# Prüfung Komplexe Analysis - 26.11.2010

Arbeitszeit ........ 120 Minuten

Name: ...................................

Matr.Nr.: ..............................

Für jedes Beispiel werden maximal 5 Punkte vergeben. Sie dürfen jeden in der Vorlesung bewiesenen Satz verwenden, so lange Sie ihn korrekt zitieren. Für grobe Unsinnigkeiten (wie $2i > i$) müssen Sie aber mit Punkteabzügen rechnen!

1. Berechnen Sie das reelle Integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\,dt$, indem Sie $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ über einen geeigneten Kreissektor integrieren.

   **Geben Sie alle verwendeten Sätze und Abschätzungen an!**

2. (a) Wählen Sie einen beliebigen Radius $0 < r < 1$ und bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(z) = 6z^5 + 2z^3 + 2z^2 + 1$ in der Kreisscheibe $B_r(0)$.

   (b) Sei $G_1 = \mathbb{E}$ und $G_2 = \mathbb{E}^\times$. Bestimmen Sie alle harmonischen Funktionen $u : G_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, welche nicht vom Polarwinkel $\varphi$ abhängen.

   (c) Beweisen Sie oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel:
   Zu jeder harmonischen Funktion $u : G_i \to \mathbb{R}$, gibt es eine holomorphe Funktion $f : G_i \to \mathbb{C}$ sodass $u = \operatorname{Re} f$, $i = 1, 2$.

3. (a) Sei $f : D \setminus \{z_0\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche an $z_0$ einen Pol $k$-ter Ordnung besitzt. Bestimmen Sie das Verhalten an $z_0$ von

   $$f_1 : z \mapsto f(z^{-1}), \quad f_2 := z \mapsto f(z)^{-1}, \quad f_3 : z \mapsto e^{-f(z)}.$$

   (b) Wie (a) aber mit einer wesentlichen Singularität von $f$ an der Stelle $z_0$.

   (c) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $h : G \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion. Sei $S(h) := \{z \in G : z \text{ ist isolierte Singularität von } h\}$. Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel:

   i. $S(h)$ besitzt keinen Häufungspunkt.
   ii. $S(h^{-1})$ ist diskret.
   iii. $S(h^{-1})$ besitzt keinen Häufungspunkt.

4. Gegeben sei das Gebiet $G := \{z : -1 < \operatorname{Im} z < 1\} \setminus [0, \infty)$.

   (a) Weisen Sie nach, dass $G$ einfach zusammenhängend ist, indem Sie die Homotopiegruppe $\pi_1(G, z_0)$ direkt gemäß der Definition der Homotopiegruppe berechnen.

   (b) Geben Sie explizit eine biholomorphe Abbildung $\phi : G \to \mathbb{E}$ an!

   (c) Geben Sie *alle* holomorphen Logarithmen auf $G$ an, d.h. geben Sie alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ an, sodass $e^{f(z)} = z$ für $z \in G$.

**Viel Erfolg!**

Die mündliche Prüfung erfolgt nach vorheriger Vereinbarung per email!