2.&3. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB - WS 2011

6. (a) Finden Sie die Orthogonal-Projektion von $v = (0, 3, 3) \in \mathbb{R}^3$ auf den Unterraum, der von den beiden (nicht orthonormalen!) Vektoren $\phi_1 = (1, 1, 0)$ und $\phi_2 = (1, 0, 2)$ aufgespannt wird.

   (b) Finden Sie die Orthogonal-Projektion von $f(x) = 1 + e^x \in C[0, 1]$ auf den Unterraum, der von den beiden (nicht orthonormalen!) Vektoren $\phi_1(x) = 1$ und $\phi_2(x) = x$ aufgespannt wird.

7. (a) Argumentieren Sie: Ist $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, dann gilt für die Fourier-Koeffizienten $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$.

   (b) Argumentieren Sie: Ist $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, dann gilt für die Fourier-Koeffizienten $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

   (c) Geben Sie jeweils eine Funktion an, welche (i) gerade (ii) ungerade (iii) gerade und ungerade (iv) weder gerade noch ungerade ist, an!

8. Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = |\cos(t)|$ in eine Fourierreihe

   (a) auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (b) auf dem Intervall $[0, \pi]$.

9. Setzen Sie die Funktion $f(t) = t$ vom Intervall $[0, 1]$ gerade (!) auf das Intervall $[-1, 1]$ fort und entwickeln Sie die so erhaltende Funktion dort in eine Fourierreihe. Wie lautet die Parseval'sche Gleichung für f?

10. Setzen Sie die auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ definierte Funktion $f(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t)$ periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort und entwickeln Sie in eine Fourierreihe. Bestimmen Sie durch direktes Einsetzen das Konvergenzverhalten der Fourierreihe an den Stellen $t = 0$ und $t = \pm\pi$.

11. Betrachten Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [-\pi, 0) \\ t & \text{für} \quad x \in [0, \pi) \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ und berechnen Sie die Fourierreihe von f' bzw. von F, wobei F eine Stammfunktion von f sein soll.

12. Lösen Sie das Sturm-Liouville Problem

$$y''(t) + ky(t) = 0, \quad y'(\pi) = y'(2\pi) = 0$$

und geben Sie alle Eigenwerte/Eigenfunktionen des Problems an!

13. [Dieses Beispiel wird allen Teilnehmern angerechnet!] Lösen Sie das Sturm-Liouville Problem

$$t^2\, y''(t) + t\, y'(t) + ky(t) = 0, \quad y'(1) = y'(e) = 0$$

und geben Sie alle Eigenwerte/Eigenfunktionen des Problems an!

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $s = \ln t$ und $z(t) = y(x)$.

14. Lösen Sie das Sturm-Liouville Problem

$$4t\, z''(t) + 2z'(t) + kz(t) = 0, \quad z'(0) = z'(1) = 0$$

und geben Sie alle Eigenwerte/Eigenfunktionen des Problems an!
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t = x^2$ und $z(t) = y(x)$.

15. Entwickeln Sie die auf dem Intervall$[0, 1)$ definierte Funktion

$$f(x) = 1 + 2\cos\sqrt{t}$$

nach Eigenfunktionen des Sturm-Liouville Problems aus Beispiel 14.