Prüfung aus Mathematik 2 für WI

am 14. Mai 2004

Zuname:..............................

Vorname:.............................

Kennzahl:............................

Mat.Nr.:..............................

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ für $y \neq 0$.
   (a) Berechnen Sie den Gradienten von f.
   (b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f für jeden Punkt $P(t, t)$ mit $t \neq 0$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Welches Verhalten hat die Funktion f entlang der Geraden $x = y$? (Begründung!)
   Hinweis: Interpretieren Sie z.B. das Ergebnis aus (b).

2. (a) Darf man im folgenden Integral die Integrationsreihenfolge vertauschen? (Begründung!)

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\, dx\, dy.$$

   (b) Berechnen Sie das Integral aus (a).

3. (a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\iint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{O}$ vom Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ über den Zylinder F: $y^2 + z^2 \leq 1$, der von $x = -1$ bis $x = 1$ reicht. (Mantel und zwei Deckflächen!)
   (b) Geben Sie die Definition eines konservativen Vektorfeldes.
   (c) Das Vektorfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung in $\mathbb{R}^2$ ohne den Punkt $(0, 0)$. (Nicht nachrechnen!)
   - Bestimmen Sie – ohne Rechnung – das Kurvenintegral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$ über den Kreis $\mathcal{C}$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$. Begründung!!!
   - Ist diese Vorgangsweise auch für den Kreis $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ möglich? Begründen Sie Ihre Antwort! Keine Berechnung!

4. (a) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - y'' + y' - y = e^x?$$

   (b) Welche der folgenden Mengen von Funktionen

$$\{x, -x\}, \qquad \{x, x^2\}, \qquad \{x, x^3\}$$

   bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$? Warum?
   (c) Bestimmen Sie jene Lösung der Differentialgleichung aus (b), für die $y(1) = y'(1) = 1$ gilt.