^3.

   (c) Welche Eigenwerte besitzt die Einheitsmatrix I?

   (d) Was läßt sich aufgrund von (a), (b) und (c) über die Eigenwerte von A sagen? Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Eigenwerte von A explizit berechnen.