5. Übung Mathematik 2 für MB/VT/WI – 21.4.2010

41. Die folgende Kegelschnittslinie ist durch eine *Drehung* S (d.h. $\det S = 1$) des Koordinatensystems auf Hauptachsenform zu transformieren: $-3x^2 + 6\sqrt{3}xy + 3y^2 = 1$. Geben Sie die neue Basis (nach der Drehung) an.

42. Die Kegelschnittslinie
$$\frac{35}{19}x^2 - \frac{30}{19}xy + \frac{35}{19}y^2 = c$$
ist durch eine *Drehung* S (d.h. $\det S = 1$) des Koordinatensystems auf Hauptachsenform zu transformieren. Geben Sie die neue Basis (nach der Drehung) an.

43. Sei $f(x, y)$ eine beliebige differenzierbare Funktion und $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ (Polarkoordinaten). Zeigen Sie unter Verwendung der Kettenregel, dass $f_r = f_x \cos\phi + f_y \sin\phi$ und $f_{rr} = f_{xx}\cos^2\phi + 2f_{xy}\cos\phi\sin\phi + f_{yy}\sin^2\phi$.

44. Sei $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$.
    (a) Skizzieren Sie die Höhenschichtlinie $f(x, y) = 0$.
    (b) Skizzieren Sie die Kurve $z = f(\sqrt{\pi}, y)$, d.h. die Schnittkurve des Funktionsgebirges mit der Ebene $x = \sqrt{\pi}$.
    (c) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x, y)$.
    (d) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y)$ im Punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ in eine allgemeine Richung $\boldsymbol{e}$. Was berechnet die Richungsableitung?
    (e) Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt $(a, b) \neq (0, 0)$ in Richtung des Nullpunkts.

45. Sei $f(x, y) = x^2 + 2x^2 + 7xy + 7x - 3y + 4$. Berechnen Sie die Taylorreihe von $f(x, y)$ im Punkt $P = (2, 1)$. Lesen Sie aus dieser Taylorformel die Gleichung für die Tangentialebene im Punkt P ab. Geben Sie den Normalvektor dieser Tangentialebene an. Von welcher Art ist der Punkt P (elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch)?

46. (a) Erklären Sie den Begriff *lokales Extremum.*
    (b) Berechnen Sie (unter Verwendung des Leibniz–Kriteriums für innere Extrema) die lokalen Extrema folgender Funktionen
$$f(x, y) = x^3 - 4y^2 + 2y^3 + 6xy^2, \qquad g(x, y) = y\cos(x/2).$$

47. Finden Sie drei Zahlen x, y und z, deren Summe 54 ist und deren Produkt maximal ist.
(Anleitung: Dieses Beispiel ist direkt, d.h. ohne Lagrange–Multiplikatoren zu lösen. Die Bedingung an die Summe der drei Zahlen erlaubt es eine der Zahlen explizit auszudrücken–Einsetzen dieses Ausdrucks in die zu maximierende Funktion liefert ein Extremalproblem in zwei Variablen.)

48. Sei $f(x, y) = 9 - 3x - 2x^2 + 2y - y^2$. Berechnen Sie alle lokalen Extrema über dem Gebiet beschränkt durch die Geraden $y = 3$, $y = x - 1$ und $y = -x$. Beachten Sie speziell die Randextrema. Welche Ihrer Extrema sind lokale Minima bzw. Maxima?

49. Sei $f(x, y) = \mathrm{e}^{5x+2y}$. Bestimmen Sie mithilfe Lagrange'scher Multiplikatoren die Extrema auf der Ellipse $x^2 + y^2 = 2$. (Hier ist nicht zu überprüfen, ob die berechneten Punkte Minima bzw. Maxima sind.)

50. Berechnen Sie unter Verwendung der Lagrange–Multiplikatoren den minimalen Abstand des Punktes $P = (3, 5)$ zu der Geraden $y = 3x - 4$. (Hier ist nicht zu überprüfen, ob der berechnete Punkt tatsächlich ein Minimum ist.)