9.&10. Übungsblatt - Mathematik 3 für MB - WS 2011

41. Transformieren Sie die PDE auf Normalform:

$$u_{XT} = \alpha X + \beta T.$$

42. Bestimmen Sie mit Hilfe von Beispiel 41 und Transformation auf Normalform die Lösung des Anfangswertproblems

$$9u_{tt} = 4u_{xx} + t, \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

43.&44. Gegeben sei die Schwingungsgleichung für $0 \leq x \leq 1$ und $t \geq 0$

$$u_{tt} = u_{xx}$$

mit Randwerten

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \cos \pi x, \quad u_t(x,0) = \cos(2\pi x).$$

Führen Sie den Separationsansatz durch und bestimmen Sie alle Basislösungen der Form $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$. Passen Sie dann an die Anfangswerte an!

45.&46. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung für $0 \leq x \leq \pi$ und $t \geq 0$

$$u_t = u_{xx}$$

mit Randwerten

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin^2 x.$$

Führen Sie den Separationsansatz durch und bestimmen Sie alle Basislösungen der Form $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$. Passen Sie dann an die Anfangswerte an!

47. Gegeben sei die einseitig unbeschränkte Schwingungsgleichung ($x \geq 0$ und $t \geq 0$)

$$u_{tt} = 9u_{xx}$$

mit Randwerten

$$u(0,t) = \sin t$$

und Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass die Laplace-Transformierte (bezüglich t) $\mathcal{L}_t\{u\}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}_t\{u\}(x,s) - \frac{s^2}{9}\mathcal{L}_t\{u\}(x,s) = 0.$$

(b) Geben Sie jene Lösung der Schwingungsgleichung an, welche für $t \geq 0$ beschränkt bleibt. Hinweis; Wenn Sie richtig gerechnet haben ergibt sich für die Transformierte der Lösung $\mathcal{L}_t\{u\}(x,s) = c(s)\, e^{-\frac{s}{3}x}$.

48. Ermittel Sie mit Hilfe der d'Alembert'schen Darstellung die Lösung der beidseitig unbeschränkten Schwingungsgleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 2c\, xe^{-x^2/2}$$

für $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

49. Rechnen Sie nach, dass die Funktion ($c > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$)

$$u(x,t) := \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(r,s)\, dr \right) ds$$

die inhomogene Schwingungsgleichung mit homogener Anfangsbedingung erfüllt, d.h.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Hinweis: Leibniz'sche Regel für Parameterintegrale.

50. Ermitteln Sie die Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$u_{tt} = 4u_{xx} + e^{(x+t)}$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = 4\, xe^{-x^2/2}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.