

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 3$.
(b) Untersuchen Sie die Folgen $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3 \dots$ und $b_n = \frac{(n+\sqrt{n})^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3 \dots$ auf Konvergenz.
(c) Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

2. Das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^{x-2}}{x} dx$$

ist durch Reihenentwicklung näherungsweise zu berechnen.

- (a) Geben Sie dafür zunächst die ersten drei Terme der Taylorentwicklung der Funktion $g(x) = \frac{e^{x-2}}{x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.
(b) Nähern Sie dann das Integral mithilfe von (a) an.
(c) Formulieren Sie den Satz über Differentiation von Potenzreihen. Erläutern Sie, inwiefern diese Aussage in (b) verwendet wurde.
3. (a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ dar:
 $(1-i)^3$, $\frac{2-i}{2-3i}$, $\frac{2}{3-i^2}$.
(b) Erläutern Sie den Begriff des Betrages und des Argumentes einer komplexen Zahl.
(c) Zeigen Sie, daß die Gleichung $z^2 + az + b$ für $a^2 < 4b$ genau zwei verschiedene komplexe Lösungen hat. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, die zwei reelle Nullstellen besitzt und eine, die genau eine reelle Nullstelle hat.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^3+16}}{\sqrt{x+1}}$

- (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D .
(b) Wie stellt man fest, ob ein Extremwert ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt ist?
(c) Wie man nachprüfen kann, gilt $\frac{f'(x)}{(x-3)} > 0$ für alle $x \in D$. Was kann man daher über die Anzahl der Extremwerte von $f(x)$ aussagen?

5. Es sei die Kurve $K(x, y) := 7x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$ gegeben.

- (a) $K(x, y)$ ist auf Hauptachsenform zu bringen. Skizzieren Sie die transformierte Kurve.
(b) Bestimmen Sie explizit die dabei auftretende orthonormale Matrix S .
(c) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von S .