6.&7. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB - WS 2011

26. Formulieren Sie den Satz von Stokes und berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_C V ds$ wobei
$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$$
und C der im positiven Sinne durchlaufene Umfang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

27. Gegeben sei eine einfach geschlossene ebene Kurve $(x(t), y(t))$ mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung. Wenden Sie den Satz von Green auf diese Kurve und das Vektorfeld $V(x,y) = (y, -x)$ an. Was fällt ihnen auf?

28. Beweisen Sie die Green'sche Formel
$$\int\int\int_K (\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f\Delta g) d\mathbf{x} = \int\int_{\partial K} f \operatorname{grad} g \; d\mathbf{O}$$
und überlegene Sie sich welche Voraussetzung an die skalaren Felder f und g bzw. an den Bereich $K \subseteq \mathbb{R}^3$ gestellt werden sollten.

29. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich und $F = \partial K$ die Berandung dieses Bereichs. Für eine Funktion $T(\mathbf{x}; t)$ mit $\mathbf{x} \in K$ und $t \geq 0$ nennt man
$$I(t) = \frac{1}{2} \int\int\int_K T^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$
die Energie von T in K zur Zeit t.

Geben Sie geeignete Randbedingungen an, die garantieren, dass für eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$ die Energie in K monoton mit der Zeit fällt. Argumentieren Sie, dass in diesem Fall eine solche Lösung eindeutig ist!

Hinweis: Lektüre des Skriptums und Beispiel 28.

30. Berechnen Sie für das Vektorfeld
$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y^2+1 \\ 2xy \\ z^2+yz \end{pmatrix}$$
und das Ellipsoid E, welches der Gleichung $4z^2 = 9 - (x^2+y^2)$ genügt, das Integral
$$\int\int_{E^+} \operatorname{rot} V \, d\mathbf{O}$$
wobei $E^+ = E \cap \{(x,y,z) : z \geq 0\}$ den „oberen" Teil von E bezeichnet.

31. Es sei F^+ der Schnitt der Ebene $E : x + 2y + 3z = 4$ mit dem ersten Oktanten. Geben Sie die Randkurve C der Fläche F^+ an und berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl das Kurvenintegral $\oint_C V ds$, wobei das Vektorfeld V gegeben ist durch
$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} z(x+y) \\ x+2y \\ y(2z-x) \end{pmatrix}$$

32. Formulieren Sie den Gauß'schen Integralsatz. Betrachten Sie speziell das Vektorfeld $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ sowie K_r, die Kugel mit Radius r und Mittelpunkt o. Geben Sie div$V$ und $\int\int_{\partial K_r} V d\mathbf{O}$ an und stellen Sie so einen Zusammenhang zwischen Kugeloberfläche und Kugelvolumen her!

33. Bestätigen Sie den Gauß'schen Integralsatz am Beispiel der Achtelkugel $A := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}$ und des Vektorfeldes

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ xy \\ xyz \end{pmatrix}$$

34. Gegeben sei das Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sowie das Quader mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, 0, 0)$ und $(0, 0, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 0, 3)$. Bestimmen Sie $\int\int_F V d\mathbf{O}$, wobei F der Rand des Quaders ist

35. Erläutern Sie nochmals ausführlich die unterschiedlichen Voraussetzungen und Aussagen bei den Integralsätzen von Green, Gauß und Stokes.