Prüfung aus Mathematik 2 f. WI

am 9. Juni 2006

ZUNAME: ....

Vorname: ....

Kennzahl: ....

Mat.Nr.: ....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. (a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des Integrals

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{e}^{-2(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

und berechnen Sie das Integral durch Transformation auf Polarkoordinaten (Führen Sie alle Rechnungen aus, welche für die Transformation nötig sind).

   (b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0.$$

Anleitung: Eine Lösung hat die Gestalt $y_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und damit $y_1(x)$ durch Einsetzen (zur Kontrolle: $y_1(x) = c(1+x^2)$). Berechnen Sie die zweite Lösung mit Hilfe von y_1 durch den Reduktionsansatz von d'Alembert. Verwenden Sie $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}(\frac{x}{(1+x^2)} + \arctan(x))$ (nicht nachzurechnen).

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' - y = \mathrm{e}^x$.

   (a) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

   (b) Sei zusätzlich der Anfangswert $y(0) = 0$ gegeben.

      i. Lösen Sie das Anfangswertproblem mittels Laplace Transformation.

      ii. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades der Lösung des Anfangswertproblems durch fortgesetzte Ableitungsbildung.

3. (a) Angenommen ein Fußball rollt entlang der Gerade $y = -x/2 + 5$ und der Tormann befinde sich im Ursprung $(0,0)$. In welchem Punkt ist der Abstand Fußball–Tormann minimal? Geben Sie die zu minimierende Funktion und die zu berücksichtigende Nebenbedingung an, und lösen Sie das Extremalproblem unter Benutzung der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

   (b) i. Formulieren Sie den Satz von Dirichlet über Fourierreihen.

      ii. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \pi - x$, $0 \le x \le 2\pi$, 2π–periodisch fortgesetzt. Skizzieren Sie $f(x)$ berechnen Sie deren Fourierreihe.