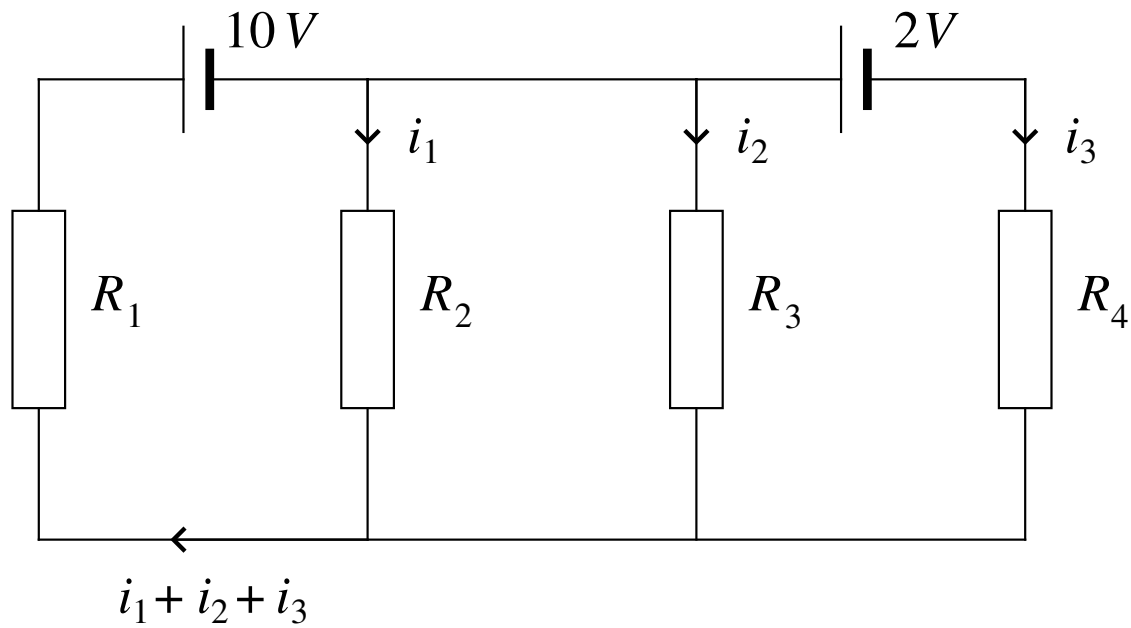
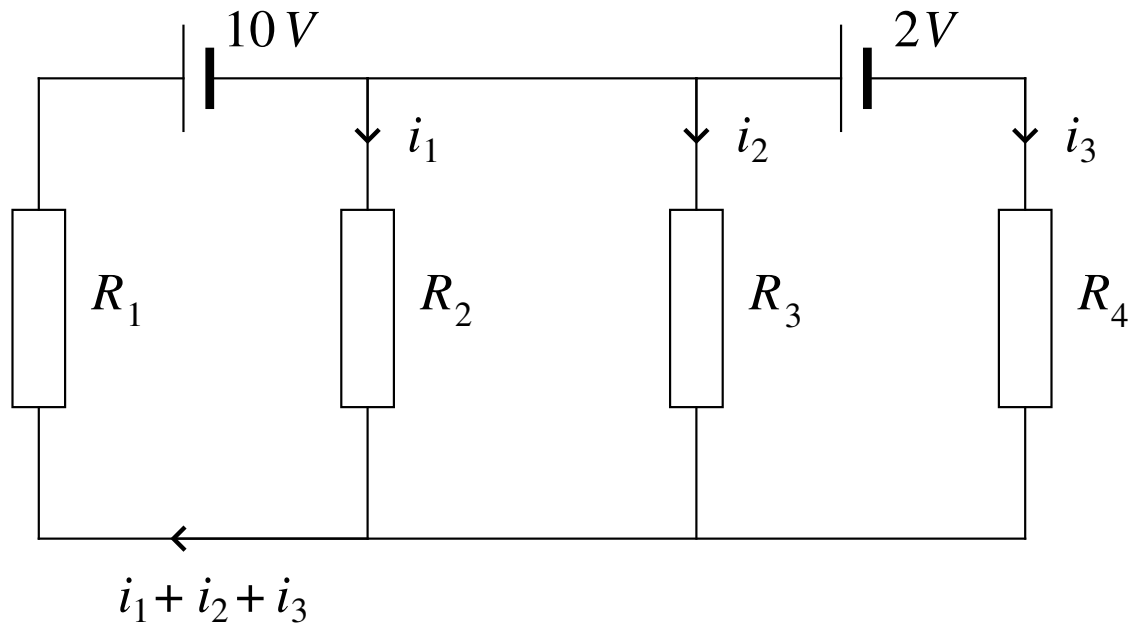


# VEKTOREN UND VEKTORRÄUME

# Beispiel: Elektrische Netzwerke



# Beispiel: Elektrische Netzwerke

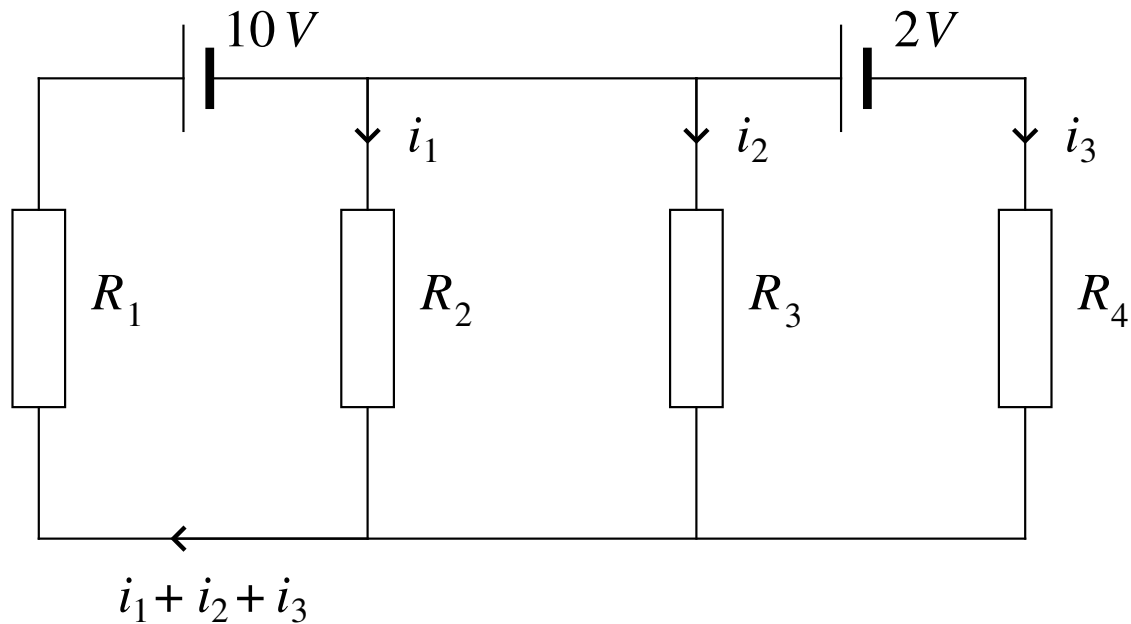


$$R_2 i_1 + R_1 (i_1 + i_2 + i_3) = 10\text{V},$$

$$R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0\text{V},$$

$$R_4 i_3 - R_3 i_2 = 2\text{V}.$$

# Beispiel: Elektrische Netzwerke



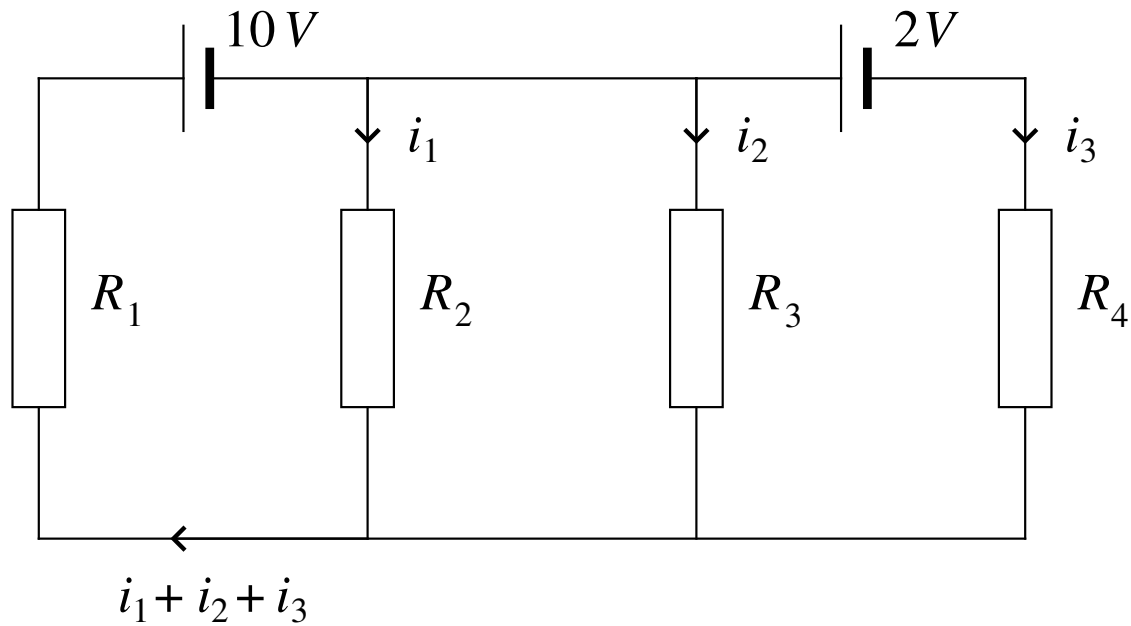
$$R_2 i_1 + R_1 (i_1 + i_2 + i_3) = 10 \text{ V},$$

$$R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0 \text{ V},$$

$$R_4 i_3 - R_3 i_2 = 2 \text{ V}.$$

Konkret  $R_1 = 1.5 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 4 \Omega$  und  $R_4 = 3 \Omega$

# Beispiel: Elektrische Netzwerke

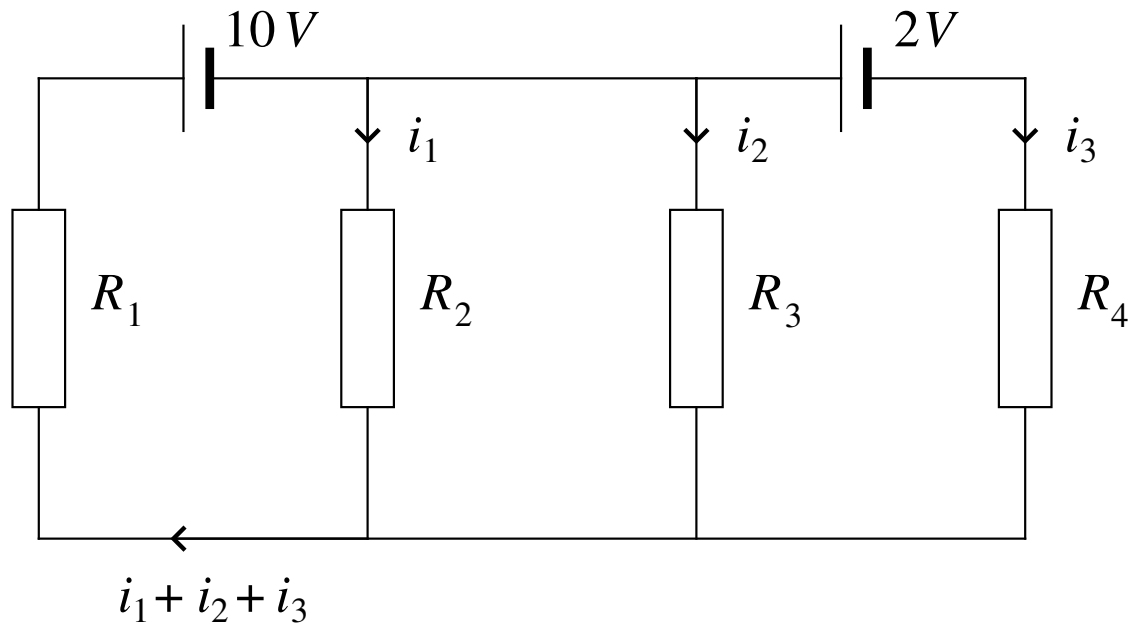


$$5.5 i_1 + 1.5 i_2 + 1.5 i_3 = 10,$$

$$-4 i_1 + 4 i_2 = 0,$$

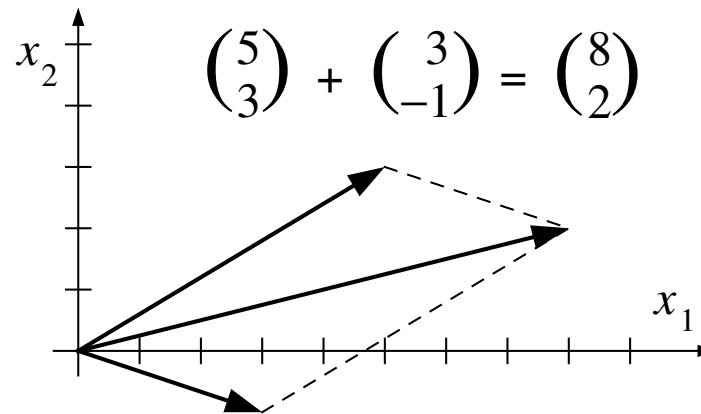
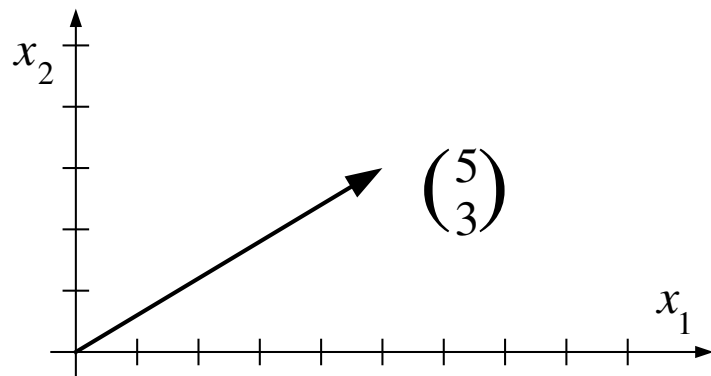
$$-4 i_2 + 3 i_3 = 2.$$

# Beispiel: Elektrische Netzwerke

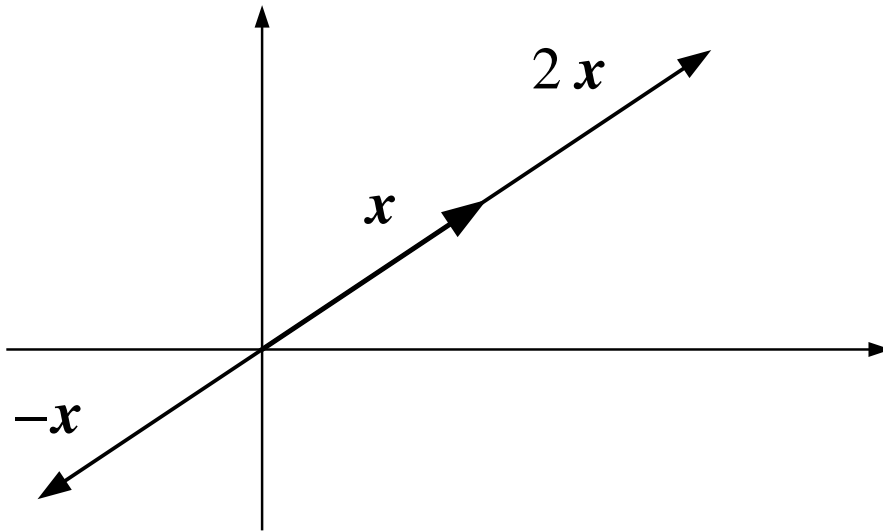
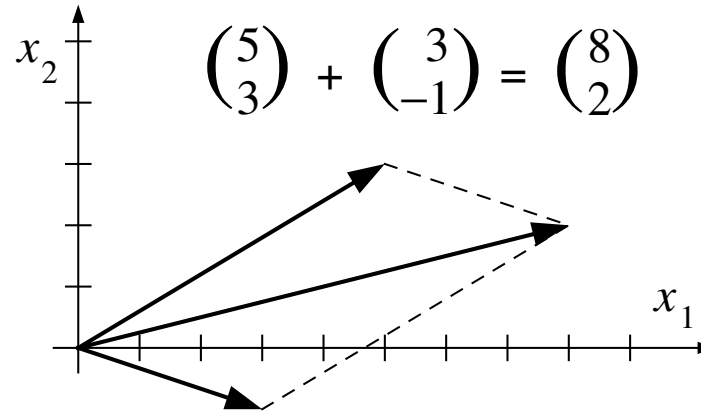
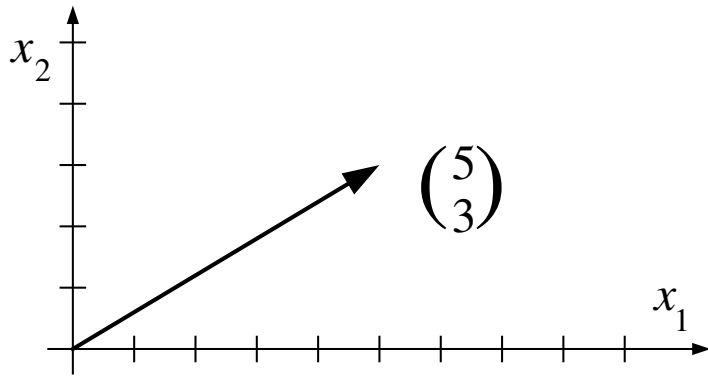


$$\begin{aligned} 5.5 i_1 + 1.5 i_2 + 1.5 i_3 &= 10, \\ -4 i_1 + 4 i_2 &= 0, \\ -4 i_2 + 3 i_3 &= 2. \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 5.5 & 1.5 & 1.5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# Vektoren



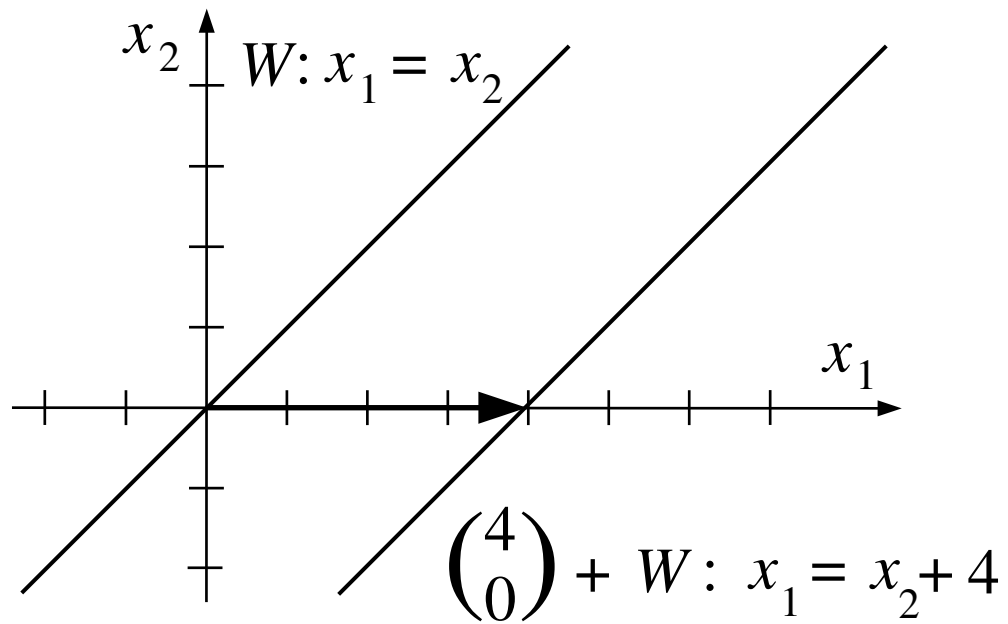
# Vektoren





# Vektoren

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\}$$



# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 = 0,$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0,$$

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 = 0,$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0,$$

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

Es gibt eine nichttriviale Lösung:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$   
 $\implies$  die Vektoren sind linear abhängig.

# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus  $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ , dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ?

# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus  $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ , dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

# Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus  $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ , dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \implies \lambda_1 = 0 \\ \implies \lambda_2 = 0 \\ \implies \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$



**MATRIZEN**

# Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

# Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}^T = (1 \ 5 \ 0) \quad (1 \ 5 \ 0)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Rechnen mit Matrizen

Summe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Vielfache

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 15 & 21 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

# Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

			1	2
			5	7
			0	2
1	5	2		
3	2	1		
0	1	2		

# Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

			1	2
			5	7
			0	2
1	5	2	$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	
3	2	1		
0	1	2		

# Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

		1	2	
		5	7	
		0	2	
1	5	2	$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2$
3	2	1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2$
0	1	2	$0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2$



# Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

		1	2	
		5	7	
		0	2	
1	5	2	$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2$
3	2	1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2$
0	1	2	$0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2$

# Rechnen mit Matrizen

$A, B, C$ : Matrizen,  $\lambda$ : Skalar

$I$ : Einheitsmatrix mit passender Anzahl von Zeilen und Spalten

1.  $A \cdot I = I \cdot A = A$
2.  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3.  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5.  $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$
6.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
7.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
8.  $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

# Bestimmung des Rangs einer Matrix

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

# Bestimmung des Rangs einer Matrix

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	
1	2	3	4	
2	5	-1	2	$\longrightarrow$
-2	-3	-12	-13	$s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1$
2	-1	2	-1	$s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1$
				$s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1$

# Bestimmung des Rangs einer Matrix

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$		$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
1	2	3	4		1	0	0	0
2	5	-1	2	$\longrightarrow$	2	1	-7	-6
-2	-3	-12	-13	$s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1$	-2	1	-6	-5
2	-1	2	-1	$s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1$	2	-5	-4	-9
				$s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1$				

# Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\ s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\ s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_3 \rightarrow s_3 + 7s_2 \\ s_4 \rightarrow s_4 + 6s_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array}$$

# Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\ s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\ s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_3 \rightarrow s_3 + 7s_2 \\ s_4 \rightarrow s_4 + 6s_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_4 \rightarrow s_4 - s_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -39 & 0 \end{array}$$

# Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc}
 s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & 5 & -1 & 2 \\
 -2 & -3 & -12 & -13 \\
 2 & -1 & 2 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\
 s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\
 s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & -7 & -6 \\
 -2 & 1 & -6 & -5 \\
 2 & -5 & -4 & -9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_3 \rightarrow s_3 + 7s_2 \\
 s_4 \rightarrow s_4 + 6s_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 -2 & 1 & 1 & 1 \\
 2 & -5 & -39 & -39
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_4 \rightarrow s_4 - s_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 -2 & 1 & 1 & 0 \\
 2 & -5 & -39 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_1 \rightarrow s_1 - 2s_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -4 & 1 & 1 & 0 \\
 12 & -5 & -39 & 0
 \end{array}$$





# Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1, \quad z_3 \rightarrow 3z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 9 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

# Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1, \quad s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

# Invertieren einer Matrix

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 3 & \\
 2 & 3 & 4 & \\
 3 & 4 & 4 & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\
 s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & \\
 2 & -1 & -2 & \\
 3 & -2 & -5 & \\
 \hline
 1 & -2 & -3 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_3 \rightarrow s_3 - 2s_2 \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & \\
 2 & -1 & 0 & \\
 3 & -2 & -1 & \\
 \hline
 1 & -2 & 1 & \\
 0 & 1 & -2 & \\
 0 & 0 & 1 & \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 s_3 \rightarrow -s_3 \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & \\
 2 & -1 & 0 & \\
 3 & -2 & 1 & \\
 \hline
 1 & -2 & -1 & \\
 0 & 1 & 2 & \\
 0 & 0 & -1 & \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_2 \rightarrow s_2 + 2s_3 \\
 s_1 \rightarrow s_1 - 3s_3 \\
 s_2 \rightarrow -s_2 \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & \\
 2 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 4 & 4 & -1 & \\
 -6 & -5 & 2 & \\
 3 & 2 & -1 & \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_1 \rightarrow s_1 - 2s_2 \\
 \longrightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 -4 & 4 & -1 & \\
 4 & -5 & 2 & \\
 -1 & 2 & -1 & \\
 \end{array}$$