

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!  
 Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!  
 Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Stellen Sie die allgemeine Formel auf, deren Gültigkeit durch die folgenden vier Ungleichungen nahegelegt wird, und beweisen Sie sie mit vollständiger Induktion.

$$1 \geq \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$1 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{2} \tag{2}$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \geq \frac{3}{2} \tag{3}$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \geq \frac{4}{2} \tag{4}$$

- (b) Benutzen Sie soweit möglich (a), um die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2k-1}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{2k-1}\right)^k$  auf Konvergenz und absolute Konvergenz zu überprüfen.

- (c) Bestimmen Sie das genaue Konvergenzintervall der Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2k-1} (x+3)^k$ .

- (d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen (b) und (c)?

2. Es sei  $f(x) = \begin{cases} x \arctan(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- (a) Diskutieren Sie  $f(x)$  (Monotonie, Polstellen, Nullstellen).  
 (b) Bestimmen Sie das Verhalten von  $f$  an den Rändern des Definitionsbereiches (Skizze!)  
 (c) Ist  $f(x)$  stetig? Läßt sich  $f'(x)$  im Punkt  $x = 0$  stetig fortsetzen?

3. (a) Nennen Sie drei Kriterien, mit denen Sie die Konvergenz von uneigentlichen Integralen feststellen können. Konvergieren  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$  und  $\int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ ?

- (b) Wodurch unterscheiden sich zwei Funktionen, die die gleichen Ableitungen haben?  
 (c) Wodurch unterscheiden sich zwei Funktionen, die die gleichen Stammfunktionen haben?

4. Markieren Sie in der folgenden Tabelle mit **R** bzw. **F** die richtigen und die falschen Aussagen. Dazu seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen und  $n$  eine natürliche Zahl<sup>1</sup>.

$e^{a+b} = e^a + e^b$	$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$	$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{(b^2 + \sqrt{b})} + b} = \frac{1}{2}$	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx = 0$
$e^{a+b} = e^a e^b$	$\ln a - \ln b = \frac{\ln a}{\ln b}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\cos(x)} dx = 1$

5. Die  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  sei gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $D$  und eine Matrix  $S$ , für die  $A = SDS^{-1}$  gilt.  
 (b) Verwenden Sie (a), um  $A^{37}$  zu berechnen.

<sup>1</sup>Gesamtpunkte für diese Aufgabe:  $\max\{0, \frac{1}{2}(\#\text{Richtig} - \#\text{Falsch bezeichnete Aussagen})\}$