1. Übungstest – Mathematik 3 – Gruppe MB3M6

Name ....

Matr. Nr.: ....

1. (a) Erklären Sie die Begriffe „gerade Funktion“ und „ungerade Funktion“.

   (b) Betrachten Sie die auf $[-2, 2]$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

   und entwickeln Sie sie dort in eine Fourierreihe.
   Ist diese Funktion gerade, ungerade oder keines von beiden? **5 Punkte (1 + 4)**

2. (a) Seien f und g zwei Funktionen aus $C([0, 1])$. Erklären Sie, was es bedeutet, dass f und g orthogonal bzw. orthonormal sind bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

   (b) Betrachten Sie das Sturm-Liouville-Problem auf dem Intervall $[0, 1]$:

$$y'' + ky = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

   Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenfunktionen an.

   Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $k > 0$, $k = 0$ und $k < 0$. Zeigen Sie, dass es nur im Fall $k > 0$ tatsächlich Eigenwerte gibt. **5 Punkte (1 + 4)**

3. Gegeben ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$V = \left(y^3, 3xy^2\right).$$

   (a) Berechnen Sie Divergenz und Rotation von V. Sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt?

   (b) Existiert ein Potential für V? Falls ja, geben Sie ein Potential an. Falls nein, begründen Sie, warum das Potential nicht existiert. **5 Punkte (2+3)**

_____ / 15

Viel Erfolg!

1. Übungstest - Mathematik 3 - Gruppe MB3M 5

Name: ....

Matr.Nr.: ....

1. Betrachten Sie die auf $[0,3]$ definierte Funktion $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Geben Sie ein vollständiges Orthogonalsystem auf dem Intervall $[-3,3]$ an!

   (b) Setzen Sie $f(x)$ *gerade* auf das Intervall $[-3,3]$ fort und entwickeln Sie dort in eine Fourierreihe. Wo konvergiert diese Fourierreihe?

   (c) Setzen Sie $f(x)$ *ungerade* auf das Intervall $[-3,3]$ fort und entwickeln Sie dort in eine Fourierreihe. Wo konvergiert diese Fourierreihe?

1+2+2 Punkte

   ACHTUNG: Die Fortsetzung aus (b) wird nicht die gleiche sein, wie die aus (c).

2. Betrachten Sie das Sturm-Liouville Problem auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$y''(x) + ky(x) = 0, \quad y'(0) = y(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

   (a) Geben Sie *alle* Eigenwerte und Eigenfunktionen an!

   (b) Die beiden kleinsten Eigenwerte sind $k = 1$ und $k = 9$. Bestimmen Sie die zugehörigen *normierten* Eigenfunktionen f_1 bzw. f_9 und berechnen Sie:
   (i) die Projektion von f_9 auf den von f_1 aufgespannten (eindimensionalen) Vektorraum
   (ii) die Projektion der Funktion $g(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2}$ auf den von f_1 *und* f_9 aufgespannten (zweidimensionalen) Vektorraum.

3+2 Punkte

3. (a) Geben Sie ein Vektorfeld $V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ an, das $\operatorname{rot} V(x,y,z) = (1,0,0)$ erfüllt und machen Sie die Probe!

   (b) Geben Sie ein Skalarfeld $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ an, das $\nabla\phi(x,y,z) = (z,y,x)$ erfüllt und machen Sie die Probe!

   (c) Geben Sie ein Vektorfeld $V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ an, das $\operatorname{rot} V = (2,0,0)$ und $V(1,1,1) = (1,2,2)$ erfüllt, indem Sie (a) und (b) geeignet kombinieren.

2+2+1 Punkte

Gutes Gelingen!

1. Übungstest – Mathematik 3 – 16.11.2011

Name/ Matrikelnummer:..

Übungsleiter Martin Halla/ Gruppe M1

Lösen Sie die Beispiele der Angabe entsprechend, begründen Sie gegebene Antworten präzise aber fassen Sie sich kurz!

1. (a) Betrachten Sie $\tilde{f}\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x$. Setzen Sie $\tilde{f}$ ungerade auf $[-\pi,\pi]$ zu f fort.
   (b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von f.
   (c) Berechnen Sie $||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$.
   (d) Wie lautet die Parsevalsche Gleichung?
   (e) Rechnen Sie nun $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ aus.

   5 Punkte

2. Betrachten Sie folgendes Sturm-Liouville Eigenwertproblem auf dem Intervall $[0,\pi]$:

$$(e^{2x}\psi'(x))' + \lambda e^{2x}\psi(x) = 0, \quad \psi(0) = \psi(\pi) = 0$$

   (a) Formulieren Sie das Sturm-Liouville Eigenwertproblem in eine einfachere Form um.
   (b) Machen Sie eine Fallunterscheidung $\lambda < 1, \lambda = 1, \lambda > 1$ und zeigen Sie, dass für alle Eigenwerte λ gilt $\lambda > 1$.
   (c) Geben Sie alle Eigenwerte an.
   (d) Geben Sie alle Eigenfunktionen an. (Sie müssen die Funktionen nicht normieren.)

   5 Punkte

3. (a) Finden Sie irgendeine Funktion $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ xy \end{pmatrix}$.
   (b) Finden Sie nun eine Funktion $V\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$ mit $\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ xy \end{pmatrix}$ und $v(x,y,z) = 0$.

   5 Punkte

Viel Erfolg!

Vorname ________________________ ________________________ *Nachname*

________________________ *Mat.Nr.*

1. Übungstest – Mathematik 3 für MB, WIMB, VT – WS 2011/12

1. (a) Setzen Sie die folgende – auf $0 \leq x < 2$ definierte – Funktion periodisch auf $\mathbb{R}$ fort (Skizze!) und entwickeln Sie sie in eine Fourierreihe:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Kreuzen Sie den punktweisen Grenzwert der Fourierreihe am Punkt $x = 2$ an:

☐ 1, ☐ 1/2, ☐ 0, ☐ $-1/2$, ☐ -1.

(b) Wie lautet die Parseval'sche Gleichung für f? *3,5+1,5 Punkte*

2. (a) Sei α eine reelle Zahl und, für $-2\pi \leq x \leq 0$, die Differentialgleichung

$$y''(x) = \alpha y(x), \qquad y(-2\pi) = 0 = y'(0)$$

gegeben. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren Lösungen $y \neq o$? Bestimmen Sie für diese α alle Lösungen der Differentialgleichung.

(b) Verwenden Sie die Laplacetransformation, um die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 0, \quad x(0) = \pi,$$

zu lösen.

4+1 Punkte

3. (a) Bestimmen Sie ein Potential des Potentialfeldes

$$\mathbf{W}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie alle dreidimensionalen Vektorfelder $\mathbf{V}(x, y, z)$, die

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

erfüllen und geben Sie zwei konkrete Beispiele an.

1+4 Punkte

1. Übungstest - Mathematik 3 - Gruppe MB3M 3

Name: ....

Matr.Nr.: ....

1. Betrachten Sie die auf $[0,2]$ definierte Funktion $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Setzen Sie $f(x)$ *ungerade* auf das Intervall $[-2,2]$ fort und entwickeln Sie diese dort in eine Fourierreihe. Wo und gegen welche Grenzwerte konvergiert die Fourierreihe?

   (b) Setzen Sie $f(x)$ *gerade* auf das Intervall $[-2,2]$ fort. Wo und gegen welche Grenzwerte konvergiert die Fourierreihe dieser Funktion?

4+1 Punkte

2. Betrachten Sie das Sturm-Liouville Problem auf dem Intervall $[1,2]$:

$$y''(x) + ky(x) = 0, \quad y(1) = y(2) = 0$$

   (a) Geben Sie *alle* Eigenwerte und Eigenfunktionen an!

   (b) Die beiden kleinsten Eigenwerte sind $k = \pi^2$ und $k = 4\pi^2$.

      (i) Bestimmen Sie die zugehörigen *normierten* Eigenfunktionen f_{π^2} bzw. $f_{4\pi^2}$.

      (ii) Berechnen Sie die Projektion der Funktion $g(x) = 1$ auf den von f_{π^2} und $f_{4\pi^2}$ aufgespannten (zweidimensionalen) Vektorraum.

4+2 Punkte

3. (a) Geben Sie ein Vektorfeld $V : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ an, das $\operatorname{rot} V(x,y,z) = (y,0,1)$ erfüllt und machen Sie die Probe!

   (b) Bestimmen Sie den Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ für den das Vektorfeld $V_\lambda : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $V_\lambda(x,y,z) = (z, 1, \lambda y + x)$, die Gleichung $\operatorname{rot} V_\lambda = 0$ erfüllt. Geben Sie in diesem Fall ein Skalarfeld $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ an, sodass $\nabla\phi = V_\lambda$ gilt.

2+2 Punkte

Gutes Gelingen!