Prüfung aus Mathematik 2 f. MB u. VT

am 28. Jänner 2005

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. Es sei $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3$.
   (a) Untersuchen Sie Art und Lage der Nullstellen von (f_x, f_y).
   (b) Minimieren Sie die Funktion unter der Nebenbedingung $x + 2y - 5 = 0$.
   (c) Geben Sie an, in welcher Richtung die Funktion $f(x, y)$ im Punkt $(3, 1)$ am stärksten fällt und begründen Sie das Ergebnis. Wie stark ist der Abfall?

2. (a) Die Funktionen x^3 und x^4 bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen einer bestimmten homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bestimmen Sie diese Differentialgleichung.
   Hinweis: Wählen Sie als Ansatz $x^2y'' + axy' + by = 0$ *und berechnen Sie* a *und* b.
   (b) Stellen Sie die zu der Differentialgleichung gehörige Indexgleichung auf und lösen Sie sie.
   (c) Geben Sie die eindeutige Lösung zu den Anfangswerten $y(1) = 3$ und $y'(1) = 0$ an.

3. Es sei das Vektorfeld $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$ gegeben.
   (a) Stellen Sie fest, ob $\mathbf{v}$ konservativ, quellfrei, ein Gradientenfeld ist.
   (b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x}$, wobei C die Randkurve des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)$ bezeichnet.
   (c) Was besagt der Satz von Gauß?
   (d) Benutzen Sie (c), um das Oberflächenintegral $\int_S \mathbf{v} d\mathbf{O}$ über die Oberfläche S des Quaders Q mit Seitenlängen $2a, 2b, 2c$, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt, zu berechnen. Was stellen Sie fest?

4. (a) Berechnen Sie mittels partieller Integration die Fourier-Reihe $s_n(x)$ zur Funktion $y = x$ im Intervall $(-\pi, \pi)$.
   Hinweis zur Kontrolle: $b_k = \begin{cases} \frac{2}{k}, & \text{falls } k = 1, 3, 5... \\ -\frac{2}{k}, & \text{falls } k = 2, 4, 6... \end{cases}$
   (b) Diskutieren Sie die Konvergenzeigenschaften von $s_n(x)$ mithilfe des Satzes von Dirichlet.
   (c) Benutzen Sie (a), um einen Ausdruck für die Reihe $S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + -...$ zu erhalten.

5. Lösen Sie mittels Separationsansatzes die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $T' = c^2 T_{xx}$ unter den Randbedingungen $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$, $(t \geq 0)$, und passen Sie die Lösungsreihe an die Anfangsbedingung $T(x, 0) = x$ an (siehe Aufgabe 4).