

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!
Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Formulieren Sie die Regel von de l'Hôpital und verwenden Sie diese, sofern nötig, zur Berechnung der folgenden Limits: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x - 4} \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
- (b) Begründen Sie die Richtigkeit der Aussagen, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:
- Eine Zahlenfolge, deren Glieder nicht gegen Null gehen, ist divergent.
 - Jede Reihe kann als Folge aufgefaßt werden.
 - Eine Reihe ist konvergent, wenn ihre Glieder eine Nullfolge bilden.
 - Eine Reihe ist divergent, wenn ihre Glieder keine Nullfolge bilden.

2. (a) Es sei $f(x) = \frac{(x-2)}{e^x}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{x - 2 - n}{e^x}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt.

- (b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen von $f(x)$, $f'(x)$ und $\int f(x) dx$ im Punkt $x_0 = 2$.
(c) Geben Sie die Konvergenzbereiche der Reihen aus (b) an.

3. (a) Berechnen Sie

$$(a) \int \frac{3x+1}{x^2+2x-3} dx \quad (b) \int_0^\pi \cos x \cosh x dx.$$

- (b) Es sei $y' = (x + y + 1)^2$. Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $y(0) = -1$.

Anleitung: *Substituieren Sie $z := x + y + 1$, und trennen Sie dann die Variablen.*

4. (a) Geben Sie für die komplexe Zahl

$$z = \frac{4e^{\frac{\pi i}{4}}}{(i-1)^2} + \sqrt{2}$$

die Werte $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ und $\arg z$ an (schreiben Sie z dazu in der Form $x + iy$).

- (b) Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung: $\operatorname{Im} z \leq |z - 2i|$.

5. Es seien die Ebenengleichungen

$$U_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } U_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie, daß U_1 und U_2 nicht gleich sind, und bestimmen Sie $U_1 \cap U_2$.
(b) Erklären Sie die Begriffe *Vektorraum*, *Basis* und *Dimension*.

Freiwillige Zusatzaufgaben (2 Zusatzpunkte):

- (c) Zeigen Sie, daß $U_1 \cap U_2$ ein Vektorraum ist, und geben Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ an.
(d) Kann $U_1 \cup U_2$ ein Vektorraum sein?