

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Es sei $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + \frac{1}{3}(y - 1)^3$.
 - (a) Untersuchen Sie Art und Lage der Nullstellen von (f_x, f_y) .
 - (b) Minimieren Sie die Funktion unter der Nebenbedingung $x + 2y - 5 = 0$.
 - (c) Geben Sie an, in welcher Richtung die Funktion $f(x, y)$ im Punkt $(3, 1)$ am stärksten fällt und begründen Sie das Ergebnis. Wie stark ist der Abfall?
2. Ist die Differentialgleichung $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$ exakt? Wie lautet ein geeigneter integrierender Faktor? Geben Sie die allgemeine Lösung an.
3. (a) Die Funktionen x^3 und x^4 bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen einer bestimmten homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bestimmen Sie diese Differentialgleichung.
Hinweis: Wählen Sie als Ansatz $x^2 y'' + axy' + by = 0$ und berechnen Sie a und b .
 - (b) Stellen Sie die zu der Differentialgleichung gehörige Indexgleichung auf und lösen Sie sie.
 - (c) Geben Sie die eindeutige Lösung zu den Anfangswerten $y(1) = 3$ und $y'(1) = 0$ an.
4. (a) Berechnen Sie mittels partieller Integration die Fourier-Reihe $s_n(x)$ zur Funktion $y = x$ im Intervall $(-\pi, \pi)$.
Hinweis zur Kontrolle: $b_k = \begin{cases} \frac{2}{k}, & \text{falls } k = 1, 3, 5... \\ -\frac{2}{k}, & \text{falls } k = 2, 4, 6... \end{cases}$
 - (b) Diskutieren Sie die Konvergenzeigenschaften von $s_n(x)$ mithilfe des Satzes von Dirichlet.
 - (c) Benutzen Sie (a), um einen Ausdruck für die Reihe $S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ zu erhalten.