Prüfung Komplexe Analysis - 25.6.2010

Arbeitszeit .... 120 Minuten

Name: ....

Matr.Nr.: ....

Für jedes Beispiel werden maximal 5 Punkte vergeben. Sie dürfen jeden in der Vorlesung oder Übung bewiesenen Satz verwenden, so lange Sie ihn korrekt zitieren. Für grobe Unsinnigkeiten (wie $3i > 2i$) behalten wir uns Punkteabzüge vor!

1. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$, indem Sie $f(z) = e^{\pi i z^2} \tan \pi z$ über das Parallelogramm mit Eckpunkten $R + iR$, $R + 1 + iR$, $-R + 1 - iR$, $-R - iR$ integrieren.

   Geben Sie alle verwendeten Sätze und Abschätzungen an!

2. (a) Geben Sie eine ganze Funktion an, welche einfache Nullstellen genau an $(n!)_{n=1}^{\infty}$ besitzt (und sonst nullstellenfrei ist).

   (b) Bestimmen Sie alle Funktionen der Ordnung höchstens 1, welche einfache Nullstellen genau an $(n!)_{n=1}^{\infty}$ besitzen (und sonst nullstellenfrei sind).

   (c) Gibt es eine ganze Funktion f, welche einfache Nullstellen genau an $(n!)_{n=1}^{\infty}$ besitzt (und sonst nullstellenfrei ist) und folgende Eigenschaft hat?

   (1) f erfüllt für kein $k > 0$ die Wachstumsbedingung $\|f\|_R \ll R^k$.

   (2) f erfüllt für jedes $\varepsilon > 0$ die Wachstumsbedingung $\|f\|_R \ll e^{R^\varepsilon}$.

   Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an; wenn nein, beweisen Sie, dass es keine solche Funktion gibt!

3. (a) Zeigen Sie: Sind f und g zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ dann gilt $f(z) = c \cdot g(z)$ mit einem $c \in \mathbb{C}$.

   (b) Gegeben sei

   $$f(z) = \frac{\sin z}{z(z^2+1)} \exp\Big(\frac{1}{z^2-1}\Big).$$

   (1) Klassifizieren Sie alle Singularitäten von f.

   (2) Gibt es eine ganze Funktion $g \neq 0$, sodass $h := f \cdot g$ nur hebbare Singularitäten hat? Wenn ja, geben Sie so ein g an; wenn nein, beweisen Sie, dass es keine solche Funktion gibt!

4. Gegeben sei das Gebiet $G := \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 4\}$.

   (a) Gibt es eine biholomorphe Abbildung $\phi : G \to \mathbb{E}$? Wenn ja, geben Sie eine solche Abbildung an; wenn nein, beweisen Sie, dass es keine gibt!

   (b) Gibt es eine biholomorphe Abbildung $\phi : G \setminus \{i\} \to \mathbb{H} \setminus \{i\}$? Wenn ja, geben Sie eine solche Abbildung an; wenn nein, beweisen Sie, dass es keine gibt!

   (c) Auf welcher der Mengen $G, G\setminus\{i\}, \mathbb{E}, \mathbb{H}\setminus\{i\}$ gibt es einen holomorphen Logarithmus? Geben Sie einen solchen Logarithmus an bzw. beweisen Sie, dass es keinen solchen Logarithmus gibt!

Viel Erfolg!

Die mündliche Prüfung erfolgt nach vorheriger Vereinbarung per email!