Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Beispiel 1

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\
2x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\
3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 5 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 7x_4 & = & -1
\end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Beispiel 1

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ d.h.,} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51 \end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array}\right)$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51 \end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51 \end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

unlösbar!

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel 4

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Beispiel 4

$$\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad\quad + 2x_4 & = -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = 0 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} x_3 = \lambda, \\ x_4 = -1, \\ x_2 = 2 - 2\lambda, \\ x_1 = 1 - 3\lambda \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ 2 - 2\lambda \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTEN

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[]{\substack{z_3 \to z_3 - 2z_2 \\ z_4 \to 3z_4 - 2z_2 \text{ (!)}}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[]{\substack{z_3 \to z_3 - 2z_2 \\ {\color{red} z_4 \to 3z_4 - 2z_2 \ (!)}}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8}{3} = 16$$