

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!

Bitte für jedes Beispiel ein eigenes Blatt verwenden!

Arbeitszeit: 150 Minuten!

1. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 3$.
 (b) Untersuchen Sie die Folgen $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3 \dots$ und $b_n = \frac{(n+\sqrt{n})^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3 \dots$ auf Konvergenz.
 (c) Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?
2. Das Integral
$$\int_2^3 \frac{e^{x-2}}{x} dx$$
 ist durch Reihenentwicklung näherungsweise zu berechnen.
 - Geben Sie dafür zunächst die ersten drei Terme der Taylorentwicklung der Funktion $g(x) = \frac{e^{x-2}}{x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.
 - Nähern Sie dann das Integral mithilfe von (a) an.
 - Formulieren Sie den Satz über Differentiation von Potenzreihen. Erläutern Sie, inwiefern diese Aussage in (b) verwendet wurde.
3. (a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ dar:

$$(1 - i)^3, \quad \frac{2 - i}{2 - 3i}, \quad \frac{2}{3 - i^2}.$$
 - Erläutern Sie den Begriff des Betrages und des Argumentes einer komplexen Zahl.
 - Zeigen Sie, daß die Gleichung $z^2 + az + b$ für $a^2 < 4b$ genau zwei verschiedene komplexe Lösungen hat. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, die zwei reelle Nullstellen besitzt und eine, die genau eine reelle Nullstelle hat.
4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^3 + 16}}{\sqrt{x+1}}$
 - Bestimmen Sie den Definitionsbereich D .
 - Wie stellt man fest, ob ein Extremwert ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt ist?
 - Wie man nachprüfen kann, gilt $\frac{f'(x)}{(x-3)} > 0$ für alle $x \in D$. Was kann man daher über die Anzahl der Extremwerte von $f(x)$ aussagen?
5. Es sei die Kurve $K(x, y) := 7x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{3}xy - 1 = 0$ gegeben.
 - $K(x, y)$ ist auf Hauptachsenform zu bringen. Skizzieren Sie die transformierte Kurve.
 - Bestimmen Sie explizit die dabei auftretende orthonormale Matrix S .
 - Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von S .