4.&5. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB - WS 2011

16. Erklären Sie die Begriffe Gradient eines Skalar- bzw. Rotation und Divergenz eines Vektorfeldes im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine physikalische (d.h. koordinatenfreie) Interpretation!

17. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld in Polarkoordinaten, d.h. $\phi = \phi(r, \theta)$ mit $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$. Dann ist der Gradient von ϕ gegeben durch

$$\nabla\phi(r,\theta) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \dots\right) = \left(\phi_r \cos\theta - \frac{1}{r}\phi_\theta \sin\theta, \dots\right) \tag{1}$$

    (a) Berechnen Sie in (1) die fehlende Komponente
    (b) Berechnen Sie die Divergenz eines Vektorfeldes $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, das in Polarkoordinaten gegeben ist

18. Es sei $V_\alpha(x, y) := (\frac{x}{x^2+y^2}, \alpha\,\frac{y}{x^2+y^2})$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Berechnen Sie Divergenz und Rotation von V_α. Skizzieren Sie V_α, $\operatorname{rot} V_\alpha$, sowie die Niveaulinien von $\operatorname{div} V_\alpha$.

19. Betrachten Sie wieder das Vektorfeld aus Beispiel 18. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_C V_\alpha\, ds$, wobei $C = \binom{\cos s}{\sin s}$ eine Parametrisierung der Kreislinie ist. Entscheiden Sie: Gibt es ein α sodass V_α die Integrabilitätsbedingungen erfüllt bzw. gibt es ein α sodass V_α ein Potential besitzt?

20. Sei $\phi(x, y, z) = x^3ye^z$ und $V(x, y, z) = (xy, z^2, x)$ Berechnen Sie:

$$\operatorname{div}\,(\nabla\phi), \operatorname{rot}\,(\nabla\phi), \operatorname{div}\,(\operatorname{rot} V), \operatorname{rot}(\phi V), \operatorname{div}(\phi V).$$

21. Berechnen Sie allgemein für ein Skalarfeld ϕ und ein Vektorfeld V:

$$\operatorname{div}\,(\nabla\phi), \operatorname{rot}\,(\nabla\phi), \operatorname{div}\,(\operatorname{rot} V), \operatorname{rot}(\phi V), \operatorname{div}(\phi V).$$

22. Sei $\mathbf{c}$ ein fester Vektor im $\mathbb{R}^3$ bestimmen Sie alle Vektorfelder V auf $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} V = \mathbf{c}$. Das Feld V nennt man dann ein ,,Vektorpotential" von $\mathbf{c}$.

    Anleitung: Finden Sie zunächst *irgendein* Vektorfeld mit $\operatorname{rot} V = \mathbf{c}$. Überlegen Sie sich nun, dass, wenn V' ebenfalls ein Vektorpotential ist, das Feld $V - V'$ die Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

23. Bestimmen Sie die Konstante λ so, dass das Vektorfeld $V_\lambda(x, y) := (\frac{\lambda}{x+y}, \frac{x}{y(x+y)}, 0)$ ein Potentialfeld ist. Geben Sie alle Potentialfunktionen, d.h. alle Funktionen ϕ mit $\nabla\phi = V_\lambda$ an.

24. Bestimmen Sie die Konstante μ so, dass das Vektorfeld $W_\mu(x, y, z) = (1 + \mu x, x, 1)$ quellfrei ist, also $\operatorname{div} W_\mu = 0$ erfüllt. Geben Sie alle Vektorpotentiale an, d.h. alle Vektorfelder P mit $\operatorname{rot} P = W_\mu$.

25. Formulieren und beweisen Sie den Green'schen Satz für achsenparallele Rechtecke im $\mathbb{R}^2$.