

Prüfung Komplexe Analysis - 11.3.2011

Arbeitszeit 120 Minuten

Name:

Matr.Nr.:

Für jedes Beispiel werden maximal 5 Punkte vergeben. Sie dürfen jeden in der Vorlesung bewiesenen Satz verwenden, so lange Sie ihn korrekt zitieren. Für grobe Unsinnigkeiten (wie $2i > i$) müssen Sie aber mit Punkteabzügen rechnen!

1. Berechnen Sie das reelle Integral $\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^{11}} dt$, indem Sie $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{11}}$ über einen geeigneten Weg integrieren.

Geben Sie alle verwendeten Sätze und Abschätzungen an!

2. (a) Geben Sie eine ganze Funktion an, welche einfache Nullstellen genau an $(n^{3/2})_{n=1}^\infty$ besitzt (und sonst nullstellenfrei ist).
- (b) Bestimmen Sie alle Funktionen der Ordnung höchstens 1, welche einfache Nullstellen genau an $(n^{3/2})_{n=1}^\infty$ besitzen (und sonst nullstellenfrei sind).
- (c) Gibt es eine ganze Funktion f , welche einfache Nullstellen genau an $(n^{3/2})_{n=1}^\infty$ besitzt (und sonst nullstellenfrei ist) und folgende Eigenschaft hat?
 f erfüllt für jedes $\varepsilon > 0$ die Wachstumsbedingung $\|f\|_R \ll e^{R^\varepsilon}$.
Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an; wenn nein, beweisen Sie, dass es keine solche Funktion gibt!
3. (a) Wo ist $f(z) := \cos(z + \bar{z}) + i \sinh(z - \bar{z})$ holomorph?
- (b) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen $f = u + iv$, sodass auch die Funktion $h := u^2 + iv^2$ ganz ist!
- (c) Ist $g(z) := e^{-1/z^2}$ auf \mathbb{C}^\times holomorph? Sind $1/g$, und g^2 auf \mathbb{C}^\times holomorph? Klassifizieren Sie jeweils die Singularität an $z = 0$.
4. (a) Bestimmen Sie unter allen Automorphismen der oberen Halbebene \mathbb{H} jene, welche die Menge $\{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ in sich abbilden.
- (b) Bestimmen Sie alle Automorphismen der gepunkteten Kreisscheibe \mathbb{E}^\times .
- (c) Sind die Gebiete $G_1 := \mathbb{E} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ und $G_2 := \mathbb{E} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\}$ biholomorph äquivalent?
Hinweis: Untersuchen Sie zunächst $\operatorname{Aut}(\mathbb{E} \setminus \{0, \frac{1}{2}\})$.

Viel Erfolg!

Die mündliche Prüfung erfolgt nach vorheriger Vereinbarung per email!