1. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB - WS 2011

In den Beispiele 1-3 wird die Laplace-Transformation wiederholt. Siehe dazu auch das Skriptum Mathematik 2, Kapitel 10.5.

1. (a) Was ist die Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f(t)\}$ einer reellen Funktion f? Welche Eigenschaften sollte f haben?

   (b) Berechnen Sie $\mathcal{L}\{t^k\}$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Argumentieren Sie: Die Zuordnung $f(t) \mapsto \mathcal{L}\{f(t)\}$ ist linear. Was müssen Sie dazu überprüfen? Gilt auch $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$?

2. Berechnen Sie die Laplace-Transformation von $f(t) = e^{\alpha t}$ sowie von $g(t) = \cos(\alpha t)$ und $h(t) = \sin(\alpha t)$.

   Hinweis: Wenn Sie $f(t)$ schon transformiert haben, spart die Verwendung der Euler-Formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$ einige Zeit.

3. (a) Berechnen Sie durch partielle Integration eine Formel für $\mathcal{L}\{f'\}$.

   (b) Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

   $$f'(t) + kf(t) = 0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

   und finden Sie eine Gleichung für die Laplace-Transformation $g(s) := \mathcal{L}\{f\}(s)$ der gesuchten Funktion. Lösen Sie sodann mit ihrem Ergebnis die ursprüngliche Differentialgleichung.

   (c) Wie (b), aber nun mit der Differentialgleichung $f'(t) + f(t) = e^t$.

4. Berechnen Sie die Integrale

   $$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin nx \, dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx \, dx$$

   für $k = 1, 2, 3 \ldots$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$ und geben Sie eine ortho**normale** Menge von trigonometrischen Funktion in $C[0, 2\pi]$ an.

   Hinweis [Korrigiert]: Verwenden Sie die Identitäten

   $$\cos(k+n)x = \cos kx \cos nx - \sin kx \sin nx \tag{1}$$
   $$\sin(k+n)x = \sin kx \cos nx + \cos kx \sin nx \tag{2}$$

   um nicht so viele Integrale explizit berechnen zu müssen.

5. Erklären Sie, wie man die Transformation $x \mapsto a + \frac{b-a}{2\pi}x$ verwenden kann, um ein Orthonormalsystem für $C[a, b]$ zu erhalten. Geben Sie ein solches Orthonormalsystem an!