

Skriptum zur Vorlesung
DISKRETE METHODEN

Sommersemester 2024

Bernhard Gittenberger

Vorwort

Die Vorlesung *Diskrete Methoden* ist seit vielen Jahren Pflichtvorlesung des Masterstudiums Mathematische Computerwissenschaften bzw. des früheren Studiengangs C der Technischen Mathematik. Ihr Ziel ist es, *diskrete Strukturen* und *Verfahren* bzw. ihre *theoretischen Grundlagen* vorzustellen. Außerdem wird besonderer Wert auf den *algorithmischen Aspekt* gelegt, um die Verbindung zu Computeranwendungen herzustellen.

Im ersten Kapitel werden *lineare Rekursionen* von verschiedenen Gesichtspunkten her untersucht. Einerseits wird der Zugang über das charakteristische Polynom vorgestellt, andererseits wird auch auf den Differenzoperator und auf erzeugende Funktionen eingegangen.

Im zweiten Kapitel wird kurze eine Einführung in die Theorie der *formalen Potenzreihen* und die *formale Topologie* gegeben.

Ein Kernstück der Vorlesung birgt das dritte Kapitel, in dem ein Zusammenhang zwischen *kombinatorischen Konstruktionen* und *erzeugenden Funktionen* hergestellt wird, der weitreichende Anwendungen hat. Die hier vorgestellten Begriffe treten in den meisten anderen Kapiteln wieder auf.

Im vierten Kapitel wird das Thema des vorigen Kapitels für komplexere Fragestellungen diskutiert, die mit erzeugenden Funktion *in mehreren Variablen* behandelt werden.

Im fünften Kapitel werden *arithmetische Funktionen auf Halbordnungen* und die *Möbiusinversion* behandelt. Dies führt übrigens zu einer weiteren Klasse von erzeugenden Funktionen, nämlich zu *Dirichletschen Reihen*.

Die *Polyasche Abzähltheorie* ist das Thema des sechsten Kapitels und eröffnet einen unerwarteten Zusammenhang zwischen *kombinatorischen Problemen auf Gruppen* und *erzeugenden Funktionen*.

Die im siebenten Kapitel behandelte *Graphentheorie* ist eines der größten Gebiete der *diskreten Mathematik*. Insbesondere wird auf *planare Graphen*, *Bäume und Wälder* sowie Querverbindungen zur linearen Algebra eingegangen.

Dieses Skriptum ist nur ein Skelettskriptum, d.h., Beweise werden nicht ausgeführt. Das Lesen des Skriptums kann daher den Besuch der Vorlesung nicht ersetzen. Es ist dazu gedacht, die Vorlesungsmitschrift zu ergänzen und als *Nachschlagewerk* zu dienen.

Ich möchte mich an dieser Stelle noch bei Herrn Univ.-Prof. Dr. Michael Drmota bedanken, der die Vorlesung vor vielen Jahren gehalten hat. Das Überlassen der Dateien des Skriptums der damaligen Vorlesung hat die Arbeit an diesem Skriptum erheblich reduziert.

Wien, im Februar 2024

Bernhard Gittenberger

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	III
Kapitel 1. Lineare Rekursionen	1
1. Homogene lineare Rekursionen	1
2. Inhomogene lineare Rekursionen	5
3. Erzeugende Funktionen	7
Kapitel 2. Formale Potenzreihen	15
1. Der Ring der formalen Potenzreihen	15
2. Die formale Topologie	17
Kapitel 3. Kombinatorische Konstruktionen und erzeugende Funktionen	19
1. Komplexere kombinatorische Strukturen und erzeugende Funktionen	19
2. Kombinatorische Konstruktionen für unmarkierte Objekte	21
3. Kombinatorische Konstruktionen für markierte Objekte	26
4. Die Lagrangesche Inversionsformel	30
Kapitel 4. Kombinatorische Konstruktionen und erzeugende Funktionen in mehreren Variablen	31
1. Bivariate erzeugende Funktionen	31
2. Multivariate erzeugende Funktionen und Kennzeichen von Substrukturen in kombinatorischen Konstruktionen	33
Kapitel 5. Kombinatorische Probleme auf Halbordnungen	37
1. Halbordnungen	37
2. Arithmetische Funktionen und die Möbiusinversion	40
3. Inklusions-Exklusions-Prinzip	43
4. Die Teilbarkeitsrelation	45
5. Zyklen unmarkierter Objekte	47
6. Arithmetische Funktionen und erzeugende Funktionen	48
7. Verbände	51
Kapitel 6. Pólyasche Abzähltheorie	53
1. Lemma von Burnside	53
2. Zyklenzeiger von Permutationsgruppen	54
3. Satz von Polya	56
4. Weitere kombinatorische Konstruktionen	57
Kapitel 7. Graphentheorie	61
1. Grundlegende Begriffe	61
2. Zusammenhang von Graphen	66
3. Eulersche und Hamiltonsche Linien	73
4. Planare Graphen	74

5. Färbungen und Matchings	77
6. Kreise und Schnitte	79
7. Erzeugende Funktionen von Graphen	81
Literaturverzeichnis	83
Index	85

Lineare Rekursionen

1. Homogene lineare Rekursionen

1.1. Homogene lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten.

DEFINITION 1.1. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ von Elementen $a_n \in \mathbb{C}$ ist Lösung einer **homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $k \geq 1$** , wenn es Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ gibt, sodaß für alle $n \geq k$

$$(1) \quad a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = 0$$

gilt.

Eine Gleichung der Form (1) ist eine **Rekursionsgleichung**. Das **charakteristische Polynom** $\chi(t)$ so einer Rekursionsgleichung ist durch

$$(2) \quad \chi(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + c_2 t^{k-2} + \dots + c_k$$

definiert.

Eine Rekursion des Typs (1) heißt deshalb *linear*, weil die Menge aller Lösungen $(a_n)_{n \geq 0}$ einen linearen Teilraum im Vektorraum aller Folgen bilden.

Offensichtlich ist die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, die Lösung der Rekursionsgleichung (1) ist, eindeutig durch Angabe der **Anfangswerte** a_0, a_1, \dots, a_{k-1} und definiert. Daraus ergibt sich:

SATZ 1.2. Die Lösungsmenge einer homogenen linearen Rekursion k -ter Ordnung bildet einen k -dimensionalen Vektorraum.

BEISPIEL 1.3. Die **Fibonaccizahlen** F_n , $n \geq 0$, sind durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und durch die Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

definiert. Das charakteristische Polynom lautet $\chi(t) = t^2 - t - 1$. Zur Lösung dieser Rekursion kann man den Ansatz $F_n = t^n$ verwenden. Offensichtlich muß dann $t^n - t^{n-1} - t^{n-2} = 0$ gelten. Diese Gleichung wird von den beiden Nullstellen $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ erfüllt. Aufgrund der Vektorraumeigenschaft ist daher auch jede Linearkombination $At_1^n + Bt_2^n$ eine Lösung der Rekursion. A und B kann man sich durch Einsetzen in die Anfangswerte $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ausrechnen und erhält dann

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

1.2. Lineare Rekursionen über \mathbb{C} .

Die bisherigen Resultate lassen sich sofort für lineare Rekursionen anwenden.

DEFINITION 1.4. Gegeben seien die Folgen $(a_n^{(1)})_{n \geq 0}, \dots, (a_n^{(k)})_{n \geq 0}$. Dann sind die Wronski-Determinanten dieser Folgen definiert durch

$$W_\ell = \begin{vmatrix} a_\ell^{(1)} & \cdots & a_\ell^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell+k-1}^{(1)} & \cdots & a_{\ell+k-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

definiert.

SATZ 1.5. Gegeben sei eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten und von der Ordnung k . Weiters seien die Folgen $(a_n^{(1)})_{n \geq 0}, \dots, (a_n^{(k)})_{n \geq 0}$ Lösungen dieser Rekursion. Dann gilt: Falls $W_\ell = 0$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$, dann ist $W_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und die Folgen $(a_n^{(1)})_{n \geq 0}, \dots, (a_n^{(k)})_{n \geq 0}$ sind linear abhängig. Falls $W_\ell \neq 0$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$, dann ist $W_m \neq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und die Folgen $(a_n^{(1)})_{n \geq 0}, \dots, (a_n^{(k)})_{n \geq 0}$ sind linear unabhängig.

Wir haben im obigen Beispiel bereits gesehen, daß α^n eine Lösung einer linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten ist, falls α eine Nullstelle der charakteristischen Polynoms ist. Falls das charakteristische Polynom einer linearen Rekursion k -ter Ordnung k verschiedene Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ hat, so erhält man k verschiedene Lösungen $\alpha_1^n, \dots, \alpha_k^n$. Die zugehörige Wronski-Determinante W_0 ist aber die Vandermonde-Determinante zu den Werten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und daher gilt $W_0 \neq 0$. Wir haben also eine Basis des Lösungsraums gefunden.

Ist α eine ℓ -fache Nullstelle von $\chi(t)$, dann ist es auch eine ℓ -fache Nullstelle von $t^{n-k}\chi(t)$ und daher $(\ell - 1)$ -fache Nullstelle von $t \cdot \frac{d}{dt}(t^{n-k}\chi(t))$. Also ist $n\alpha^n$ ebenfalls eine Lösung der Rekursion. Analog zeigt man, daß auch $n^2\alpha^n, \dots, n^{\ell-1}\alpha^n$ Lösungen der Rekursion sind. Es gilt daher der folgende Satz.

SATZ 1.6. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ (mit $a_n \in \mathbb{C}$) Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $k \geq 1$ mit charakteristischem Polynom $\chi(t)$. Dann läßt sich a_n in der Form

$$(3) \quad a_n = \sum_{j=1}^r P_{j, \lambda_j - 1}(n) q_j^n$$

darstellen, wobei $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen mit den Vielfachheiten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von $\chi(t)$ sind, d.h.

$$(4) \quad \chi(t) = \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j},$$

und $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$, $1 \leq j \leq r$, Polynome vom Grad $\leq \lambda_j - 1$ bezeichnen.

Ist umgekehrt $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge der Form (3) mit verschiedenen $q_j \in \mathbb{C}$ und Polynomen $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\lambda_j - 1$, $1 \leq j \leq r$ so erfüllt $(a_n)_{n \geq 0}$ eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung

$$k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$$

mit charakteristischem Polynom der Form (4).

Kurz gesagt, eine Folge a_n erfüllt genau dann eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten, wenn sie die Form (3) hat.

Satz 1.6 ist Grundlage für die **Ansatzmethode** zur Lösung von homogenen linearen Rekursionen mit konstanten Koeffizienten.

- (1) Bestimmen der Nullstellen q_j (mit Vielfachheiten λ_j) des charakteristischen Polynoms $\chi(t)$.
- (2) Ansetzen der Lösung für a_n mit der Form (3), wobei die $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = k$ Koeffizienten der Polynome $P_{j,\lambda_j-1}(x)$ als *noch unbestimmt* angesetzt werden.
- (3) Durch Einsetzen der Anfangswerte a_0, a_1, \dots, a_{k-1} erhält man ein lineares Gleichungssystem für die (insgesamt k) unbestimmten Koeffizienten der Polynome $P_{j,\lambda_j-1}(x)$.

Sind die Anfangswerte a_0, a_1, \dots, a_{k-1} nicht vorgegeben, so bildet die Form (3) die **allgemeine Lösung** einer homogenen linearen Rekursion mit charakteristischem Polynom (4).

Dadurch, daß Satz 1.6 tatsächlich eine Charakterisierung aller Lösungen homogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten angibt, kann daraus folgende bemerkenswerte Folgerung abgeleitet werden.

SATZ 1.7.

- (i) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom $\chi(t)$. Ist $\mu(t) \in \mathbb{C}(t)$ ein normiertes Polynom, das durch $\chi(t)$ geteilt wird, dann ist $(a_n)_{n \geq 0}$ auch Lösung der homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten, die $\mu(t)$ als charakteristisches Polynom hat.
- (ii) Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ Lösungen homogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischen Polynomen $\chi_1(t)$ und $\chi_2(t)$. Dann ist die Folge $c_n = a_n + b_n$, $n \geq 0$, Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom $\chi(t) = \text{kgV}(\chi_1(t), \chi_2(t))$.

Offensichtlich sind auch Produkte von Lösungen linearer Rekursionen oder arithmetische Teilfolgen (etc.) wieder Lösungen entsprechender linearer Rekursionen.

1.3. Lineare Rekursionen über \mathbb{R} .

Natürlich können reelle Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$, die eine lineare Rekursion mit reellen Koeffizienten erfüllen, wie komplexe Folgen betrachtet werden. Der Nachteil ist, daß bei der Lösung (echt) komplexe Wurzeln q_j des charakteristischen Polynoms auftreten können. Dieser *Nachteil* kann folgendermaßen *umgangen* werden.

SATZ 1.8. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ (mit $a_n \in \mathbb{R}$) Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $k \geq 1$ mit charakteristischem Polynom $\chi(t) \in \mathbb{R}[x]$. Dann läßt sich a_n in der Form

$$(5) \quad a_n = \sum_{j=1}^r P_{j,\lambda_j-1}(n) q_j^n + \sum_{j=r+1}^s (Q_{j,\lambda_j-1}(n) \cos(n \arg(q_j)) |q_j|^n + R_{j,\lambda_j-1}(n) \sin(n \arg(q_j)) |q_j|^n)$$

darstellen, wobei $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{R}$ die verschiedenen reellen Nullstellen mit den Vielfachheiten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von $\chi(t)$ und $q_{r+1}, \bar{q}_{r+1}, \dots, q_{r+s}, \bar{q}_{r+s} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die verschiedenen nichtreellen Nullstellen von $\chi(t)$ mit Vielfachheiten $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}$ sind, d.h.

$$(6) \quad \chi(t) = \left(\prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j} \right) \cdot \left(\prod_{j=r+1}^{r+s} (t - q_j)(t - \bar{q}_j) \right)$$

und $P_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$, $1 \leq j \leq r$, resp. $Q_{j,\lambda_j-1}(x), R_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$, $r+1 \leq j \leq r+s$ Polynome vom Grad $\leq \lambda_j - 1$ bezeichnen.

Ist umgekehrt $(a_n)_{n \geq 0}$ eine reelle Folge der Form (5) mit verschiedenen $q_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq r$ resp. nichtreellen $q_j, \bar{q}_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $r+1 \leq j \leq r+s$ und Polynomen $P_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$, $1 \leq j \leq r$ resp. $Q_{j,\lambda_j-1}(x), R_{j,\lambda_j-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$, $r+1 \leq j \leq r+s$ vom Grad $\lambda_j - 1$, so erfüllt $(a_n)_{n \geq 0}$ eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung

$$k = \lambda_1 + \dots + \lambda_r + 2(\lambda_{r+1} + \dots + \lambda_{r+s})$$

mit charakteristischem Polynom der Form (6).

Offensichtlich führt hier eine analoge **Ansatzmethode** wie im vorigen Abschnitt zum Ziel.

Man beachte, daß natürlich auch im reellen Fall Satz 1.7 uneingeschränkt gilt.

1.4. Der Differenzoperator.

DEFINITION 1.9. Sei \mathcal{F} die Menge aller Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $q \in \mathbb{C}$. Der **Differenzoperator** $\Delta_q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ist durch

$$(7) \quad \Delta_q(a_n)_{n \geq 0} := (a_{n+1} - qa_n)_{n \geq 0}$$

definiert.

Anstelle von Δ_1 wird auch Δ (gewöhnlicher Differenzoperator) geschrieben.

Δ_q wird oft auch in der Form

$$\Delta_q = E - qI$$

dargestellt, wobei $E : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ den Verschiebungsoperator

$$E(a_n)_{n \geq 0} := (a_{n+1})_{n \geq 0}$$

und $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ den identischen Operator bezeichnet.

Offensichtlich kann nun eine (homogene) lineare Rekursion (mit konstanten Koeffizienten)

$$a_{n+k} - c_1 a_{n+k-1} - c_2 a_{n+k-2} - \dots - c_k a_n = 0$$

auch in der Form

$$(E^k - c_1 E^{k-1} - c_2 E^{k-2} - \dots - c_k I)(a_n) = 0$$

oder in der Form

$$\chi(E)(a_n) = 0$$

dargestellt werden, wobei $\chi(t)$ das charakteristische Polynom der zugrundeliegenden linearen Rekursion bezeichnet. (Dabei bedeutet E^k das k -fache Hintereinanderausführen $E \circ E \circ \dots \circ E$.)

Die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms

$$\chi(t) = \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j}$$

impliziert nun eine entsprechende Faktorisierung des Operators

$$(8) \quad \chi(E) = \prod_{j=1}^r (E - q_j I)^{\lambda_j} = \prod_{j=1}^r \Delta_{q_j}^{\lambda_j}$$

Da die Operatoren auf der rechten Seite kommutieren, können alle bisherigen Resultate über homogene lineare Rekursionen können nun auch leicht aus den folgenden Eigenschaften von Δ_q hergeleitet werden.

SATZ 1.10.

- (1) Die Lösungen von $\Delta^m(a_n) = 0$ sind genau die Polynome $a_n = P_{m-1}(n)$ von Grad $\leq m - 1$.
- (2) $\Delta_q^m(a_n)_{n \geq 0} = (q^{n+m} \Delta(q^{-n} a_n))_{n \geq 0}$.
- (3) Die Lösungen von $\Delta_q^m(a_n) = 0$ sind genau die Folgen der Form $a_n = P_{m-1}(n)q^n$ mit einem Polynom $P_{m-1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ von Grad $\leq m - 1$.
- (4) Ist $q \in \mathbb{C}$ Nullstelle mit Vielfachheit $m \geq 1$ eines Polynoms $\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$, so folgt aus $\Delta_q^m(a_n)_{n \geq 0} = 0$ auch $\chi(E)(a_n)_{n \geq 0} = 0$.
- (5) $\chi(E)((a_n^{(1)})_{n \geq 0} + (a_n^{(2)})_{n \geq 0}) = \chi(E)(a_n^{(1)})_{n \geq 0} + \chi(E)(a_n^{(2)})_{n \geq 0}$.

2. Inhomogene lineare Rekursionen

2.1. Partikuläre Lösung.

DEFINITION 1.11. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ von Elementen $a_n \in \mathbb{C}$ ist Lösung einer **inhomogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Ordnung $k \geq 1$** , wenn es Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ und eine Folge $(b_n)_{n \geq 0}$ mit $b_n \in \mathbb{C}$ gibt, sodaß für alle $n \geq k$

$$(9) \quad a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = b_n$$

gilt.

Ein wesentlicher Punkt bei inhomogenen linearen Rekursion ist, daß man nur eine Lösung suchen muß.

SATZ 1.12. Ist $(a_n^{(p)})_{n \geq 0}$ eine Lösung einer inhomogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Form (9) und $(a_n)_{n \geq 0}$ eine beliebige andere Lösung von (9), dann ist die Differenz $a_n^{(h)} := a_n - a_n^{(p)}$, $n \geq 0$, Lösung der entsprechenden homogenen linearen Rekursion

$$a_n^{(h)} + c_1 a_{n-1}^{(h)} + c_2 a_{n-2}^{(h)} + \dots + c_k a_{n-k}^{(h)} = 0.$$

Eine spezielle Lösung $(a_n^{(p)})_{n \geq 0}$ einer inhomogenen linearen Rekursion nennt man auch **partikuläre Lösung**, die Lösung $(a_n^{(h)})_{n \geq 0}$ der entsprechenden homogenen linearen Rekursion **homogene Lösung**.

BEISPIEL 1.13. Die Rekursion $a_n - 2a_{n-1} = -1$ hat z.B. als partikuläre Lösung die konstante Folge $a_n^{(p)} = 1$. Die homogene Lösung ist offensichtlich $a_n^{(h)} = A2^n$. Die allgemeine Lösung hat daher die Form $a_n = A2^n + 1$.

Es ist auch möglich, eine partikuläre Lösung *schrittweise* zu ermitteln.

SATZ 1.14 (Superpositionsprinzip). Sei $a_n^{(1)}$ Lösung der inhomogenen linearen Rekursion

$$a_n^{(1)} + c_1 a_{n-1}^{(1)} + c_2 a_{n-2}^{(1)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(1)} = b_n^{(1)}$$

und $a_n^{(2)}$ Lösung der inhomogenen linearen Rekursion

$$a_n^{(2)} + c_1 a_{n-1}^{(2)} + c_2 a_{n-2}^{(2)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(2)} = b_n^{(2)}$$

mit derselben homogenen Rekursion, dann erfüllt die Linearkombination

$$a_n = x a_n^{(1)} + y a_n^{(2)}$$

die inhomogene lineare Rekursion

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = x b_n^{(1)} + y b_n^{(2)}.$$

2.2. Spezielle inhomogene lineare Rekursionen.

Ein wichtiger Spezialfall inhomogener linearer Rekursionen

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n$$

ist jener, wo b_n eine homogene lineare Rekursion erfüllt, also von der Form (3) ist. Hier gilt die folgende Eigenschaft.

SATZ 1.15. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ Lösung der inhomogener linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten der Ordnung k

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n,$$

wobei $(b_n)_{n \geq 0}$ Lösung einer homogenen linearen Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom $\psi(t)$ ist. Dann erfüllt $(a_n)_{n \geq 0}$ auch eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten mit charakteristischem Polynom

$$\chi(t) \cdot \psi(t),$$

wobei $\chi(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + \cdots + c_k$ das charakteristische Polynom den entsprechenden homogenen Rekursion von $(a_n)_{n \geq 0}$ ist.

Man kann daher in diesem Fall auf verschiedene Arten vorgehen. Kennt man beispielsweise die Anfangswerte a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , so kann man a_n gemäß dem charakteristischen Polynom $\chi(t) \cdot \mu(t)$ ansetzen und erhält durch Einsetzen der Anfangswerte $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_{k+l-1}$ (wobei l den Grad von $\mu(t)$ bezeichnet) die Lösung von a_n . Kennt man allerdings die Anfangswerte nicht, und ist man an der allgemeinen Lösung der inhomogenen linearen Rekursion interessiert, so empfiehlt sich ein strukturierteres Vorgehen, indem man die Sätze 1.12 und 1.14 kombiniert, d.h. man sucht zunächst die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen linearen Rekursion und daraufhin (eventuell schrittweise) eine partikuläre.

SATZ 1.16. Gegeben sei eine inhomogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten der Form

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n,$$

wobei b_n die Form

$$b_n = P_\mu(n) q^n$$

mit $q \in \mathbb{C}$ und $P_\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leq \mu$ bzw. die Form

$$b_n = R_\mu(n) \cos(\varphi n) q^n + S_\mu(n) \sin(\varphi n) q^n$$

mit $q, \varphi \in \mathbb{R}$ und $R_\mu(x), S_\mu(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq \mu$ hat. Weiters sei λ die Vielfachheit von q bzw. $qe^{i\varphi}$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\chi(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + \dots + c_k,$$

d.h. $\lambda = 0$, falls q bzw. $qe^{i\varphi}$ keine Nullstelle von $\chi(t)$ ist, dann gibt es eine partikuläre Lösung $a_n^{(p)}$ der Form

$$a_n^{(p)} = n^\lambda \tilde{P}_\mu(n) q^n$$

bzw. der Form

$$a_n^{(p)} = n^\lambda \left(\tilde{R}_\mu(n) \cos(\varphi n) q^n + \tilde{S}_\mu(n) \sin(\varphi n) q^n \right)$$

mit $\tilde{P}_\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leq \mu$ bzw. mit $\tilde{R}_\mu(x), \tilde{S}_\mu(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq \mu$.

Die Koeffizienten des Polynoms $\tilde{P}_\mu(x)$ bzw. der Polynome $\tilde{R}_\mu(x), \tilde{S}_\mu(x)$ können durch Einsetzen des entsprechenden Ansatzes und darauffolgenden Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

BEISPIEL 1.17. Die inhomogene lineare Rekursion $a_n = a_{n-1} + n$ mit $a_0 = 0$ hat als allgemeine homogene Lösung $a_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A$, da das charakteristische Polynom $\chi(t) = t - 1$ als einzige Nullstelle $q_1 = 1$ mit Vielfachheit $\lambda_1 = 1$ hat.

Die Inhomogenität b_n hat die Form $b_n = n = P_1(n) \cdot 1^n$. Es ist also $\mu = \lambda = 1$. Es gibt daher eine partikuläre Lösung der Form $a_n^{(p)} = n(Bn + C) \cdot 1^n = Bn^2 + Cn$. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Rekursion $a_n^{(p)} = a_{n-1}^{(p)} + n$ erhalte man nach Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für B, C mit der Lösung $B = C = 1/2$.

Die allgemeine Lösung der Rekursion $a_n = a_{n-1} + n$ hat daher die Gestalt $a_n = A + n(n+1)/2$. Wegen $a_0 = 0$ ergibt sich nun $A = 0$ und man erhält schließlich die Lösung $a_n = n(n+1)/2$.

3. Erzeugende Funktionen

3.1. Lineare Rekursionen und erzeugende Funktionen.

Die Potenzreihe

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

wird auch als (**gewöhnliche**) **erzeugende Funktion**¹ (EF) der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ (mit $a_n \in \mathbb{C}$) bezeichnet.

Erzeugende Funktionen sind ein sehr effizientes Hilfsmittel zum Lösen (auch inhomogener) linearer Rekursionen.

SATZ 1.18. Seien $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ mit $c_k \neq 0$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit $b_n \in \mathbb{C}$. Weiters sei $(a_n)_{n \geq 0}$ Lösung der inhomogenen linearen Rekursion

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = b_n.$$

¹Ob diese jetzt als formale Potenzreihe oder als analytische Funktion zu deuten ist, sei an dieser Stelle noch unbedeutend.

Dann ist die erzeugende Funktion von $(a_n)_{n \geq 0}$ durch

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{\sum_{l=0}^{k-1} a_l x^l + c_1 x \sum_{l=0}^{k-2} a_l x^l + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} a_0}{1 + c_1 x + \cdots + c_k x^k} + \frac{\sum_{n \geq k} b_n x^n}{1 - c_1 x - \cdots - c_k x^k}$$

gegeben.

Damit kann man (meist mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und Anwendung der Binomischen Reihe) a_n direkt ablesen.

Es soll daher zunächst das Problem behandelt werden, wie man die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung einer rationalen Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

bestimmen kann. (Dabei bezeichnen $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ Polynome mit $g(0) \neq 0$.)

Erste Grundlage dafür ist die **Partialbruchzerlegung**.

SATZ 1.19. *Es seien $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome mit $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$, und $g(x)$ sei normiert und habe die Zerlegung*

$$g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{\lambda_j},$$

d.h. $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ sind die verschiedenen Nullstellen von $g(x)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deren Vielfachheiten. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $A_{jk} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq \lambda_j$, $1 \leq j \leq r$, mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{A_{jk}}{(x - \alpha_j)^k}.$$

Die Bedingung $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$ ist natürlich keine wesentliche Einschränkung. Im Fall einer allgemeinen rationalen Funktion mit Zähler $f(x)$ und Nenner $g(x) \neq 0$ stellt man mit Hilfe des Divisionsalgorithmus $f(x)$ in der Form

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

wobei $r(x)$ entweder das Nullpolynom ist oder $\text{grad}(r(x)) < \text{grad}(g(x))$ ist. Daher gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)},$$

und man kann die Partialbruchzerlegung auf $r(x)/g(x)$ anwenden.

Die Zerlegung von Satz 1.19 muß für unsere Zwecke noch ein wenig umgeschrieben werden:

KOROLLAR 1.20. *Es seien $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome wie in Satz 1.19 mit der zusätzlichen Voraussetzung $g(0) \neq 0$. Weiters bezeichnen $q_j = 1/\alpha_j$, $1 \leq j \leq r$, die Reziprokwerte der Nullstellen von $g(x)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $B_{jk} \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq \lambda_j$, $1 \leq j \leq r$, mit*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{B_{jk}}{(1 - q_j x)^k}.$$

Um schließlich die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung von $f(x)/g(x)$ ablesen zu können, benützt man noch die **Binomische Reihe**.

SATZ 1.21. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

wobei $\binom{\alpha}{n}$ den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

bezeichnet. ($\binom{\alpha}{0} = 1$)

KOROLLAR 1.22. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $q \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\frac{1}{(1-qx)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} q^n x^n.$$

Man beachte, daß $\binom{n+k-1}{k-1}$ ein Polynom in n vom Grad $k-1$ ist.

Zusammengefaßt ergibt sich folgende Charakterisierung der Koeffizienten rationaler Funktionen.

SATZ 1.23. Es seien $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ zwei Polynome mit $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$ und $g(0) \neq 0$. Weiters sei $g(x)$ normiert und habe die Zerlegung

$$g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{\lambda_j},$$

d.h. $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind die verschiedenen Nullstellen von $g(x)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deren Vielfachheiten. Dann gibt es Polynome $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leq \lambda_j - 1$, sodaß die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung von

$$(10) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

durch

$$(11) \quad a_n = \sum_{j=1}^r P_{j, \lambda_j - 1}(n) \alpha_j^{-n}$$

gegeben sind.

Ist umgekehrt $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge der Form (11) mit Polynomen $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\lambda_j - 1$, $1 \leq j \leq r$, und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und sei $g(x)$ durch $g(x) = \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j)^{\lambda_j} \in \mathbb{C}[x]$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$, sodaß (10) erfüllt ist, d.h. die Potenzreihe mit a_n als Koeffizienten ist eine rationale Funktion mit Nenner $g(x)$.

BEISPIEL 1.24. Es bezeichnen wieder F_n die Fibonaccizahlen, die durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (für $n \geq 2$) definiert sind. Multipliziert man die Rekursionsgleichung mit x^n und summiert über alle $n \geq 2$ auf, so erhält man zunächst

$$\sum_{n \geq 2} F_n x^n = \sum_{n \geq 2} F_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2} x^n.$$

Bezeichnet mit $F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$ die erzeugende Funktion der Fibonaccizahlen, so ist dies nichts anderes als

$$F(x) - x = xF(x) + x^2F(x),$$

woraus man sofort

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

berechnen kann. Nach kurzer Rechnung erhält man die (modifizierte) Partialbruchzerlegung

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x},$$

woraus sich sofort die explizite Darstellung der Fibonaccizahlen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ergibt.

Vergleicht man die Sätze 1.6 und 1.23, so gewinnt man eine weitere Charakterisierung von Folgen, die eine lineare Rekursion erfüllen.

SATZ 1.25. *Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen a_n . Dann sind die drei folgenden Bedingungen äquivalent.*

- (i) *Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ erfüllt eine homogene lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten.*
- (ii) *Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ hat die Form*

$$a_n = \sum_{j=1}^r P_{j, \lambda_j - 1}(n) q_j^n$$

- mit $q_j \in \mathbb{C}$ und Polynomen $P_{j, \lambda_j - 1}(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\lambda_j - 1$, $1 \leq j \leq r$.*
- (iii) *Die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist eine rationale Funktion $f(x)/g(x)$ mit $\text{grad}(f(x)) < \text{grad}(g(x))$ und $g(0) \neq 0$.*

Weiters bestimmt sich das charakteristische Polynom $\chi(t) \in \mathbb{C}[t]$ (von der linearen Rekursion aus (i)) durch $\chi(t) = \prod_{j=1}^r (t - q_j)^{\lambda_j}$ (aus den Größen aus (ii)) bzw. durch $\chi(t) = t^d g(\frac{1}{t})/g(0)$ (mit den Nennerpolynom $g(x)$ aus (iii), wobei angenommen wird, daß $g(x)$ Grad d hat).

3.2. Manipulationen von Folgen und deren erzeugender Funktionen.

Seien $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ zwei Folgen und $A(x)$ und $B(x)$ deren erzeugende Funktionen. Dann können bestimmte Manipulationen der Folgen einfach in entsprechende Manipulationen der erzeugenden Funktionen übersetzt werden. Einige davon sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

Folge	erzeugende Funktion
$(a_n + b_n)_{n \geq 0}$	$A(x) + B(x)$
$(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k})_{n \geq 0}$	$A(x)B(x)$
$(\sum_{k=0}^n a_k)_{n \geq 0}$	$\frac{1}{1-x}A(x)$
$(\gamma^n a_n)_{n \geq 0}$	$A(\gamma x)$
$(a_{n+1})_{n \geq 0}$	$\frac{A(x) - a_0}{x}$
$((n+1)a_{n+1})_{n \geq 0}$	$A'(x)$
$(na_n)_{n \geq 0}$	$xA'(x)$
$(n^2 a_n)_{n \geq 0}$	$xA'(x) + x^2 A''(x)$
$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$	$\frac{A(x) + A(-x)}{2}$
$(0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots)$	$\frac{A(x) - A(-x)}{2}$

Einige wichtige (Grund-) Reihenentwicklungen sind die folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n \geq 0} x^n, \\ (1+x)^\alpha &= \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \\ \frac{1}{(1-x)^m} &= \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n, \\ e^x &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n, \\ \log(1+x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Reihenentwicklungen und der obigen Eigenschaften lassen sich viele für die Anwendungen wichtige erzeugende Funktionen ableiten.

BEISPIEL 1.26. Die EF der Folge $a_n = n^2$ ist

$$A(x) = x \left(x \left(\frac{1}{1-x} \right)' \right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

und die der Folge $b_n = 2^n$

$$B(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

Die Folge

$$c_n = \begin{cases} n^2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 2^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat daher die EF

$$C(x) = \frac{A(x) + A(-x)}{2} + \frac{B(x) - B(-x)}{2} = \frac{x(x+1)}{2(1-x)^3} + \frac{x(x-1)}{2(1+x)^3} + \frac{1}{2(1-2x)} - \frac{1}{2(1+2x)}.$$

In den Anwendungen ist es aber auch oft notwendig, aus einer gegebenen (oder ermittelten) EF (bzw. EEF) die Koeffizienten abzulesen, bzw. die dazugehörige Folge a_n zurückzugewinnen.

Ist $A(x)$ die EF einer Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, so soll die Notation

$$[x^n]A(x) = a_n$$

diesen *Ablesevorgang* darstellen, d.h. $[x^n]A(x)$ bezeichnet den Koeffizienten von x^n in $A(x)$.

Die Nützlichkeit dieser Notation sei im folgenden Beispiel illustriert.

BEISPIEL 1.27. Es soll ein geschlossener Ausdruck für die Summe $a_n = \sum_{k=0}^n k^2$ bestimmt werden.

Die EF der gesuchten Folge ist

$$A(x) = \frac{1}{1-x} x \left(x \left(\frac{1}{1-x} \right)' \right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4}.$$

Daher bestimmt sich a_n zu

$$\begin{aligned} a_n &= [x^n] \frac{x(x+1)}{(1-x)^4} = [x^n] \frac{x^2+x}{(1-x)^4} \\ &= [x^{n-2}] \frac{1}{(1-x)^4} + [x^{n-1}] \frac{1}{(1-x)^4} \\ &= \binom{n-2+3}{3} + \binom{n-1+3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Erzeugende Funktionen können auch zur Vereinfachung von Ausdrücken eingesetzt werden.

BEISPIEL 1.28. Gesucht ist ein geschlossener Ausdruck für

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k}.$$

Die EF dieser Folge ist

$$A(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{n} x^n = \frac{1}{1-x} \frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{(1-x)^{m+2}}.$$

Daraus erhält man direkt

$$a_n = \binom{m+n+1}{n}.$$

3.3. Potenzreihen als Funktionen.

Erzeugende Funktionen können natürlich auch als *Funktionen* im herkömmlichen Sinn verstanden werden, wenn der Konvergenzradius R positiv ist.

SATZ 1.29. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}.$$

Ist $R > 0$, dann konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ absolut und stellt eine analytische Funktion $A(x)$ dar.

Ist umgekehrt $A(x)$ eine (analytische) Funktion, die durch eine Potenzreihe $\sum a_n x^n$ (für $|x| < R$) dargestellt wird, so kann die Folge a_n aus den Ableitungen von $A(x)$ an der Stelle $x = 0$ bestimmt werden:

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Erzeugende Funktionen verschiedener Folgen stellen daher verschiedene (analytische) Funktionen dar. Es ist daher im konvergenten Fall möglich, sich von den formalen Potenzreihen *zu trennen* und nur analytische Funktionen zu betrachten. Damit können viele Methoden der reellen und komplexen Analysis zur Behandlung erzeugender Funktionen eingesetzt werden, z.B. wenn man an asymptotischen Eigenschaften interessiert ist.

Formale Potenzreihen

1. Der Ring der formalen Potenzreihen

DEFINITION 2.1. Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring mit Einselement. Der Ring der **formalen Potenzreihen** $R[[x]]$ besteht aus allen formalen Summen der Form

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

wobei die Koeffizienten $a_n \in R$.

Die **Summe** zweier formaler Potenzreihen $\sum_{n \geq 0} a_n x^n, \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ wird durch

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

und ihr **Produkt** durch

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n x^n := \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

definiert.

Wie im vorigen Kapitel können auch hier die Potenzreihen als alternative Darstellungen ihrer Koeffizientenfolgen gesehen werden. Die Potenzreihennotation $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ hat gegenüber der Folgennotation $(a_n)_{n \geq 0}$ den Vorteil, daß Summe und Produkt in *natürlicher Weise* dem Zusammenfassen der Koeffizienten der Potenzen von x entsprechen, wie man dies bei Polynomen bzw. bei analytischen Potenzreihen gewöhnt ist. Die *Unbestimmte* x hat dabei keine konkrete Bedeutung. Gelegentlich wird als Abkürzung auch die *Funktionsschreibweise* $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ verwendet werden.

Weiters wird die Notation im vorigen Kapitel eingeführte Notation $[x^n]A(x) = a_n$ zum Ablesen des n -ten Koeffizienten der Potenzreihe $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ benützt. Der Operator

$$[x^n] : R[[x]] \rightarrow R$$

$$\sum_{\ell \geq 0} a_\ell x^\ell \mapsto a_n$$

ist ein linearer Operator.

Die (formalen) Polynome $R[x]$ bilden einen Unterring von $R[[x]]$. Man beachte, daß die Einheitengruppen¹ $R[x]^*$ des Polynomrings $R[x]$ nur aus den konstanten Polynomen a_0 mit Einheiten $a_0 \in R^*$ besteht, d.h. $R[x]^* = R^*$. Bei formalen Potenzreihen gibt es viel mehr invertierbare Elemente.

¹Die Einheitengruppe R^* eines Rings (mit Einselement) besteht aus allen Elementen aus R , die ein multiplikatives Inverses besitzen.

SATZ 2.2. Die Einheitengruppe $R[[x]]^*$ des Rings der formalen Potenzreihen (über einem Ring mit Einselement) besteht aus allen formalen Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit einer Einheit $a_0 \in R^*$.

BEISPIEL 2.3. Die formale Potenzreihe $1 - x$ hat als Kehrwert (= Inverses)

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Weiters folgt mittels vollständiger Induktion für alle ganzen $m \geq 1$

$$(1 - x)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{n + m - 1}{m - 1} x^n.$$

Für formale Potenzreihen gibt es noch eine weitere Verknüpfung.

DEFINITION 2.4. Sei R ein Ring mit Einselement und $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in R[[x]]$ zwei formale Potenzreihen mit $b_0 = 0$. Dann bezeichnet man als die **Komposition** $A(B(x))$ die formale Potenzreihe

$$A(B(x)) = a_0 + a_1 B(x) + a_2 B(x)^2 + a_3 B(x)^3 + \dots$$

Man beachte, daß die Einschränkung $b_0 = 0$ notwendig ist, damit $A(B(x))$ sinnvoll in dieser Allgemeinheit definiert werden kann. Weiters ist die Potenzreihe $I(x) = x$ das neutrale Element der Komposition.

Eine formale Potenzreihe $A(x) \in R[[x]]$ heißt **invertierbar bezüglich Komposition**, wenn es eine formale Potenzreihe $C(x) \in R[[x]]$ mit

$$A(C(x)) = x \quad \text{und} \quad C(A(x)) = x$$

gibt. Die Potenzreihe $C(x)$ ist das Inverse bezüglich der Komposition und wird im folgenden durch $C(x) = A^{[-1]}(x)$ bezeichnet.

Ist R ein Körper, dann können die invertierbaren Potenzreihen charakterisiert werden.

SATZ 2.5. Sei R ein Körper. Dann sind genau die Potenzreihen $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in R[[x]]$ mit $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ bezüglich der Komposition invertierbar.

Dieser Satz ist eine formale Version des **Hauptsatzes für implizite Funktionen**.

BEISPIEL 2.6. Die inverse Potenzreihe von

$$A(x) = e^x - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} x^n$$

ist die Potenzreihe

$$C(x) = \log(1 + x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

DEFINITION 2.7. Sei R ein Ring mit Einselement und $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in R[[x]]$ eine formale Potenzreihe. Dann bezeichnet man als **formale Ableitung** $a'(x)$ die formale Potenzreihe

$$a'(x) = \sum_{n \geq 0} (n + 1) a_{n+1} x^n.$$

Anstelle von $a'(x)$ verwendet man auch die Notation $DA(x)$, wobei D als Differentiationsoperator bezeichnet wird.

Die formale Ableitung hat natürlich dieselben Eigenschaften wie die gewöhnliche Differentiation.

SATZ 2.8. *Sei R ein Ring mit Einselement. Dann gelten für formale Potenzreihen $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in R[[x]]$ die folgenden Eigenschaften.*

- (i) $(A(x) + B(x))' = A'(x) + B'(x)$.
- (ii) $(cA(x))' = cA'(x), \quad (c \in R)$.
- (iii) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$.
- (iv) $(A(B(x)))' = A'(B(x))B'(x)$, falls R zusätzlich kommutativ ist.

Weiters kann mit Hilfe der Ableitung das *Ablesen* der Koeffizienten neu formalisiert werden, sobald man den (konstanten) Koeffizienten a_0 ablesen kann. Für eine Potenzreihe $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \in R[[x]]$ bedeute die Notation

$$A(x)|_{x=0} = a_0$$

das *Auswerten* an der Stelle $x = 0$, bzw. den (konstanten) Koeffizienten a_0 .

SATZ 2.9. *Sei R ein Körper der Charakteristik 0 und $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in R[[x]]$ eine formale Potenzreihe. Dann gilt für alle $n \geq 0$*

$$a_n = \frac{1}{n!} (D^n A(x))|_{x=0}$$

bzw.

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(D^n A(x))|_{x=0}}{n!} x^n.$$

2. Die formale Topologie

Wir wollen im folgenden auch Grenzwerte in $R[[x]]$ betrachten. Dazu muß $R[[x]]$ zunächst mit einer Topologie ausgestattet werden, der sogenannten formalen Topologie. Die formale Topologie ist die durch die im folgenden beschriebene Metrik induzierte Topologie: Seien $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ und $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ zwei formale Potenzreihe über R . Weiters sei die Bewertung einer Potenzreihe durch die Funktion $v : R[[x]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $v(0) = \infty$ und $v(A(x)) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$ (falls $A(x) \neq 0$) definiert. Der Abstand zwischen zwei formalen Potenzreihen ist dann definiert durch

$$d(A(x), B(x)) = 2^{-v(A(x)-B(x))}$$

Wenn $d(A(x), B(x)) < \varepsilon$, dann gilt $v(A(x) - B(x)) > -\log_2 \varepsilon$. Letztere Ungleichung besagt aber genau, daß $[x^k]A(x) = [x^k]B(x)$ für alle $k \leq -\log_2 \varepsilon$. Kleines ε bedeutet daher, daß die Bewertung der Differenz der beiden formalen Potenzreihen groß sein muß. Folglich können sich die beiden Potenzreihen erst in den Termen hoher Ordnung unterscheiden.

Betrachten wir eine Cauchyfolge $(A_n(x))_{n \geq 0}$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, sodaß für alle $n, m \geq N$ gilt: $d(A_n(x), A_m(x)) < \varepsilon$. Fixiert man eine natürliche Zahl k und wählt dann ein $\varepsilon > 0$ sodaß $-\log_2 \varepsilon > k$, dann stimmen alle Koeffizienten $[x^k]A_n$ mit $n \geq N(\varepsilon) =: n_k$ überein. Sei nun $a_k := [x^k]A_{n_k}(x)$ und $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$. Offensichtlich gilt dann $d(A_n(x), A(x)) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, d.h. $A(x)$ ist der Grenzwert der Folge $(A_n(x))_{n \geq 0}$ im Sinne der formalen Konvergenz. Somit gilt

SATZ 2.10. *Der durch die Menge $R[[x]]$ mit der formalen Topologie bestimmte metrische Raum ist vollständig.*

Weiters gilt:

SATZ 2.11. *Eine Reihe mit Gliedern aus $R[[x]]$, also eine Reihe der Form $\sum_{n \geq 0} A_n(x)$, ist genau dann konvergent im Sinne der formalen Konvergenz, wenn die Folge der Summanden, $(A_n(x))_{n \geq 0}$, eine Nullfolge (im Sinne der formalen Konvergenz) ist.*

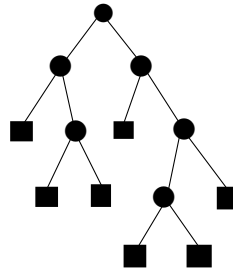
Eine geometrische Reihe $\sum_{n \geq 0} A(x)^n$ mit $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ ist genau dann konvergent, wenn $A(x)^n$ gegen 0 konvergiert. Dies ist äquivalent zu $a_0 = 0$.

Kombinatorische Konstruktionen und erzeugende Funktionen

1. Komplexere kombinatorische Strukturen und erzeugende Funktionen

1.1. Binärbäume.

Unter (ebenen) **Binärbaumen** sind Wurzelbäume, in denen von einem Knoten entweder gar nicht weiterverzweigt wird, oder es gibt genau zwei weiterführende Zweige. (Siehe das Beispiel auf der nächsten Seite:)



Daraus ergeben sich zwei Knotenklassen, die der **externen Knoten** (\square), von denen eben nicht weiterverzweigt wird, und die der **internen Knoten** (\circ), von denen aus genau zwei Zweige ausgehen. Zwischen den Anzahlen dieser Knoten besteht ein einfacher Zusammenhang.

LEMMA 3.1. *In einem Binärbaum mit n internen Knoten gibt es genau $n + 1$ externe Knoten, also insgesamt $2n + 1$ Knoten.*

Die Binärbäume können auch als (unmarkierte) kombinatorische Struktur B aufgefaßt werden, wobei z.B. als Größe die Anzahl der internen Knoten genommen werden kann. Wie bei den ebenen Wurzelbäumen erlaubt der rekursive Aufbau

$$B = \square + \{\circ\} \times B \times B$$

eine Bestimmung der EF und die Lösung des kombinatorischen Problems.

Sei a_n die Anzahl der Binärbäume mit n internen Knoten. Dann erfüllt a_n die nichtlineare Rekursion

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

und $a_1 = 1$.

SATZ 3.2. *Die EF $A(x)$ der Anzahlen a_n Binärbäume B erfüllt die Beziehung*

$$b(x) = 1 + xb(x)^2.$$

Sie hat daher die Form

$$b(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

und die Anzahl b_n der Binärbäume mit n internen Knoten entspricht genau den Catalanzahlen

$$b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Die Catalanzahlen treten in vielen kombinatorischen Problemen auf.

BEISPIEL 3.3. Die Anzahl a_n der verschiedenen Möglichkeiten, ein konvexes n -Eck in Dreiecke zu zerlegen (wobei nur die n Seiten des n -Ecks und die Diagonalen als Seiten erlaubt sind), erfüllt die Rekursion

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n+1-k}$$

(mit $a_2 = 1$) und sind daher durch

$$a_n = c_{n+2}$$

gegeben.

1.2. Kombinatorische Strukturen und erzeugende Funktionen.

Erzeugende Funktionen erweisen sich insbesondere bei kombinatorischen Abzählproblemen als nützlich.

DEFINITION 3.4. Ein **kombinatorische Struktur** ist ein Paar (C, w) aus einer höchstens abzählbaren Menge C und einer Funktion $w : C \rightarrow \mathbb{N}$, sodaß alle Mengen

$$w^{-1}(\{n\}) = \{c \in C \mid w(c) = n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

endlich sind. Das **kombinatorische Abzählproblem** besteht nun darin, die Anzahlen

$$c_n := |w^{-1}(\{n\})|$$

zu bestimmen.

Ein Element $c \in C$ wird auch **kombinatorisches Objekt** und $w(c)$ die **Größe** von c bezeichnet. Man schreibt anstelle von $w(c)$ auch nur $|c|$.

Zwei kompliziertere Strukturen A und B heißen **isomorph** ($A \cong B$), wenn $a_n = b_n$ gilt.

BEISPIEL 3.5. Sei A eine endliche Menge. Dann ist die Potenzmenge $C = P(A)$ mit der Mächtigkeit eine kombinatorische Struktur. Das kombinatorische Abzählproblem wird durch

$$c_n = \binom{|A|}{n}$$

gelöst.

BEISPIEL 3.6. Sei C die Menge aller markierten (endlicher) Bäume, und w bezeichne die Anzahl der Knoten. Dann ist $c_n = n^{n-2}$ (wie später gezeigt werden wird) die Lösung des kombinatorischen Abzählproblems, d.h. es gibt genau n^{n-2} verschiedene markierte Bäume mit n Knoten.

Das erste Beispiel stellt eine sogenannte **unmarkierte** (oder **ungeordnete**) kombinatorische Struktur dar, hingegen das zweite eine **markierte** (oder **geordnete**) kombinatorische Struktur.

Markierte kombinatorische Strukturen C haben die Eigenschaft, daß ein Objekt $c \in C$ der Größe $|c| = n$ untrennbar mit einer Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$ verknüpft ist (d.h. c hat n Teilobjekte, die in einer speziellen Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$ markiert sind).

In vielen Fällen gibt es zu jedem markierten Objekt $c \in C$ der Größe $|c| = n$ weitere $n! - 1$ Objekte in C , die sich nur dadurch von c unterscheiden, daß die Zahlen $1, 2, \dots, n$ anders permutiert sind (d.h. daß die n Teilobjekte anders markiert sind.)

Kombinatorischen Strukturen können in natürlicher Weise erzeugende Funktionen zugeordnet werden.

DEFINITION 3.7. Sei (C, w) eine kombinatorische Struktur. Dann bezeichnet die Potenzreihe

$$C(x) = \sum_{c \in C} x^{w(c)} = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$$

die **gewöhnliche erzeugende Funktion (EF)** von (C, w) und

$$\hat{C}(x) = \sum_{c \in C} \frac{x^{w(c)}}{w(c)!} = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}$$

die **exponentielle erzeugende Funktion (EEF)** von (C, w) .

Die vorige Bemerkung legt bereits nahe, daß gewöhnliche erzeugende Funktionen eher für unmarkierte Objekte Verwendung finden werden und exponentielle erzeugende Funktionen für markierte Objekte.

Ein wesentlicher Grund der Verwendung erzeugender Funktionen bei kombinatorischen Strukturen ist, daß sich viele **kombinatorischen Konstruktionen** in die Sprache der erzeugenden Funktionen übersetzen lassen und somit kompliziertere kombinatorische Abzählprobleme mit Hilfe erzeugender Funktionen strukturiert und leichter lösbar werden.

2. Kombinatorische Konstruktionen für unmarkierte Objekte

2.1. Einfache Konstruktionen.

Zunächst werden einige einfache kombinatorische Konstruktionen vorgestellt.

DEFINITION 3.8. Im folgenden bezeichnen A, B, C unmarkierte kombinatorische Strukturen.

- (1) Sind A und B disjunkt, so bezeichnet $C = A + B = A \cup B$ die **Summe** (bzw. Vereinigung) von A und B . Die Größenfunktion bleibt unverändert.
- (2) Das kartesische Produkt $C = A \times B$ ist das **Produkt** von A und B . Die Größe einer Paares $c = (a, b) \in C$ wird durch $|c| = |a| + |b|$ berechnet.
- (3) Besitzt A kein Objekt der Größe 0 und sind die Mengen $A, A \times A, A \times A \times A, \dots$ paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit

$$C = A^* := \{\epsilon\} + A + A \times A + A \times A \times A + \dots$$

die **Folgen** von Objekten aus A .

- (4) Die Elemente der Menge aller endlichen Teilmengen $C = \mathcal{S}(A)$ werden als **Mengen** von Objekten aus A bezeichnet. Die Größe einer Teilmenge $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ bestimmt sich durch $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_k|$.
- (5) Die Elemente der Menge aller endlichen Multimengen $C = \mathcal{M}(A)$ werden als **Multimengen** von Objekten aus A bezeichnet. Die Größe einer Multimenge $\{a_1^{j_1}, a_2^{j_2}, \dots, a_k^{j_k}\}$ bestimmt sich durch $j_1|a_1| + j_2|a_2| + \dots + j_k|a_k|$. Diese Struktur kann auch als Faktorstruktur A^*/\sim aufgefaßt werden, wenn \sim die Äquivalenzrelation bezeichnet, die zwei Elemente aus A^* genau dann miteinander identifiziert, wenn sie sich nur durch die Reihenfolge der Einträge unterscheiden.

- (6) Die Menge aller Zyklen $C = \mathcal{Z}(A)$ von Objekten aus A ist A^*/\approx , wobei \approx jene Relation ist, die je zwei Elemente aus A^* , die sich nur durch zyklische Vertauschung der Einträge unterscheiden, in Relation setzt.
- (7) Die **Komposition** $C = A(B)$ von A und B (wobei B kein Objekt der Größe 0 besitzt) ist durch

$$C = A_0 + A_1 \times B + A_2 \times B \times B + \dots$$

definiert, wobei $A_n = \{a \in A \mid |a| = n\}$ bezeichnet. Dabei ist die Größe eines Element $(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ aus $A_n \times B \times B \times \dots \times B$ durch $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$ bestimmt.

- (8) **Auszeichnen** in kombinatorischen Objekten: Sei A eine kombinatorische Struktur, deren Objekte aus Objekten der Größe 1 (Atome) zusammengesetzt sind. Die Struktur ΘA bezeichnet all jene Objekte, in denen ein Atom ausgezeichnet ist. Eine formale Realisierung ist

$$C = A_1 + A_1 \times \{\varepsilon_1\} + A_2 \times \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} + A_3 \times \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} + \dots$$

Alle hier angegebenen kombinatorischen Konstruktionen haben eine Entsprechung bei den erzeugenden Funktionen.

SATZ 3.9. Für unmarkierte kombinatorische Strukturen A, B, C gelten die folgenden Beziehungen für die entsprechenden erzeugenden Funktionen $A(x), B(x), C(x)$:

$C = A + B$	$C(x) = A(x) + B(x)$
$C = A \times B$	$C(x) = A(x)B(x)$
$C = A^*$	$C(x) = \frac{1}{1-A(x)}$
$C = \mathcal{S}(A)$	$C(x) = e^{A(x) - \frac{1}{2}A(x^2) + \frac{1}{3}A(x^3) - \dots}$
$C = \mathcal{M}(A)$	$C(x) = e^{A(x) + \frac{1}{2}A(x^2) + \frac{1}{3}A(x^3) + \dots}$
$C = \mathcal{Z}(A)$	$C(x) = \dots$
$C = A(B)$	$C(x) = A(B(x))$
$C = \Theta A$	$C(x) = xA'(x)$

BEISPIEL 3.10. Die **Kombinationen ohne Wiederholung** der Elemente a_1, a_2, \dots, a_n können durch die kombinatorische Struktur

$$C = (\{\varepsilon\} + \{a_1\}) \times (\{\varepsilon\} + \{a_2\}) \times \dots \times (\{\varepsilon\} + \{a_n\})$$

beschrieben werden. Die EF von C hat daher die Form

$$C(x) = (1+x)^n$$

und das kombinatorische Abzählproblem wird durch

$$c_k = [x^k](1+x)^n = \binom{n}{k}$$

gelöst.

BEISPIEL 3.11. Die **Kombinationen mit Wiederholung** der Elemente a_1, a_2, \dots, a_n können durch die kombinatorische Struktur

$$C = \{a_1\}^* \times \{a_2\}^* \times \dots \times \{a_n\}^*$$

beschrieben werden. Die EF von C hat daher die Form

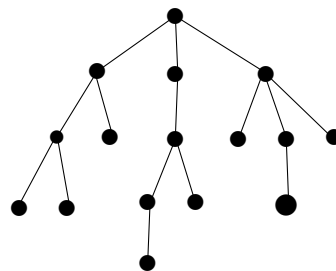
$$C(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$$

und das kombinatorische Abzählproblem wird durch

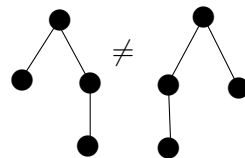
$$c_k = [x^k] \frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n+k-1}{k}$$

gelöst.

BEISPIEL 3.12. Es sei P die Menge der ebenen Wurzelbäume, d.h. Objekte der Form:



Die Wurzel ist ein ausgezeichnetener Knoten. Von ihm aus verzweigt sich der Baum. Dabei ist die Reihenfolge der Zweige wesentlich, da hier ebene Wurzelbäume betrachtet werden, d.h. die beiden Bäume



werden als verschieden betrachtet.

Ebene Wurzelbäume können rekursiv beschrieben werden:

Ein ebener Wurzelbaum besteht entweder nur aus der Wurzel oder er verzweigt sich an der Wurzel in $k \geq 1$ Äste. Jeder dieser Äste für sich betrachtet hat (wenn man die Wurzel und die direkte Verbindung von der Wurzel zum ersten Knoten dieses Astes wegdenkt) wieder die Struktur eines ebenen Wurzelbaumes.

Mit den obigen Bezeichnungen für kombinatorische Konstruktionen, läßt sich diese Beschreibung folgendermaßen übersetzen:

$$P = \{\circ\} + \{\circ\} \times P + \{\circ\} \times P \times P + \dots = \{\circ\} \times P^*.$$

Die erzeugende Funktion $P(x)$ der ebenen Wurzelbäume erfüllt daher die Beziehung

$$P(x) = \frac{x}{1 - P(x)}$$

und ist daher explizit durch

$$P(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

gegeben. Daraus ergibt sich die Anzahl p_n der verschiedenen ebenen Wurzelbäume mit n Knoten zu

$$p_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

BEISPIEL 3.13. Motzkinbäume sind ebene Wurzelbäume, wo jeder Knoten zwei, einen oder gar keinen Nachfolger besitzt. Sie können daher als Binärbäume aufgefaßt werden, wo jeder Knoten durch einen Pfad beliebiger Länge ersetzt wurde. Sei B die Menge der Binärbäume und P die Menge der Pfade, also

$$P = \{\circ\} + \{\circ\} \times \{\circ\} + \{\circ\} \times \{\circ\} \times \{\circ\} + \dots$$

und

$$B = \{\circ\} + \{\circ\} \times B \times B,$$

da nun auch die externen Knoten gezählt werden. Die Menge M der Motzkinbäume ist dann $M = B(P)$. Für die EF gilt dann

$$P(x) = \frac{x}{1-x}$$

sowie

$$B(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$$

und daher

$$M(x) = B(P(x)) = B\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1 - \sqrt{(1-2x-3x^2)}}{2x}.$$

BEISPIEL 3.14. Eine Permutation π von $\{1, 2, \dots, n\}$ läßt sich als Wort $\pi_1 \cdots \pi_n$ schreiben. Jede Permutation π aus S_n kann aus einer Permutation aus S_{n-1} gewonnen werden, indem man in das entsprechende Wort $\pi_1 \cdots \pi_{n-1}$ unmittelbar nach einem π_i oder vor π_1 die Zahl n einfügt. Das entspricht dem Auszeichnen eines π_i oder des Platzes vor π_1 . Daher kann P , die Menge aller Permutationen, in der Form

$$P = \{\varepsilon\} + \Theta(\{\circ\} \times P)$$

geschrieben werden. Daher gilt

$$P(x) = 1 + x \frac{d}{dx}(xP(x)).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die formale Potenzreihe $P(x) = \sum_{n \geq 0} n!x^n$.

BEISPIEL 3.15. Balancierte 2-3-Bäume sind ebene Wurzelbäume, wo alle externen Knoten auf gleicher Höhe sind und von jedem Knoten entweder 2, 3 oder gar keine Kanten von der Wurzel wegführen. Als Größe so eines Baumes definieren wir die Anzahl der externen Knoten. Dann gilt für die Menge E aller solchen Bäume

$$E = \{\square\} + E \circ (\{\square\} \times \{\square\} + \{\square\} \times \{\square\} \times \{\square\})$$

und folglich erfüllt die EF

$$E(x) = x + E(x^2 + x^3).$$

Auch wenn die Lösung dieser Funktionalgleichung schwierig ist, so läßt sie doch eine schrittweise Berechnung der Koeffizienten von $E(x)$ zu. Seien $E_1(x)$ und $E_2(x)$ zwei formale Potenzreihen mit $d(E_1(x), E_2(x)) = 2^{-k}$. Dann gilt also $E_1(x) - E_2(x) = a_k x^k + O(x^{k+1})$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} d(x + E_1(x^2 + x^3), x + E_2(x^2 + x^3)) \\ &= d(x + E_1(x^2 + x^3), x + E_1(x^2 + x^3) + a_k(x^{2k} + x^{3k}) + O(x^{2k+2})) \\ &= 2^{-2k}. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : K[[x]] &\rightarrow K[[x]] \\ A(x) &\mapsto x + A(x^2 + x^3) \end{aligned}$$

ist daher eine Kontraktion. Folglich gibt es nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt, nämlich $E(x)$, da ja $E(x)$ gerade durch $E(x) = \Psi(E(x))$ definiert ist. Weiters kann dieser Fixpunkt mittels Iteration approximiert werden: Die Folge $x, \Psi(x), \Psi(\Psi(x)), \dots$ konvergiert bzgl. der formalen Topologie gegen $E(x)$. x stimmt mit $E(x)$ nur im ersten Koeffizienten überein, aber Mit jedem Iterationsschritt verdoppelt sich die Anzahl der richtig berechneten Koeffizienten.

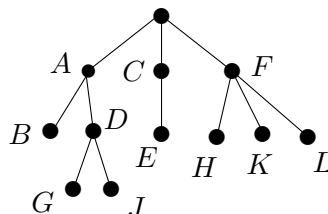
2.2. Binärbäume und ebene Bäume.

Wie Beispiel 3.12 zeigt, gibt es interessanterweise genau so viele ebene Wurzelbäume mit n Knoten wie Binärbäume mit $n - 1$ internen Knoten. Diese Beobachtung hat einen tieferen Hintergrund. Es ist nämlich möglich, mit Hilfe der sogenannten **Rotationskorrespondenz** eine bijektive Beziehung zwischen einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten und einem Binärbaum mit $n - 1$ internen Knoten anzugeben.

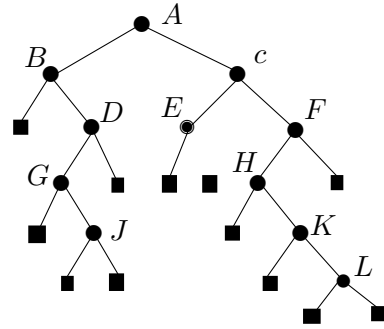
Dabei wurde folgende Vorgangsweise angewandt: Ausgegangen wird von einem ebenen Wurzelbaum mit n Knoten.

- (1) Man streiche die Wurzel (und alle Kanten, die von der Wurzel ausgehen).
- (2) Man streiche bei jedem weiteren Knoten, von dem Äste ausgehen, alle ausgehenden Kanten bis auf eine, die am weitesten links liegt.
- (3) Man verbinde alle Knoten, die im ursprünglichen ebenen Wurzelbaum einen gemeinsamen direkten Vorgänger haben, zu je einer (horizontalen) Kette.
- (4) Die eben eingerichteten horizontalen Kanten werden um 45° nach unten gedreht.
- (5) Die $n - 1$ verbliebenen Knoten fungieren nun als interne Knoten eines Binärbaums. Man ergänze noch die nötigen n externen Knoten.

BEISPIEL 3.16. Dem ebenen Wurzelbaum



entspricht der folgende Binärbaum:



2.3. Kombinatorische Konstruktionen mit Einschränkung bzgl. der Größe.

Wir wollen nun Folgen, Mengen oder Multimengen einer kombinatorischen Struktur betrachten, die eine vorgegebene Länge (Größe) haben. Am einfachsten sind Folgen: Folgen fester Länge k einer kombinatorischen Struktur mit EF $A(x)$ haben die EF $A(x)^k$.

Für Mengen beschränken wir uns auf den Fall zweielementiger Mengen. Sei A eine kombinatorische Struktur mit EF $A(x)$. Die Menge aller zweielementigen Mengen von Objekten aus A bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_2(A)$, ihre EF mit $B(x)$. Wir definieren die Diagonale von $A \times A$ durch $\Delta(A \times A) := \{(\alpha, \alpha) \text{ mit } \alpha \in A\}$. Weiters sei \tilde{A} eine Kopie von A . Dann gilt $\mathcal{S}_2(A) + \mathcal{S}_2(\tilde{A}) + \Delta(A \times A) \cong A \times A$ und daher

$$B(x) = \frac{A(x)^2 - A(x^2)}{2}$$

Für zweielementige Multimengen $\mathcal{M}_2(A)$ oder Zyklen $\mathcal{Z}_2(A)$ gilt offensichtlich $\mathcal{M}_2(A) \cong \mathcal{Z}_2(A)$. Die Bestimmung der EF geht analog zum Fall $\mathcal{S}_2(A)$. Sei $C(x)$ die EF von $\mathcal{M}_2(A)$. Dann gilt $\mathcal{M}_2(A) + \mathcal{MS}_2(\tilde{A}) \cong A \times A + \Delta(\tilde{A} \times \tilde{A})$ und daher

$$C(x) = \frac{A(x)^2 + A(x^2)}{2}$$

Mengen, Multimengen oder Zyklen, die aus mehr als zwei Objekten von A bestehen, kann man im Prinzip analog behandeln. Es wird aber erheblich aufwendiger. Wir werden jedoch später eine andere Methode kennenlernen, mit deren Hilfe wir die EF solcher Strukturen leicht gewinnen können.

BEISPIEL 3.17. *Nichtebene Binärbäume sind Binärbäume, wo es auf die Reihenfolge der Teilbäume eines Knotens nicht ankommt. Sie können daher durch*

$$B = \square + \{\circ\} \times M_2(B)$$

beschrieben werden. Die EF erfüllt daher die Gleichung

$$B(x) = 1 + \frac{x}{2}(B(x)^2 + B(x^2))$$

3. Kombinatorische Konstruktionen für markierte Objekte

3.1. Einfache Konstruktionen.

Ähnlich wie bei den unmarkierten Objekten gibt es auch für markierte Objekte kombinatorische Konstruktionen, die mit den entsprechenden exponentiellen erzeugenden Funktionen verträglich sind. Der wesentliche Unterschied zu den unmarkierten Objekten ist bei der Definition des *Produkts*.

DEFINITION 3.18. *Im folgenden bezeichnen A, B, C markierte kombinatorische Strukturen.*

- (1) *Sind A und B disjunkt, so bezeichnet $C = A + B = A \cup B$ die **Summe** (bzw. Vereinigung) von A und B . Die Größenfunktion bleibt unverändert.*
- (2) *Das **Produkt** $C = A * B$ zweier markierter Strukturen, auch **Partitionsprodukt** genannt, wird folgendermaßen definiert: Zu einem Element $a \in A$ der Größe $|a| = k$ und einem Element $b \in B$ der Größe $|b| = m$ werden $\binom{k+m}{k}$ Elemente von $A * B$ der Größe $k+m$ konstruiert. Dem Objekt a ist eine Anordnung $\pi(1), \dots, \pi(k)$ der Elemente $1, 2, \dots, k$ zugeordnet, und dem Objekt b eine Anordnung $\sigma(1), \dots, \sigma(m)$ der Elemente $1, 2, \dots, m$. Ziel ist es nun, dem Paar (a, b) in natürlicher Weise eine Permutation $\tau(1), \dots, \tau(k+m)$ der Zahlen $1, 2, \dots, k+m$ zuzuordnen. Dazu betrachte man eine der $\binom{k+m}{k}$ Auswahlen $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq k+m$ (und die dazugehörigen Zahlen $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_m \leq k+m$) mit*

$$\{j_1, j_2, \dots, j_k\} \cup \{l_1, l_2, \dots, l_m\} = \{1, 2, \dots, k+m\}.$$

Zu so einer Auswahl definiere man τ durch

$$\tau(j_1) = \pi(1), \tau(j_2) = \pi(2) \dots, \tau(j_k) = \pi(k), \tau(l_1) = \sigma(1), \tau(l_2) = \sigma(2), \dots, \tau(l_m) = \sigma(m).$$

*Auf diese Weise erhält man $\binom{k+m}{k}$ verschiedene markierte Objekte in $A * B$.*

- (3) *Besitzt A kein Objekt der Größe 0 und sind die Mengen $A, A * A, A * A * A, \dots$ paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit*

$$C = A^* := \{\epsilon\} + A + A * A + A * A * A + \dots$$

*die **Folgen** von Objekten aus A .*

- (4) *Sind die Mengen $A, A * A, A * A * A, \dots$ paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit*

$$C = e^A = \{\epsilon\} + A + \frac{1}{2!}A * A + \frac{1}{3!}A * A * A + \dots$$

*die **Mengen** von Objekten von A . Dabei entspricht etwa $\frac{1}{3!}A * A * A$ den dreielementigen Mengen, d.h. die Objekte (a_1, a_2, a_3) , (a_1, a_3, a_2) , (a_2, a_3, a_1) , (a_2, a_1, a_3) , (a_3, a_1, a_2) , (a_3, a_2, a_1) aus $A * A * A$ werden nicht voneinander unterschieden.*

- (5) *Besitzt A kein Objekt der Größe 0 und sind die Mengen $A, A * A, A * A * A, \dots$ paarweise disjunkt, so bezeichnet man mit*

$$C = \mathcal{Z}(A) := A + \frac{1}{2}A * A + \frac{1}{3}A * A * A + \dots$$

*die **Zyklen** von Objekten aus A . Dabei bedeutet etwa $\frac{1}{3}A * A * A$ die Menge der Zyklen der Länge 3, d.h. die Objekte (a_1, a_2, a_3) , (a_2, a_3, a_1) , (a_3, a_1, a_2) aus $A * A * A$ werden nicht voneinander unterschieden.*

- (6) *Die **Komposition** $C = A(B)$ von A und B (wobei B kein Objekt der Größe 0 besitzt) ist durch*

$$C = A_0 + A_1 \times B + A_2 \times (B * B) + A_3 \times (B * B * B) + \dots$$

*definiert, wobei $A_n = \{a \in A \mid |a| = n\}$ bezeichnet. Dabei ist die Größe eines Element $(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ aus $A_n \times (B * B * \dots * B)$ durch $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$ bestimmt.*

- (7) *Da zu jedem markierten Objekt eine Permutation gehört, ist hier die Operation des Auszeichnens noch natürlicher als bei unmarkierten Objekten. Die Struktur $C := \Theta A$ ist definiert durch*

$$C = A_1 + A_1 \times \{1\} + A_2 \times \{1, 2\} + A_3 \times \{1, 2, 3\} + \dots$$

Alle hier angegebenen kombinatorischen Konstruktionen haben eine entsprechende Konstruktion für exponentielle erzeugende Funktionen.

SATZ 3.19. Für markierte kombinatorische Strukturen A, B, C gelten die folgenden Beziehungen für die entsprechenden exponentiellen erzeugenden Funktionen $\hat{A}(x), \hat{B}(x), \hat{C}(x)$:

$C = A + B$	$\hat{C}(x) = \hat{A}(x) + \hat{B}(x)$
$C = A * B$	$\hat{C}(x) = \hat{A}(x)\hat{B}(x)$
$C = A^*$	$\hat{C}(x) = \frac{1}{1-\hat{A}(x)}$
$C = e^A$	$\hat{C}(x) = e^{\hat{A}(x)}$
$C = \mathcal{Z}(A)$	$\hat{C}(x) = \log \frac{1}{1-\hat{A}(x)}$
$C = A(B)$	$\hat{C}(x) = \hat{A}(\hat{B}(x))$
$C = \Theta A$	$\hat{C}(x) = x\hat{A}'(x)$

BEISPIEL 3.20. Jede Permutation (der Zahlen $1, 2, \dots, n$) kann eindeutig als Menge von Zyklen elementarer markierter Objekte dargestellt werden. Es gilt also für die markierte kombinatorische Struktur Π aller Permutationen

$$\Pi = e^{\mathcal{Z}(o)},$$

wobei o ein elementares markiertes Objekt der Größe 1 bezeichnet. Daher hat die EEF der Permutationen die Form

$$\hat{P}(x) = \exp\left(\log \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!}.$$

Dies bestätigt, daß es genau $n!$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ gibt.

BEISPIEL 3.21. Die markierten Wurzelbäume können ähnlich beschrieben werden wie die ebenen Wurzelbäume.

Ein markierter Wurzelbaum besteht aus einem ausgezeichneten Knoten (der Wurzel), von der aus eine Menge von Ästen verzweigen, die (wenn man die Wurzel und die direkte Verbindung zum nächsten Knoten wegdenkt) wieder die Struktur markierter Wurzelbäume haben.

Es bestehen zwei wesentliche Unterschiede. Erstens handelt es sich um markierte Objekte, d.h. ein Baum mit n Knoten wird mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ markiert, und zweitens ist die Reihenfolge der Äste irrelevant. Die obige Beschreibung der (markierten) kombinatorischen Struktur M der markierten Wurzelbäume läßt sich also in die Form

$$M = \{o\} * e^M$$

übersetzen. Die EEF erfüllt daher die Beziehung

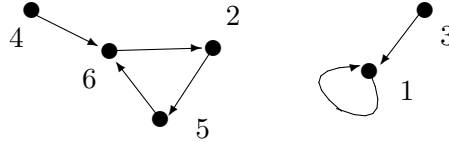
$$\hat{M}(x) = x e^{\hat{M}(x)}.$$

Es wird sich später herausstellen, daß diese EEF durch

$$\hat{M}(x) = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$$

gegeben ist. Es gibt also $m_n = n^{n-1}$ markierte Wurzelbäume mit n Knoten. Daraus folgt übrigens, daß es n^{n-2} markierte Bäume mit n Knoten gibt, da jeder der n Knoten als Wurzel ausgezeichnet werden kann und damit alle markierten Wurzelbäume genau einmal entstehen.

BEISPIEL 3.22. Eine Abbildung $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ kann (ähnlich wie eine Permutation) dadurch graphisch dargestellt werden, daß man die Zahlen $1, 2, \dots, n$ als Punkte repräsentiert und zwischen i und j einen Pfeil zeichnet, wenn $f(i) = j$ ist. Das folgende Beispiel zeigt so eine graphische Darstellung für $n = 6$ und der Abbildung $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 6, f(5) = 6, f(6) = 2$.



Alle Graphen, die so entstehen haben folgende Gestalt. Sie zerfallen zunächst (möglicherweise) in einzelne Komponenten. In jeder dieser Komponenten ist genau ein Zyklus, und jeder Punkt des Zyklus ist Wurzel eines markierten Wurzelbaums.

Die Zusammenfassung alle Abbildungen auf endlichen Mengen kann daher als markierte kombinatorische Struktur R der Form

$$R = e^{\mathcal{Z}(M)}$$

aufgefaßt werden. Demnach hat die EEF die Form

$$\hat{R}(x) = \exp\left(\log \frac{1}{1 - \hat{M}(x)}\right) = \frac{1}{1 - \hat{M}(x)}.$$

Offensichtlich gilt $r_n = n^n$, also

$$\hat{R}(x) = \sum_{n \geq 0} n^n \frac{x^n}{n!}.$$

Daraus läßt sich übrigens (nach kurzer Rechnung) $m_n = n^{n-1}$ (wie oben angegeben) ableiten.

3.2. Einschränkung bezüglich der Markierungen.

Bei markierten Strukturen kann man nicht nur Einschränkungen bzgl. des Aufbau der Konstruktion betrachten. Manchmal ist es sinnvoll, Restriktionen hinsichtlich der Verteilung der Markierungen zu verlangen.

DEFINITION 3.23. Das **Box-Produkt** $C = A^{\square} * B$ (manchmal auch $A^1 * B$) von zwei markierten kombinatorischen Strukturen ist jene Struktur, die alle Paare (α, β) mit $\alpha \in A$ und $\beta \in B$ enthält, wo die Markierung 1 immer der ersten Komponente α zugewiesen wird. Die EEF $\hat{C}(x)$ erfüllt dann

$$\hat{C}(x) = \int_0^x \hat{A}'(t)B(t) dt.$$

BEISPIEL 3.24. Up-Down-Permutationen sind Permutationen $\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$ mit $\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_2 < \sigma_3, \sigma_3 > \sigma_4$, usw. Jede solche Permutation läßt sich bzgl. $\sigma_j = 1$ zerlegen: Sei U die Menge aller Up-Down-Permutationen ungerader Länge und G die Menge aller Up-Down-Permutationen gerader Länge. Dann gilt

$$U = \{\circ\} + \{\circ\}^{\square} * (U * U) \text{ und } G = \{\varepsilon\} + \{\circ\}^{\square} * (U * G)$$

Daraus ergibt sich $\hat{U}(x) = \tan x$ und $\hat{G}(x) = \frac{1}{\cos x}$

4. Die Lagrangesche Inversionsformel

LEMMA 3.25. Sei $f(x), g(x) \in K[[x]]$. Dann gilt $[x^{-1}]f'(x) = 0$ und daher auch $[x^{-1}]f'(x)g(x) = -[x^{-1}]f(x)g'(x)$

SATZ 3.26. Sei $f(x), r(x) \in K[[x]]$ und $v(r(x)) = \alpha$, d.h. $r(x) = r_\alpha x^\alpha + r_{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \dots$ ($r_\alpha \neq 0$). Dann gilt $\alpha[x^{-1}]f(x) = [z^{-1}]f(r(z))r'(z)$

Die Lagrangesche Inversionsformel dient dazu, die Koeffizienten der bezüglich der Komposition inversen Potenzreihe zu bestimmen.

SATZ 3.27. Sei $a(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ eine formale Potenzreihe mit $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Weiters bezeichne $B(x) = A^{[-1]}(x)$ die bezüglich der Komposition inverse Potenzreihe, und $G(x)$ eine beliebige Potenzreihe. Dann gilt für die Koeffizienten von $G(B(x))$.

$$[x^n]g(B(x)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]g'(u) \left(\frac{u}{a(u)} \right)^n \quad (n \geq 1).$$

Für viele Problemstellungen ist die folgende Variante einfacher anzuwenden:

SATZ 3.28. Sei $\phi(w) \in K[[w]]$ eine Potenzreihe mit $\phi(0) \neq 0$ und $f(x) \in K[[x]]$. Weiters sei $t = \frac{w}{\phi(w)}$. Dann gilt

$$[t^n]f(w(t)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n f'(u).$$

BEISPIEL 3.29. Die EF $P(x)$ der ebenen Wurzelbäume erfüllt die die Beziehung

$$P(x) = \frac{x}{1 - P(x)}.$$

Daher sind die Koeffizienten p_n durch

$$p_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](1-u)^{-n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = c_{n-1}$$

gegeben.

BEISPIEL 3.30. Die EF $B(x)$ der Binärbäume erfüllt die Beziehung

$$B(x) = 1 + xB(x)^2.$$

Die EF $D(x) = B(x) - 1$ ist daher Lösung der Gleichung

$$D(x) = x(1 + D(x))^2,$$

woraus sich für $n \geq 1$

$$b_n = d_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](1+u)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n$$

ergibt.

BEISPIEL 3.31. Die EEF $\hat{M}(x)$ der markierten Wurzelbäume genügt der Gleichung

$$\hat{M}(x) = xe^{\hat{M}(x)}.$$

Die Koeffizienten ergeben sich daher zu

$$[x^n]\hat{M}(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]e^{un} = \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!},$$

woraus unmittelbar $m_n = n^{n-1}$ folgt.

Kombinatorische Konstruktionen und erzeugende Funktionen in mehreren Variablen

1. Bivariate erzeugende Funktionen

Erzeugende Funktionen in zwei Variablen sind dazu geeignet, nicht nur die Anzahlen, sondern auch den Aufbau von kombinatorischen Objekten zu studieren.

DEFINITION 4.1. Sei $(a_{nk})_{n,k \geq 0}$ eine doppelt indizierte Folge. Dann sind die **bivariate erzeugende Funktion** (kurz: **BEF**) bzw. die **exponentielle bivariate erzeugende Funktion** definiert durch

$$A(x, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{nk} x^n u^k \text{ bzw. } \hat{A}(x, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{nk} \frac{x^n}{n!} u^k.$$

Manchmal ist man nur an speziellen Informationen interessiert und unterscheidet daher die horizontale EF

$$a_n(u) = \sum_{k \geq 0} a_{nk} u^k,$$

die mit $[x^n]A(x, u)$ bzw. mit $[\frac{x^n}{n!}] \hat{A}(x, u)$ übereinstimmt, und die vertikale EF, analog definiert durch $A_k(x) = [u^k]A(x, u)$ bzw. $\hat{A}_k(x) = [u^k] \hat{A}(x, u)$.

BEISPIEL 4.2. Die horizontale EF der Binomialkoeffizienten ist $a_n(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k = (1+u)^n$. Daher bekommen wir

$$A(x, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^n u^k = \sum_{n \geq 0} (1+u)^n x^n = \frac{1}{1-x(1+u)}.$$

Die vertikale EF ist dann $A_k(x) = x^k / (1-x)^{k+1}$ und die exponentielle BEF $\hat{A}(x, u) = e^{x(1+u)}$

BEISPIEL 4.3. Die (vorzeichenlosen) Stirlingzahlen erster Art $(-1)^{n+k} s_{nk}$ zählen die Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k Zyklen und erfüllen daher

$$(-1)^{n+k} s_{nk} = \left[\frac{x^n}{n!} \right] \frac{\left(\log \frac{1}{1-x} \right)^k}{k!}.$$

Daraus folgt

$$\hat{A}(x, u) = e^{u \log \frac{1}{1-x}} = (1-x)^{-u}.$$

DEFINITION 4.4. Sei $f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{\omega_n}$ mit $\omega_n = 1$ bzw. $\omega_n = n!$ je nachdem, ob wir EF oder EEF verwenden. Diese Konvention soll auf alle EF in dieser Definition angewendet werden.

Sei A eine kombinatorische Struktur. Ein **Parameter** χ einer kombinatorischen Struktur ist eine Funktion $\chi : A \rightarrow \mathbb{N}$. Wir definieren $a_{nk} = |\{\alpha \in A \mid |\alpha| = n, \chi(\alpha) = k\}|$ und die BEF von A bzgl. des Parameters χ ist dann $A(x, u) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{nk} \frac{x^n}{\omega_n} u^k$. Man sagt auch, daß

x die Größe und u den Parameter χ markiert. Die EF von A kann dann auch durch $A(x, 1)$ ausgedrückt werden, da $a_n = \omega_n[x^n]A(x, 1)$.

Wenn wir für eine kombinatorische Struktur A mit alle Mengen A_n mit der Gleichverteilung ausstatten und mit X_n die zugehörige Zufallsvariable bezeichnen, dann gilt offenbar $\mathbb{P}_n(X_n = \alpha) = \frac{1}{a_n}$. Wenn wir ein $\alpha \in A_n$ zufällig auswählen (eine Realisation von X_n), dann nimmt auch jeder Parameter χ einen (zufälligen) Wert an. Der Parameter χ induziert somit eine weitere Zufallsvariable über A_n . Die Verteilung dieser Zufallsvariable kann durch

$$\mathbb{P}_n(\chi = k) = \frac{a_{nk}}{a_n} = \frac{a_{nk}}{\sum_{k \geq 0} a_{nk}}$$

beschrieben werden.

DEFINITION 4.5. Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich \mathbb{N} . Dann ist die **wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion** durch $p(u) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)u^k$ definiert.

SATZ 4.6. Sei $A(x, u)$ die BEF einer kombinatorischen Struktur mit einem Parameter χ . Dann gilt

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_n(\chi = k)u^k = \frac{[x^n]A(x, u)}{[x^n]A(x, 1)}.$$

Der Erwartungswert und die Varianz von χ unter \mathbb{P}_n ist gegeben durch

$$\mathbb{E}_n \chi = \frac{[x^n] \left[\frac{\partial}{\partial u} A(x, u) \right]_{u=1}}{[x^n]A(x, 1)} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}_n \chi = \frac{[x^n] \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} A(x, u) \right]_{u=1}}{[x^n]A(x, 1)} + \mathbb{E}_n \chi - (\mathbb{E}_n \chi)^2$$

und das r -te faktorielle Moment durch

$$\mathbb{E}_n \chi(\chi - 1)(\chi - 2) \cdots (\chi - r + 1) = \frac{[x^n] \left[\frac{\partial^r}{\partial u^r} A(x, u) \right]_{u=1}}{[x^n]A(x, 1)}.$$

BEISPIEL 4.7. Die Zyklenstruktur von Permutationen wird durch in der BEF der Stirlingzahlen erster Art kodiert. Wir wissen bereits, daß $\hat{A}(x, u) = (1 - x)^{-u}$ gilt. Die Koeffizienten sind gerade die Anzahlen der Permutationen bestimmter Größe und mit bestimmter Anzahl von Zyklen. Setzen wir also

$$\chi = \# \text{ Zyklen einer Permutation}$$

dann gilt

$$\mathbb{E}_n \chi = \frac{[x^n] \left[\frac{\partial}{\partial u} (1 - x)^{-u} \right]_{u=1}}{[x^n](1 - x)^{-1}} = [x^n] \frac{1}{1 - x} \log \frac{1}{1 - x} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n$$

Aus der Analysis weiß man, daß $H_n \sim \log n$. Weiters kann man mit Hilfe von

$$\mathbb{E}_n \chi(\chi - 1) = [x^n] \frac{1}{1 - x} \left(\log \frac{1}{1 - x} \right)^2$$

die Varianz ermitteln und erhält dann

$$\mathbb{V}_n \chi = H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim \log n.$$

2. Multivariate erzeugende Funktionen und Kennzeichen von Substrukturen in kombinatorischen Konstruktionen

Neben kombinatorischen Strukturen mit einem Parameter lassen sich auch mehrere Parameter einer Struktur simultan untersuchen. Dafür benötigt man erzeugende Funktionen mit mehr als zwei Variablen.

DEFINITION 4.8. Sei A eine kombinatorische Struktur mit mehreren Parametern oder mit einem mehrdimensionalen Parameter $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_d)$, d.h., $\chi_i : A \rightarrow \mathbb{N}$ ist für $i = 1, \dots, d$. Setzt man

$$a_{n, k_1, k_2, \dots, k_d} = |\{\alpha \in A \mid |\alpha| = n, \chi_i(\alpha) = k_i \text{ für } i = 1, \dots, d\}|$$

und $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_d)$, $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_d)$ und $\mathbf{u}^{\mathbf{k}} := u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_d^{k_d}$, dann ist die erzeugende Funktion der Folge $(a_{n\mathbf{k}})_{n, \mathbf{k}}$ definiert durch

$$\begin{aligned} A(z, \mathbf{u}) &= \sum_{n, \mathbf{k}} a_{n\mathbf{k}} z^n \mathbf{u}^{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{\alpha \in A} z^{|\alpha|} \mathbf{u}^{\chi(\alpha)}. \end{aligned}$$

Analog definiert man exponentielle erzeugende Funktionen für Strukturen mit mehreren Parametern.

DEFINITION 4.9. Seien A, B, C kombinatorische Strukturen mit (eventuell mehrdimensionalen) Parametern χ, ξ, ζ . Der Parameter ζ heißt vererbter Parameter, wenn einer der beiden folgenden Fälle zutrifft:

(1) $C = A + B$ und

$$\zeta(c) = \begin{cases} \chi(c) & \text{falls } c \in A \\ \xi(c) & \text{falls } c \in B \end{cases}$$

(2) $C = A \times B$ und $\zeta((\alpha, \beta)) = \chi(\alpha) + \xi(\beta)$.

Im Falle von vererbten Parametern gelten den beiden oben genannten Fällen entsprechende Regeln für die erzeugenden Funktionen: $C(x, u) = A(x, u) + B(x, u)$ bzw. $C(x, u) = A(x, u)B(x, u)$

DEFINITION 4.10. Seien B_1, B_2, \dots, B_d kombinatorische Strukturen und $A = \Phi(B_1, B_2, \dots, B_d)$ eine zulässige kombinatorische Konstruktion. Unter dem **Kennzeichen** der Teilstrukturen B_1, B_2, \dots, B_d versteht man die Anwendung der Substitution $B_i \rightarrow \mu_i B_i := \{\mu_i\} \times B_i$ auf die Objekte in A . Die μ_i sind dabei Objekte der Größe 0. Die Beziehung $A(x) = F(B_1(x), B_2(x), \dots, B_d(x))$ impliziert dann

$$A(x, u_1, u_2, \dots, u_d) = F(u_1 B_1(x), u_2 B_2(x), \dots, u_d B_d(x)),$$

wenn u_i die zum Parameter $\chi_i := \text{Anzahl der Teilstrukturen aus } B_i \text{ gehörige Variable}$ ist.

Bemerkung: Die Anzahl der Kennzeichnungen ist ein vererbter Parameter.

BEISPIEL 4.11. **Zahlenkompositionen:** Wir wollen Zahlenkompositionen nicht nur hinsichtlich deren Größe, sondern auch in bezug auf die Anzahl der Summanden zählen. Sei $C = A^*$, wobei A die Menge der Summanden ist, also $A = \{\circ\}^*$. Es gilt dann

$$A(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{und} \quad C(x) = \frac{1}{1-A(x)}.$$

Bezeichnet nun χ die Anzahl der Summanden in einer Komposition, so entspricht das genau dem Kennzeichen der Substruktur A in C . Wir erhalten die Struktur $\tilde{C} = (\mu A)^*$ mit erzeugender Funktion

$$C(x, u) = \frac{1}{1 - uA(x)} = \frac{1 - x}{1 - x(u + 1)}.$$

Auswerten der Koeffizienten ergibt

$$\begin{aligned} [x^n u^k] C(x, u) &= \binom{n-1}{k-1} \\ &= \#\text{Kompositionen von } n \text{ in genau } k \text{ Summanden} \end{aligned}$$

Natürlich kann man $C(x, u)$ wieder benutzen, um die Anzahl der Summanden einer zufälligen Kompositionen von n zu studieren. Denn es gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} C(x, u) \Big|_{u=1} = \frac{x(1-x)}{(1-2x)^2}$$

und daraus folgt, daß die erwartete Anzahl der Summanden gleich $(n+1)/2$ ist.

BEISPIEL 4.12. Die Menge der zufälligen Abbildungen $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ läßt sich als funktionaler Digraph darstellen (vgl. Bsp 3.22). Wir wollen die Anzahl der Bäume und der Zyklen in so einem Graphen untersuchen und kennzeichnen daher diese Substrukturen. Es gilt daher

$$C = S(\nu Z(\mu A)) \text{ mit } A = \{\circ^1\} * S(A).$$

Die erzeugenden Funktionen erfüllen somit $A(x) = xe^{A(x)}$ und

$$C(x, u, v) = \exp\left(v \log \frac{1}{1 - uA(x)}\right)$$

Die Anzahl der Abbildungen mit k Bäumen und m Zyklen ist dann gegeben durch $c_{nkm} = \left[\frac{x^n}{n!} u^k v^m\right] C(x, u, v)$. Eine kurze Rechnung zeigt

$$c_{nkm} = \frac{n! k n^{n-k-1}}{m!(n-k)!} [w^k] \left(\log \frac{1}{1-w}\right)^m = \binom{n}{k} k n^{n-k-1} |s_{km}|.$$

BEISPIEL 4.13. Sei χ der Grad der Wurzel in ebenen Wurzelbäumen, d.h. die Anzahl der von der Wurzel ausgehenden Teilbäume. Wie groß ist der Wurzelgrad eines durchschnittlichen Baumes? Es gilt $T = \{\circ\} \times T^*$. Kennzeichnen der von der Wurzel ausgehenden Teilbäume ergibt $\tilde{T} = \{\circ\} \times (\mu T)^*$ und daher für die EF

$$T(x, u) = \frac{x}{1 - uT(x)}.$$

Sei $T_n = [x^n] T(x, 1) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufälliger Wurzelbaum mit n Knoten Wurzelgrad r hat ist daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n(\chi = r) &= \frac{1}{T_n} [x^n u^r] T(x, u) \\ &= \frac{1}{T_n} [x^{n-1}] T(x)^r = \frac{1}{T_n} \frac{r}{n-1} \binom{2n-3-r}{n-2}. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(\chi) &= \frac{1}{T_n} [x^n] \frac{xT(x)}{(1-T(x))^2} \\ &= \frac{1}{T_n} [x^n] \frac{T(x)^3}{x} = \frac{1}{T_n} [x^n] \left(\frac{1-x}{x} T(x) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{T_n} (T_{n+1} - T_n) = 3 \frac{n-1}{n+1} \sim 3.\end{aligned}$$

Kombinatorische Probleme auf Halbordnungen

1. Halbordnungen

1.1. Grundlegende Begriffe.

DEFINITION 5.1. Eine binäre Relation (P, \leq) (auf einer Menge P) heißt **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- (1) $\forall x \in P : x \leq x$ (**Reflexivität**),
- (2) $\forall x, y \in P : (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y$ (**Antisymmetrie**¹ oder **Identität**),
- (3) $\forall x, y, z \in P : (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z$ (**Transitivität**).

Eine Halbordnung (P, \leq) heißt **Totalordnung** oder **lineare Ordnung**, wenn für je zwei Elemente $x, y \in P$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, d.h. je zwei Elemente sind vergleichbar.

Man schreibt auch $x < y$, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$. Weitere abgeleitete Notationen sind $x \geq y$ für $y \leq x$ und $x > y$ für $y < x$. Außerdem soll $x < \cdot y$ bedeuten, daß $x < y$ und es kein z mit $x < z$ und $z < y$ gibt.

BEISPIEL 5.2. (\mathbb{N}, \leq) und (\mathbb{R}, \leq) sind Totalordnungen.

BEISPIEL 5.3. $(\mathbb{N}^+, |)$ ist eine Halbordnung, aber keine Totalordnung. ($m|n$ bedeutet hier: m teilt n , d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}^+$ mit $n = km$.)

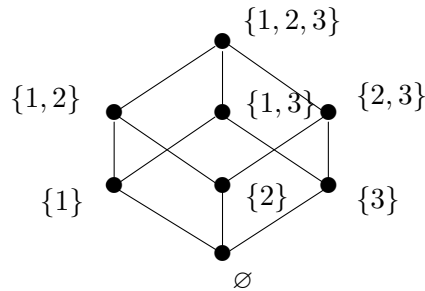
BEISPIEL 5.4. $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$ ist eine Halbordnung, aber für $|M| > 1$ keine Totalordnung. ($\mathbf{P}(M)$ bezeichnet die Potenzmenge der Menge M .)

Wie jede binäre Relation kann man natürlich auch Halbordnungen durch einen Graphen darstellen, indem man die Elemente als Knoten interpretiert und zwischen zwei *Knoten* x, y eine *gerichtete Kante* zeichnet, wenn x mit y in Relation steht. Viele der darzustellenden Kanten sind allerdings redundant, sie lassen sich aus den definierenden Eigenschaften leicht wieder rekonstruieren. Führt man die folgenden drei Schritte durch, so erhält man aus dem Graphen einer (endlichen) Halbordnung (P, \leq) das **Hassediagramm** von (P, \leq) :

- Weglassen aller Schlingen.
- Weglassen aller Kanten, die sich aufgrund der Transitivitätsbedingung rekonstruieren lassen, d.h. ist $x < \cdot y$, so bleibt die Kante von x nach y erhalten, allen anderen Kanten werden *gestrichen*. Mit anderen Worten: nur die *unmittelbaren Nachfolger* von x werden von x mit einer Kante verbunden.
- Weglassen aller Orientierungen. Wegen der Antisymmetrie kann für $x \neq y$ entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gelten aber nie beides zugleich. Zur Übersicht zeichnet man bei $x \leq y$ ($x \neq y$) y oberhalb von x und kann die Orientierung der Kante weglassen.

¹In der Literatur wird üblicherweise der Terminus *Antisymmetrie* verwendet. Die genannte Eigenschaft ist aber nicht das Gegenteil der *Symmetrie*.

BEISPIEL 5.5. Das Hassediagramm der Relation $(\mathbf{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ (siehe Beispiel 5.4) hat die folgende Gestalt:



In der folgenden Definition sind weitere Begriffe für Halbordnungen zusammengestellt.

DEFINITION 5.6. Sei (P, \leq) eine Halbordnung.

- (i) $x, y \in P$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.
- (ii) $x, y \in P$ heißen **unvergleichbar**, wenn weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt.
- (iii) Eine Teilmenge $C \subseteq P$ heißt **Kette** von P , wenn je zwei Elemente aus T vergleichbar sind. $((C, \leq)$ ist dann übrigens eine Totalordnung.)
Die **Länge einer Kette** ist $|C| - 1$.
- (iv) Eine Teilmenge $A \subseteq P$ heißt **Antikette** von P , wenn je zwei Elemente aus A unvergleichbar sind.
- (v) Eine Element $m \in P$ heißt **maximales Element** von P , wenn aus $x \geq m$ die Gleichheit $x = m$ folgt.
- (vi) Eine Element $m \in P$ heißt **minimales Element** von P , wenn aus $x \leq m$ die Gleichheit $x = m$ folgt.
- (vii) Ein Element heißt **Einselement**, bezeichnet mit 1 , wenn $x \leq 1$ für alle $x \in P$ gilt. Gibt es ein Einselement, so ist dieses das einzige maximale Element.
- (viii) Ein Element heißt **Nullelement**, bezeichnet mit 0 , wenn $0 \leq x$ für alle $x \in P$ gilt. Gibt es ein Nullelement, so ist dieses das einzige minimale Element.
- (ix) Für $x, y \in P$ mit $x \leq y$ heißt die Menge $[x, y] := \{z \in P \mid x \leq z \wedge z \leq y\}$ das **Intervall** von x nach y .
- (x) (P, \leq) heißt **lokalendlich**, wenn für alle $x, y \in P$ (mit $x \leq y$) das Intervall $[x, y]$ endlich ist.
- (xi) (P, \leq) erfüllt die **Jordan-Dedekind-Kettenbedingung** (J-D-Bed.), wenn für alle $x, y \in P$ mit $x \leq y$ alle (bez. \leq) maximalen Ketten von x nach y (d.h. alle größtmöglichen Ketten in $([x, y], \leq)$) endlich und gleichlang sind.

BEISPIEL 5.7. In $(\mathbb{N}^+, |)$ bilden die Zahlen $\{2^k \mid k \geq 0\}$ eine Kette und die Primzahlen $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ eine Antikette. 1 ist 0-Element, $(\mathbb{N}^+, |)$ ist lokalendlich und erfüllt die J-D-Bed.

Von besonderem Interesse sind Halbordnungen mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllen.

DEFINITION 5.8. Sei (P, \leq) eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllt. Der Rang $r(x)$ (für $x \in P$) ist die Länge einer maximalen Kette von 0 nach x .

Die **Rangzahlen** $N(k)$ sind durch

$$N(k) = |\{x \in P \mid r(x) = k\}|$$

definiert.

Die erste kombinatorische Aufgabe ist es, in einer Halbordnung mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllt, die Rangzahlen zu bestimmen.

BEISPIEL 5.9. Die Halbordnung (\mathbb{N}, \leq) hat als 0-Element die Zahl 0, und der Rang einer natürlichen Zahl n ist $r(n) = n$. Die Rangzahlen der Halbordnung (\mathbb{N}, \leq) sind alle $N(k) = 1$.

BEISPIEL 5.10. Die Halbordnung $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$ hat als 0-Element die leere Menge \emptyset , und der Rang einer endlichen Teilmenge $A \subseteq M$ ist die Mächtigkeit $r(A) = |A|$. Die Rangzahlen der Halbordnung $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$ bei einer endlichen Menge M sind

$$N(k) = \binom{|M|}{k}.$$

BEISPIEL 5.11. Sei $GF(q)$ ein endlicher Körper mit q Elementen und $V = GF(q)^n$ der n -dimensionale Vektorraum über $GF(q)$. Es sei nun P die Menge aller (linearer) Teilräume von V . Dann ist (P, \subseteq) eine Halbordnung mit 0-Element, die die J-D-Bed. erfüllt. Der triviale 0-dimensionale Unterraum $\{\mathbf{0}\}$ ist 0-Element und der Rang eines Unterraums U von V ist die Dimension $r(U) = \dim(U)$ über $GF(q)$. Die Rangzahlen sind daher die q -**Binomialkoeffizienten**

$$N(k) = \binom{n}{k}_q := \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!},$$

wobei

$$(n)_q! := \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \cdots \frac{q^2 - 1}{q - 1} \cdot \frac{q - 1}{q - 1}$$

die q -**Fakultät** von n bezeichnet.

1.2. Satz von Dilworth und verwandte Resultate.

SATZ 5.12. Sei (P, \leq) eine endliche Halbordnung. Dann ist die maximale Größe einer Antikette gleich der minimalen Anzahl k von paarweise disjunkten Ketten C_1, C_2, \dots, C_k (in P) mit $P = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$.

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Dilworth ist der sogenannte **Heiratssatz**.

SATZ 5.13. Es seien D und H zwei endliche disjunkte Mengen. Weiters sei jedem $d \in D$ eine Teilmenge $\Gamma(d) \subseteq H$ zugeordnet.

Dann gibt es genau dann eine injektive Funktion $\varphi : D \rightarrow H$ mit der Bedingung $\varphi(d) \in \Gamma(d)$ (für alle $d \in D$), wenn für alle Teilmengen $U \subseteq D$

$$(12) \quad \left| \bigcup_{d \in U} \Gamma(d) \right| \geq |U|$$

gilt.

Dieser Satz kann folgendermaßen interpretiert werden: D sei eine Menge von Damen und H eine Menge von Herren. Für eine Dame $d \in D$ sei $\Gamma(d)$ die Menge von Herren, die d bekannt sind. Eine *zulässige Heirat* ist nun eine injektive Funktion $\varphi : D \rightarrow H$, die respektiert, daß jede Dame $d \in D$ einen ihrer vorher schon bekannten Herren heiratet, d.h. $\varphi(d) \in \Gamma(d)$. Der Heiratssatz besagt nun, daß genau dann eine zulässige Heirat möglich ist, wenn jede Gruppe U von Damen insgesamt wenigstens so viele Herren kennen wie groß ihre Anzahl ist, also (12).

Verwandte Resultate findet man in verschiedenen Bereichen der Mathematik. Wir geben ein Beispiel aus der Graphentheorie und eines aus der Theorie der Permutationsmatrizen.

DEFINITION 5.14. Ein **Matching** eines Graphen ist eine Teilmenge der Kantenmenge derart, daß je zwei Kanten des Matchings keinen Knoten gemeinsam haben. Ein **Transversalsystem** ist eine Teilmenge T der Knotenmenge, sodaß jede Kante des Graphen einen Knoten in T berührt. Ein **paarer Graph** ist ein Graph, dessen Knotenmenge so in zwei Teilmengen partitioniert werden kann, daß keine Kante des Graphen zwei Knoten derselben Partition verbindet.

SATZ 5.15 (König, Egervary). In jedem endlichen paaren Graph ist ein maximales Matching genauso Transversalsystem.

DEFINITION 5.16. Eine quadratische Matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ heißt **doppelt stochastisch**, wenn alle Zeilensummen und alle Spaltensummen gleich 1 sind. Eine doppelt stochastische Matrix, die nur die Einträge 0 und 1 besitzt, heißt **Permutationsmatrix**.

SATZ 5.17 (Birkhoff, von Neumann). Die doppelt stochastischen Matrizen bilden eine konvexe Menge, deren Extrempunkte genau die Permutationsmatrizen sind.

2. Arithmetische Funktionen und die Möbiusinversion

2.1. Grundlegende Eigenschaften.

DEFINITION 5.18. Sei (P, \leq) eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element. Eine Funktion $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **arithmetische Funktion**, wenn für alle $x, y \in P$ mit $x \not\leq y$ der Funktionswert $f(x, y) = 0$ ist.

Sind $f, g : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ zwei arithmetische Funktionen, so wird durch

$$(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$$

die **Summe** $f + g$ und durch

$$(f * g)(x, y) := \sum_{z \in [x, y]} f(x, z)g(z, y)$$

die **Faltung** $f * g$ definiert.

Eine arithmetische Funktion $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **eigentlich**, wenn für alle $x \in P$

$$f(x, x) \neq 0$$

gilt.

Die algebraischen Eigenschaften der arithmetischen Funktionen sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

SATZ 5.19. Sei (P, \leq) eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element. Dann bilden die arithmetischen Funktionen auf P mit der Summe $+$ und der Faltung $*$ einen (nicht unbedingt kommutativen) Ring mit Einselement.

Das neutrale Element der Faltung ist die Funktion $\delta : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ (Kronecker- δ):

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ 0 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

Die bezüglich der Faltung invertierbaren Funktionen sind genau die eigentlichen arithmetischen Funktionen.

2.2. Möbiusinversion.

DEFINITION 5.20. Sei (P, \leq) eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element. Die **Zetafunktion** $\zeta : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert. (Sie kann auch als charakteristische Funktion der Halbordnung gesehen werden.) Sie ist invertierbar bezüglich der Faltung. Die zu ζ inverse Funktion heißt **Möbiusfunktion** $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$.

Die wichtigste Anwendung der Möbiusfunktion ist die folgende Umkehrformel.

SATZ 5.21. Sei (P, \leq) eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element und $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ die dazugehörige Möbiusfunktion. Für eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ sei die (Summen-) Funktion $S_f : P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$S_f(x) := \sum_{z \in [0, x]} f(z)$$

gegeben. Dann kann f aus den Werten von S_f mittels der Formel

$$f(x) = \sum_{z \in [0, x]} S_f(z) \mu(z, x)$$

wiedergewonnen werden.

BEISPIEL 5.22. Die Möbiusfunktion der Halbordnung (\mathbb{N}, \leq) ist durch

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = x, \\ -1 & \text{für } y = x + 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Daher folgt aus

$$S_f(x) = \sum_{z=0}^x f(z)$$

die Darstellung

$$f(x) = \sum_{z=0}^x S_f(z) \mu(z, x) = S_f(x) - S_f(x-1).$$

Das schwierigste Problem in diesem Zusammenhang ist es oft, die Möbiusfunktion explizit zu bestimmen. In vielen Fällen kann man sich folgende Eigenschaft zunutzemachen.

SATZ 5.23. Es seien (P_1, \leq_1) , (P_2, \leq_2) zwei lokalendliche Halbordnungen mit 0-Element. Definiert man auf $P = P_1 \times P_2$ die Relation

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) : \iff (x_1 \leq_1 y_1) \wedge (x_2 \leq_2 y_2),$$

so ist (P, \leq) wieder eine lokalendliche Halbordnung mit 0-Element, die Produkthalbordnung, und die Möbiusfunktion $\mu : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet sich aus den Möbiusfunktionen $\mu_1 : P_1 \times P_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu_2 : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mu_1(x_1, y_1) \cdot \mu_2(x_2, y_2).$$

BEISPIEL 5.24. Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen. Dann ist die Halbordnung $(\mathbf{P}(M), \subseteq)$ isomorph zur Halbordnung

$$\prod_{i=1}^n (\{0, 1\}, \leq),$$

und hat daher dieselbe Möbiusfunktion (wenn man die Elemente entsprechend identifiziert.) Dabei entspricht $(0, 0, \dots, 0)$ der leeren Menge \emptyset und $(1, 1, \dots, 1)$ der Menge M . Die Möbiusfunktion $\mu(\emptyset, M)$ ist daher durch

$$\mu(\emptyset, M) = \prod_{i=1}^n \mu_{\leq}(0, 1) = (-1)^n = (-1)^{|M|}$$

gegeben. Sind nun A, B zwei Teilmengen von M mit $A \subseteq B$, dann ist das Intervall $[A, B]$ isomorph zum Intervall $[\emptyset, B \setminus A]$ und demnach

$$\mu(A, B) = \mu(\emptyset, B \setminus A) = (-1)^{|B| - |A|}.$$

BEISPIEL 5.25. Sei n eine positive natürliche Zahl mit Primfaktorenzerlegung

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}.$$

Dann ist die Halbordnung $([1, n], |)$ (wobei natürlich $[1, n]$ in diesem Zusammenhang die Menge der Teiler $[1, n] = \{d \in \mathbb{N}^+ \mid d|n\}$ bezeichnet) isomorph zur Halbordnung

$$\prod_{i=1}^r (\{0, 1, 2, \dots, e_i\}, \leq).$$

Daher bestimmt sich die Möbiusfunktion $\mu(1, n)$ durch

$$\mu(1, n) = \prod_{i=1}^r \mu_{\leq}(0, e_i).$$

Aus Beispiel 5.22 erhält man

$$\mu_{\leq}(0, e) = \begin{cases} 1 & \text{für } e = 0, \\ -1 & \text{für } e = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

woraus man sofort

$$\mu(1, n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^r & \text{für } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ablesen kann. Schließlich ist für zwei natürliche Zahlen m, n mit $m|n$ das Intervall $[m, n]$ zu $[1, n/m]$ isomorph und daher

$$\mu(m, n) = \mu(1, n/m).$$

Diese aus der Zahlentheorie bekannte *klassische* Möbiusfunktion ist $\mu(n) := \mu(1, n)$

3. Inklusions-Exklusions-Prinzip

Offensichtlich gilt für zwei endliche Mengen A, B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Verallgemeinerungen dieser Formel für mehr als zwei Mengen lassen sich natürlich induktiv gewinnen, es soll aber hier gezeigt werden, wie man die Möbiusinversion auf ein Problem dieser Art anwenden kann.

Es seien also A_1, A_2, \dots, A_q endliche Mengen (die alle Teilmengen einer entsprechend gewählten endlichen *Grundmenge* M sind). Es sei $Q = \{1, 2, \dots, q\}$ die Menge der Indizes und $(\mathbf{P}(Q), \supseteq)$ die *inverse* Halbordnung der Teilmengen von Q (z.B. ist Q jetzt minimales Element). Für eine Teilmenge $I \subseteq Q$ sei $f(I)$ durch

$$f(I) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \in Q \setminus I} (M \setminus A_j) \right|.$$

$f(I)$ zählt also die Anzahl der Elemente $x \in M$, die für alle $i \in I$ in A_i enthalten sind, aber in keinem anderen A_j , $j \in Q \setminus I$. Daraus ergibt sich direkt

$$S_f(I) = \sum_{I \subseteq J \subseteq Q} f(J) = \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Aus der Möbiusinversion ergibt sich daher

$$f(I) = \sum_{I \subseteq J \subseteq Q} (-1)^{|J| - |I|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Durch Spezialisierung ergibt sich der folgende Satz.

SATZ 5.26. *Es seien also A_1, A_2, \dots, A_q endliche Mengen, die alle Teilmengen einer endlichen Menge M sind, und es bezeichne $Q = \{1, 2, \dots, q\}$ die Menge der Indizes. Dann gilt für die Anzahl b_p , $0 \leq p \leq q$, der Elemente aus M , die genau in p der Mengen A_1, A_2, \dots, A_q enthalten sind,*

$$b_p = \sum_{I \subseteq Q} (-1)^{p - |I|} \binom{|I|}{p} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Insbesondere erhält man für $p = 0$

$$\left| M \setminus \bigcup_{j=1}^q A_j \right| = \sum_{I \subseteq Q} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

bzw.

$$\left| \bigcup_{j=1}^q A_j \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq Q} (-1)^{|I| + 1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

was natürlich eine Verallgemeinerung der obigen Formel

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

darstellt. Dieses allgemeine Prinzip heißt **Inklusions-Exklusions-Prinzip**.

BEISPIEL 5.27. Die Eulersche φ -Funktion ist durch

$$\varphi(n) := |\{k \leq n \mid \text{ggT}(k, n) = 1\}|$$

definiert. Es sei nun $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorenzerlegung von n (mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_i \in \mathbb{P}$). Es sei nun

$$A_i := \{k \leq n \mid p_i \mid k\}.$$

Dann gilt für alle $I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}$$

und daher

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \left| \{1, 2, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^r A_i \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, r\}} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \end{aligned}$$

BEISPIEL 5.28. Es bezeichne D_n die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen $\pi \in S_n$, d.h.

$$D_n = \left| S_n \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right|,$$

wobei A_i für $1 \leq i \leq n$ die Menge

$$A_i := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$$

bezeichnet. Mit Hilfe der Beziehung

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = (n - |I|)!$$

erhält man

$$\begin{aligned} D_n &= \left| S_n \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|} (n - |I|)! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt asymptotisch

$$D_n \sim \frac{n!}{e} \quad (n \rightarrow \infty).$$

4. Die Teilbarkeitsrelation

4.1. Klassische arithmetische Funktionen.

DEFINITION 5.29. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (klassische) **arithmetische Funktion**².

Die **Summe** $f + g$ zweier arithmetischer Funktionen $f, g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ist durch

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n)$$

und die **Faltung** $f * g$ durch

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

definiert.

Eine klassische arithmetische Funktion $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ entspricht durch die Festsetzung

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \nmid y, \\ f\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x|y, \end{cases}$$

einer arithmetischen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ auf der Halbordnung $(\mathbb{N}^+, |)$. Wegen

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \tilde{f}(1, d)\tilde{g}(d, n) = (\tilde{f} * \tilde{g})(1, n).$$

ist die allgemeine Definition der Faltung mit der *klassischen* Definition verträglich.

SATZ 5.30. Die klassischen arithmetischen Funktionen bilden mit der Summe $+$ und der Faltung $*$ einen Integritätsbereich Ring (d.h. einen kommutativen Ring mit Einselement und ohne Nullteiler). Das neutrale Element $\delta : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Die bezüglich der Faltung invertierbaren arithmetischen Funktionen $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ sind genau jene mit $f(1) \neq 0$.

Außerdem entsprechen einander auch die allgemeine und die *klassische* Möbiusinversion.

DEFINITION 5.31. Die (klassische) **Möbiusfunktion** $\mu : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ist durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^r & \text{für } n = p_1 p_2 \cdots p_r \\ & \text{mit verschiedenen Primzahlen } p_1, p_2, \dots, p_r, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

²Es ist üblich, in diesem Fall als Wertebereich die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} anstelle von \mathbb{R} zu verwenden.

SATZ 5.32. Sei $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ eine arithmetische Funktion. Weiters sei die (Summen-) Funktion $S_f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$S_f(n) := \sum_{d|n} f(d)$$

gegeben. Dann kann f aus den Werten von S_f mittels der Formel

$$f(n) = \sum_{d|n} S_f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

wiedergewonnen werden.

BEISPIEL 5.33. Es gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

BEISPIEL 5.34. Die Eulersche φ -Funktion erfüllt die Beziehung

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Sie kann daher durch

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

berechnet werden.

4.2. Multiplikative arithmetische Funktionen.

DEFINITION 5.35. Eine (klassische) arithmetische Funktion $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **multiplikativ**, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}^+$, die teilerfremd sind (also $\text{ggT}(m, n) = 1$)

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

gilt.

Eine (klassische) arithmetische Funktion $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **vollständig multiplikativ**, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}^+$

$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

gilt.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser multiplikativen Funktionen sind im folgenden Satz zusammengestellt.

SATZ 5.36. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- (1) Ist $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ und $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorenzerlegung von $n \in \mathbb{N}^+$, dann gilt

$$f(n) = f(p_1^{e_1}) \cdots f(p_r^{e_r}),$$

d.h. f ist durch Vorgabe von $f(1) = 1$ und der Werte für Primzahlpotenzen bestimmt.

- (2) Sind $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ zwei multiplikative Funktionen, dann ist auch die Faltung $f * g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ.
- (3) Ist $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ mit $f(1) = 1$, dann ist auch die bezüglich der Faltung inverse Funktion $f^{-1} : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ.

BEISPIEL 5.37. Die Möbiusfunktion $\mu(n)$, die Anzahl $d(n)$ der Teiler von n

$$d(n) := \sum_{d|n} 1$$

und die Summe $\sigma(n)$ der Teiler von n

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d$$

sind multiplikative Funktionen.

Vollständig multiplikative Funktionen haben nicht die Eigenschaft, daß ihre Faltung bzw. ihr Inverses wieder vollständig multiplikativ sind. Trotzdem sind sie von besonderem Interesse.

SATZ 5.38. *Es gelten die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Ist $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$, vollständig multiplikativ und $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorenzerlegung von $n \in \mathbb{N}^+$, dann gilt $f(1) = 1$ und*

$$f(n) = f(p_1)^{e_1} \cdots f(p_r)^{e_r},$$

d.h. f ist durch Vorgabe von $f(1) = 1$ und der Werte für Primzahlen bestimmt.

- (2) *Ist $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$, vollständig multiplikativ, so ist die bezüglich der Faltung inverse Funktion durch*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$$

gegeben.

BEISPIEL 5.39. Die Funktion $N_\alpha(n) = n^\alpha$ ist vollständig multiplikativ, ihr Inverses daher durch $N_\alpha^{-1}(n) = \mu(n)n^\alpha$ gegeben.

BEISPIEL 5.40. Die Funktion

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ (-1)^{e_1 + \cdots + e_r} & \text{für } n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \\ & \text{mit verschiedenen Primzahlen } p_1, p_2, \dots, p_r, \end{cases}$$

ist vollständig multiplikativ. Ihr Inverses bestimmt sich daher zu

$$\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n) = |\mu(n)|.$$

5. Zyklen unmarkierter Objekte

DEFINITION 5.41. *Sei A eine kombinatorische Struktur und $S = A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Ein Objekt $\sigma \in S$ heißt **primitiv**, es kein Objekt $\tau \in S$ mit $\sigma = \tau^k$ gibt. Seien beispielsweise $\alpha, \beta \in A$, so ist $\alpha\beta\beta\alpha$ ein primitives Element von S , während $\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$ nicht primitiv ist.*

In analoger Weise sind primitive Elemente in $Z(A)$ definiert.

SATZ 5.42. *Sei A eine kombinatorische Struktur, $S = A^* \setminus \{\varepsilon\}$ und $P \subset S$ die Menge aller primitiven Elemente aus S . Dann gilt für die BEF $S(x, u)$ und $P(x, u)$ der folgende Zusammenhang:*

$$S(x, u) = \frac{uA(x)}{1 - uA(x)} = \sum_{k \geq 1} P(x^k, u^k).$$

Definiert man nun eine Halbordnung auf der Menge $\{x, x^2, x^3, \dots\}$ durch $x^\ell \leq x^m$ genau dann, wenn m ein Teiler von ℓ ist, so folgt für die Möbiusfunktion dieser Halbordnung

$$\mu(x^\ell, x^m) = \mu(m, \ell) = \mu\left(\frac{\ell}{m}\right).$$

Sei

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n x^n, g(x) = \sum_{k \geq 1} f(x^k) \text{ und } g_\ell(x) = \sum_{k | \ell!} f(x^k).$$

Dann konvergiert $g_\ell(x)$ im Sinne der formalen Topologie gegen $g(x)$. Weiters folgt aus der Möbius-Inversionsformel

$$f(x) = \sum_{k | \ell!} \mu(k) g_\ell(x^k)$$

und nach (formaler) Grenzwertbildung daher

$$f(x) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) g(x^k).$$

Diese Überlegungen lassen sich direkt auf Funktionen in mehreren Variablen übertragen. Daher gilt

$$P(x, u) = \sum_{k \geq 1} \mu(k) S(x^k, u^k) = \sum_{k \geq 1} \frac{u^k A(x^k)}{1 - u^k A(x^k)}.$$

Für die BEF der Zyklen, $C(x, u)$, bzw. die BEF der primitiven Zyklen, $C_p(x, u)$ gilt offenbar

$$C(x, u) = \sum_{k \geq 1} C_p(x^k, u^k).$$

Da jedem primitiven Zyklus der Länge k genau k primitive Folgen der Länge k entsprechen, folgt

$$C_p(x, u) = \int_0^u P(x, v) \frac{dv}{v} = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log \frac{1}{1 - u^k A(x^k)}$$

und daher

$$C(x, u) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m | n} \frac{\mu(m)}{m} \log \frac{1}{1 - u^n A(x^n)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \log \frac{1}{1 - u^n A(x^n)}.$$

6. Arithmetische Funktionen und erzeugende Funktionen

Arithmetische Funktionen auf Halbordnungen können auch mit Hilfe von erzeugenden Funktionen studiert werden. Hierbei treten weitere Typen von erzeugenden Funktionen auf.

6.1. Die Kette.

Bei der Kette (\mathbf{N}, \leq) hängen die Funktionen δ, ζ und μ wegen der Isomorphie $[x, y] \cong [0, y - x]$ nur von $y - x$ ab. Daher können arithmetische Funktionen auf dieser Halbordnung auch als Funktionen, die auf \mathbf{N} definiert sind (also nur ein Argument haben), aufgefaßt werden. Seien f und g solche Funktionen, dann definieren wir die die erzeugenden Funktionen

$$F(z) = \sum_{k \geq 0} f(k) z^k \text{ und } G(z) = \sum_{k \geq 0} g(k) z^k.$$

Die erzeugende Funktion der Faltung $f * g$ ist dann $F(z)G(z)$. Die erzeugenden Funktionen der Grundfunktionen ζ, μ und δ sind dann $\frac{1}{1-z}, 1-z$ bzw. 1 .

6.2. Potenzmengen.

In der Halbordnung der Teilmengen einer endlichen Menge gilt $[A, B] \cong [\emptyset, B \setminus A]$. Darüberhinaus sind die Werte $f(\emptyset, C)$ einer arithmetischen Funktion f nur von der Kardinalität von C abhängig. Wir können daher für jede arithmetische Funktion f eine (genauso bezeichnete) Funktion definieren:

$$f(|B \setminus A|) := f(A, B) = f(\emptyset, B \setminus A).$$

Die Faltung ist dann über

$$(f * g)(n) = (f * g)(|B \setminus A|) = \sum_{A \subseteq C \subseteq B} f(|C \setminus A|)g(|B \setminus C|) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k)$$

Daher ist hier die Wahl der exponentiellen erzeugenden Funktionen zweckmäßig. Setzt man

$$\hat{F}(z) = \sum_{k \geq 0} f(k) \frac{z^k}{k!} \quad \text{und} \quad \hat{G}(z) = \sum_{k \geq 0} g(k) \frac{z^k}{k!},$$

dann wird die Faltung $f * g$ durch $\hat{F}(z)\hat{G}(z)$ beschrieben. Die erzeugenden Funktionen von ζ und μ sind e^z bzw. e^{-z} .

6.3. Teilbarkeit.

Auch in der Halbordnung $(\mathbb{N}, |)$ sind die Werte der arithmetischen Funktionen nur vom Isomorphietyp des Intervalls abhängig. Man erhält dann gerade die klassischen arithmetischen Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Die Faltung auf der Halbordnung übersetzt sich in

$$(f * g)(n) = \sum_{m|k|n} f(k)g\left(\frac{n}{k}\right).$$

Die zweckmäßigsten erzeugenden Funktionen sind dann die sogenannten Dirichletschen Reihen: Sei $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ eine (klassische) arithmetische Funktion. Dann ist die Reihe

$$F(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

die zu f gehörige **Dirichletsche Reihe**.

Bei Konvergenzüberlegungen betrachtet man üblicherweise nicht nur $s \in \mathbb{R}$, sondern $s \in \mathbb{C}$. Es stellt sich heraus, daß aus der Konvergenz von $F(s)$ an einer Stelle $s_0 \in \mathbb{C}$ auch die Konvergenz für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \Re(s_0)$ folgt. Es gibt daher für jede Dirichletsche Reihe $F(s)$ eine sogenannte **Konvergenzabszisse** $\sigma_c \in [-\infty, \infty]$ mit der Eigenschaft, daß $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \sigma_c$ konvergiert und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) < \sigma_c$ divergiert. Beispielsweise hat die **Riemannsche Zetafunktion**

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

die Konvergenzabszisse $\sigma_c = 1$. Es stellt sich auch heraus, daß eine Dirichletsche Reihe $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \sigma_c + 1$ absolut konvergiert. Die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

hat Konvergenzabszisse $\sigma_c = 0$, sie konvergiert aber für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 1$ absolut.

Natürlich kann (und soll) man Dirichletsche Reihen auch als formale Reihen auffassen. Dann gilt für zwei (klassische) arithmetische Funktionen $f, g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ mit dazugehörigen Dirichletsche Reihen $F(s)$ und $G(s)$: Die Dirichletsche Reihe der Faltung $f * g$ gerade das Produkt $F(s)G(s)$. Aus dieser Eigenschaft lassen sich viele Dirichletsche Reihen mit Hilfe der Riemannschen Zetafunktion darstellen.

SATZ 5.43. *Die Dirichletschen Reihen der Funktionen $N_\alpha(n) = n^\alpha$, $\mu(n)$, $d(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $\lambda(n)$ sind durch*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{N_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s - \alpha), \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} &= \frac{1}{\zeta(s)}, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{n^s} &= \zeta(s)^2, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^s} &= \zeta(s)\zeta(s-1), \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \\ \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda(n)}{n^s} &= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

gegeben.

Dirichletschen Reihen multiplikativer und vollständig multiplikativer Funktionen können wir auch durch ein unendliches Produkt, durch ein sogenanntes **Eulerprodukt** darstellen (im formalen Sinn bzw. im Fall absoluter Konvergenz).

SATZ 5.44. *Für eine multiplikative Funktion $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ gilt*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right).$$

Für vollständig multiplikative Funktionen $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ gilt sogar

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Beispielsweise gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

6.4. Teilräume endlicher Vektorräume.

Wir betrachten die Teilräume eines Vektorraums $GF(q)^n$ mit der Unterraumrelation als Halbordnung. Hier gilt $[U, V] \cong [\{\mathbf{o}\}, V/U]$. Wegen $\dim V/U = \dim V - \dim U$ hängen die Werte

arithmetischer Funktionen nur von den Dimensionen der Vektorräume ab. Wir können daher zu jeder arithmetischen Funktion f eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definieren durch

$$f(\dim V - \dim U) = f(U, V) = f(\{\mathbf{o}\}, V/U)$$

Gemäß dieser Definition ist dann die Faltung durch

$$(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q f(k)g(n-k)$$

gegeben. Wir ordnen daher jeder Funktion f die erzeugende Funktion $F_q(z) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{z^n}{(n)_q!}$ zu. Der Funktion ζ ist dann die q -Exponentialfunktion

$$e_q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n)_q!}$$

zugeordnet, der Möbiusfunktion μ die EF

$$\frac{1}{e_q(z)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{z^n}{(n)_q!}$$

Daraus folgt auch

$$\mu(U, V) = (-1)^{\dim V - \dim U} q^{\binom{\dim V - \dim U}{2}}.$$

7. Verbände

In diesem Abschnitt wollen wir einige Sätze über die Möbiusfunktion in Verbänden vorstellen.

DEFINITION 5.45. Sei (H, \leq) eine Halbordnung und $x, y \in H$. Ein Element $z \in H$ heißt **obere Schranke** von x und y , falls $x \leq z$ und $y \leq z$. Analog sind **untere Schranken** definiert.

DEFINITION 5.46. Eine Halbordnung (L, \leq) heißt **Verband**, falls zu je zwei Elementen $x, y \in L$ immer eine größte untere und eine kleinste obere Schranke existieren. Diese werden auch als *Minimum* bzw. *Maximum* bezeichnet und als $x \wedge y$ bzw. $x \vee y$ notiert.

DEFINITION 5.47. Sei (L, \leq) eine Halbordnung und $x, y \in L$. y heißt **direkter Nachfolger** von x , in Zeichen: $x < \cdot y$, wenn es kein $z \in L \setminus \{x, y\}$ mit $x \leq z \leq y$ gibt.

SATZ 5.48. Sei L ein Verband. Dann gilt:

- (1) \wedge und \vee sind assoziativ, kommutativ und idempotent. Letzteres bedeutet, daß für alle $x \in L$ gilt: $x \wedge x = x, x \vee x = x$.
- (2) Für alle $x, y \in L$ gilt $x \wedge (x \vee y)$ und $x \vee (x \wedge y) = x$ (Verschmelzungsgesetze)
- (3) Die drei Aussagen $x \wedge y = x$, $x \vee y = y$ und $x \leq y$ sind äquivalent.
- (4) Ist L endlich, so existiert ein minimales Element 0 und ein maximales Element 1 .

Wichtige Halbordnungen sind jene, die die J-D-Bed. erfüllen. Die Verbände mit dieser Eigenschaft können charakterisiert werden:

SATZ 5.49. Sei L ein endlicher Verband. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) L erfüllt die J-D-Bed., d.h. es existiert eine Rangfunktion $r : L \rightarrow \mathbb{N}_0$. Es gilt dann $r(x) + r(y) \geq r(x \wedge y) + r(x \vee y)$.
- (2) L ist **semimodular**, d.h., aus $x \wedge y < \cdot x$ und $x \wedge y < \cdot y$ folgt $x < \cdot x \vee y$ und $y < \cdot x \vee y$.

SATZ 5.50. Sei L ein endlicher Verband und $0 < a$ und $b < 1$. Dann gilt

$$\sum_{x \text{ mit } x \vee a = 1} \mu(0, x) = 0 \text{ und } \sum_{x \text{ mit } x \wedge b = 1} \mu(x, 1) = 0.$$

KOROLLAR 5.51. Sei L ein endlicher und semimodularer Verband, $x, y \in L$, $x \leq y$. Dann gilt $(-1)^{r(y)-r(x)} \operatorname{sgn} \mu(x, y) \geq 0$.

BEISPIEL 5.52. Sei Π_n der Verband der Partitionen einer n -elementigen Menge mit der Halbordnung $A \leq B$ genau dann, wenn A feiner ist als B , d.h., jeder Block von A ist in einem Block von B enthalten. Falls B die Blöcke b_1, \dots, b_k und A die Blöcke a_{ij} mit $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, n_i$ mit

$$b_i = \mathbf{d}_{j=1}^{n_i} a_{ij},$$

dann gilt $[A, B] \cong \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2} \times \dots \times \Pi_{n_k}$. Daraus folgt

$$\mu(A, B) = \prod_{i=1}^k \mu(0_{\Pi_{n_i}}, 1_{\Pi_{n_i}}).$$

Mit Hilfe der obigen Resultate läßt sich dann

$$\mu(0_{\Pi_n}, 1_{\Pi_n}) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

zeigen.

Pólyasche Abzähltheorie

1. Lemma von Burnside

Gesucht sei die Anzahl der Möglichkeiten, die sechs Seitenflächen eines Würfels zu färben, so daß vier Flächen grün und zwei rot gefärbt werden. Dabei soll zwischen zwei Färbungen nicht unterschieden werden, wenn sie durch Drehung des Würfels im Raum auseinander hervorgehen.

Eine Problemstellung dieser Art kann in folgender Weise formalisiert werden: Es sei M eine endliche Menge (z.B. alle möglichen Färbungen eines Würfels) und \mathfrak{G} eine Untergruppe von \mathfrak{S}_M der Permutationsgruppe der Elemente von M , d.h. $\pi \in \mathfrak{G}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : M \rightarrow M$ (z.B. die durch Drehungen des Würfels induzierten Abbildungen $M \rightarrow M$). Wir nennen zwei Elemente $f, g \in M$ äquivalent, i.Z. $f \sim g$, wenn es ein $\pi \in \mathfrak{G}$ mit $\pi(f) = g$ gibt. Offensichtlich ist \sim eine Äquivalenzrelation auf M . Es besteht nun die Frage, wie viele Äquivalenzklassen es gibt? (Im oberen Beispiel ist dies gerade die Anzahl der gesuchten Färbungen.)

Die Antwort gibt das **Lemma von Burnside**

SATZ 6.1. *Sei M eine endliche Menge und \mathfrak{G} eine Untergruppe von \mathfrak{S}_M . Dann ist die Anzahl der Äquivalenzklassen der Relation \sim ($f \sim g \iff \exists \pi \in \mathfrak{G} : g = \pi(f)$) durch*

$$|M/\sim| = \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{G}} |\{f \in M \mid \pi(f) = f\}|$$

gegeben. (M/\sim bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation \sim .)

BEISPIEL 6.2. Sei M (wie oben) die Menge der möglichen Färbungen der sechs Flächen eines Würfels (mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt), wobei vier Flächen grün und zwei Farben rot gefärbt sind. Weiters sei \mathfrak{G} die Menge der Abbildungen $\pi : M \rightarrow M$, die durch die Drehungen des Raumes induziert werden, die den Würfel auf sich abbilden. Die Anzahl der (durch \mathfrak{G} induzierten) Äquivalenzklassen ist genau die Anzahl der im wesentlichen verschiedenen Färbungen, d.h. zwei Färbungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Drehung des Würfels ineinander übergehen.)

Um für dieses Beispiel das Lemma von Burnside anwenden zu können, muß man \mathfrak{G} genau beschreiben und für alle $\pi \in \mathfrak{G}$ die Anzahl der Fixpunkte $|\{f \in M \mid \pi(f) = f\}|$ bestimmen. Dazu beachte man, daß Drehungen im Raum (mit Ausnahme der Identität) eine eindeutig bestimmte Drehachse haben. Will man Drehungen des Raumes bestimmen, die einen Würfel auf sich abbilden, so muß die Drehachse eine Symmetrieachse des Würfels sein. Es können daher nur folgende Fälle auftreten.

- a) Die Identität id ist (natürlich) in \mathfrak{G} . Alle $\binom{6}{2} = 15$ Färbungen des Würfels sind Fixpunkte.
- b) Die Drehachse verbindet die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen und man dreht um 90° in die eine oder andere Richtung. Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Drehungen dieser Art.

- Die einzige Färbung, die bei so einer Drehung in sich übergeht (also Fixpunkt ist), ist jene, wo die Flächen, die durch die Drehachse geschnitten werden, rot gefärbt sind.
- c) Die Drehachse verbindet wieder die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen und man dreht um 180° . Es gibt drei Drehungen dieser Art, und es gibt jeweils drei Färbungen, die Fixpunkte sind, nämlich jene, wo zwei gegenüberliegende Flächen rot gefärbt sind.
- d) Die Drehachse verbindet die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten, und man dreht um 180° . Es gibt sechs Drehungen dieser Art, und zu jeder gibt es drei Färbungen, die Fixpunkte sind. Färbt man nämlich zwei Flächen, die so eine Kante gemeinsam haben, rot, so hat man einen Fixpunkt. Davon gibt es zwei Möglichkeiten. Die dritte Fixpunkt ist jene Färbung, wo jene (gegenüberliegende) zwei Flächen rot gefärbt werden, die nicht an diese zwei Kanten angrenzen.
- e) Die Drehachse verbindet zwei gegenüberliegende Eckpunkte, und man dreht um 120° in die eine oder andere Richtung. Es gibt $4 \cdot 2 = 8$ Drehungen dieser Art, aber keine Färbung, die durch so eine Drehung in sich übergeführt wird.

Insgesamt hat die Gruppe \mathfrak{G}

$$|\mathfrak{G}| = 1 + 6 + 3 + 6 + 8 = 24$$

Elemente, und es gibt

$$15 + 6 + 9 + 18 + 0 = 48$$

Fixpunkte. Nach dem Lemma von Burnside gibt es also $48/24 = 2$ Äquivalenzklassen, also nur 2 (im wesentlichen) verschiedene Färbungen.

2. Zyklenzeiger von Permutationsgruppen

2.1. Zyklentyp und Zyklenzeiger.

DEFINITION 6.3. Sei M eine endliche Menge mit n Elementen und $\pi \in \mathfrak{S}_M$ eine Permutation der Elemente von M . Der **Zyklentyp** $ZT(\pi)$ von π ist durch das Monom

$$ZT(\pi) := x_1^{\lambda_1(\pi)} x_2^{\lambda_2(\pi)} \dots x_n^{\lambda_n(\pi)}$$

gegeben, wobei $\lambda_j(\pi)$ der Anzahl der Zyklen der Länge j in der kanonischen Zyklenzerlegung von π bezeichnet.

Sei weiters \mathfrak{G} eine Untergruppe von \mathfrak{S}_M . Dann ist der **Zyklenzeiger** $P_{\mathfrak{G}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ das Polynom

$$P_{\mathfrak{G}}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\pi \in \mathfrak{G}} ZT(\pi).$$

2.2. Zyklenzeiger wichtiger Gruppen.

SATZ 6.4. Sei M eine endliche Menge mit n Elementen und es bezeichne $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_M$ die Menge der Permutationen der Elemente von M .

- (1) Die (triviale) Untergruppe $\mathfrak{E}_n = \{id\}$ von \mathfrak{S}_n hat den Zyklenzeiger

$$P_{\mathfrak{E}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^n.$$

- (2) Die gesamte Gruppe \mathfrak{S}_n hat den Zyklenzeiger

$$P_{\mathfrak{S}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n! \cdot 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

- (3) Eine zyklische Untergruppe \mathfrak{Z}_n von \mathfrak{S}_n der Ordnung n (sie wird z.B. von der zyklischen Permutation $\pi = (12 \cdots n)$ erzeugt) hat den Zyklenzeiger

$$P_{\mathfrak{Z}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d},$$

wobei φ die Eulersche φ -Funktion bezeichnet.

Die Zyklenzeiger der symmetrischen Gruppen \mathfrak{S}_n können auch durch eine kombinatorische Konstruktion erzeugt werden, nämlich durch

$$(13) \quad \sum_{n \geq 0} P_{\mathfrak{S}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) t^n = e^{tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots}.$$

Die exponentielle erzeugende Funktion $t^k \frac{x_k}{k}$ zählt die zyklischen Permutationen der Länge k , die mit (dem Zyklentyp) x_k markiert werden. Die EEF

$$tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots$$

beschreibt daher die zyklischen Permutationen (jeweils versehen mit dem entsprechenden Zyklentyp) und daher

$$e^{tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots}$$

die Mengen von Zyklen, also alle Permutationen wieder versehen mit dem richtigen Zyklentyp. Der Koeffizient von $t^n/n!$ ist daher die Summe aller Zyklentypen der Permutationen von n Elementen. Daher gilt (13).

Eine für die Anwendungen wichtige Klasse von Gruppen sind die *Symmetriegruppen* von geometrischen Objekten. Das sind jene Drehungen (und Spiegelungen), die diese Objekte in sich überführen.

SATZ 6.5. Die Menge aller Drehungen in der Ebene, die ein regelmäßiges n -Eck in der Ebene in sich überführen bildet eine zyklische Gruppe der Ordnung n . Diese induziert eine zyklische Untergruppe der Permutationen auf den n Eckpunkten.

Die Symmetriegruppe des regelmäßigen n -Ecks besteht aus den obengenannten n Drehungen und aus n Spiegelungen, wobei die Spiegelungsachsen (durch den Ursprung und) durch einen Eckpunkt oder durch den Mittelpunkt einer Seitenkante gehen. Diese Gruppe induziert daher eine Gruppe von Permutationen (der Ordnung $2n$) auf den n Eckpunkten, die sogenannte **Diedergruppe** \mathfrak{D}_n , deren Zyklenzeiger für gerade n durch

$$P_{\mathfrak{D}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} P_{\mathfrak{Z}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{4} x_2^{n/2} + \frac{1}{4} x_1^2 x_2^{(n-2)/2}$$

und für ungerade n durch

$$P_{\mathfrak{D}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} P_{\mathfrak{Z}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1}{2} x_1^2 x_2^{(n-1)/2}$$

gegeben ist.

Die Drehsymmetriegruppen für Tetraeder und Würfel haben folgende Gestalt.

SATZ 6.6. Es gibt genau 12 Drehungen im Raum, die ein regelmäßiges Tetraeder in sich überführen. Die dadurch induzierte Permutationsgruppe auf den 4 Ecken bzw. auf den 4 Flächen hat den Zyklenzeiger

$$\frac{1}{12} (x_1^4 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2),$$

und die entsprechenden Permutationsgruppen auf den 6 Kanten

$$\frac{1}{12}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 8x_3^2).$$

SATZ 6.7. Es gibt genau 24 Drehungen im Raum, die einen Würfel in sich überführen. Die dadurch indizierte Permutationsgruppe auf den 8 Ecken hat den Zyklenzeiger

$$\frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 3x_2^4 + 6x_2^4 + 8x_1^2x_3^2),$$

die entsprechende Permutationsgruppe auf den 6 Flächen

$$\frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

und die auf den 12 Kanten

$$\frac{1}{24}(x_1^{12} + 6x_4^3 + 3x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4).$$

Man beachte, daß Würfel und Oktaeder zueinander dual sind. Man kann nämlich in einen Würfel ein Oktaeder einschreiben, wobei die Flächenmittelpunkte des Würfels die Eckpunkte des Oktaeders sind. In derselben Weise kann man einem Oktaeder einen Würfel einschreiben. Daraus erkennt man, daß Würfel und Oktaeder dieselben Drehsymmetriegruppen besitzen. Weiters bestehen natürliche Bijektionen zwischen den Flächen des Würfels und den Ecken des Oktaeders, zwischen den Ecken des Würfels und den Flächen des Oktaeders und zwischen den Kanten der beiden Objekte. Die Zyklenzeiger der entsprechenden Permutationsgruppen für das Oktaeder können daher aus dem vorigen Satz entnommen werden, indem man die für Ecken und Flächen gegeneinander austauscht.

In derselben Weise sind Isokaeder und Pentagondodekaeder zueinander dual und das Tetraeder *selbstdual*.

3. Satz von Polya

Die Situation des Lemma von Burnside soll nun etwas spezialisiert werden. Es seien D, R zwei endliche Mengen und $M = R^D$, also alle Funktionen $f : D \rightarrow R$. (Im oberen Beispiel wäre D die Menge der Seitenflächen eines Würfels und R die Menge der Farben grün und rot.) Weiters sei \mathfrak{G} eine Untergruppe von \mathfrak{S}_D . Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{G}$ induziert durch die Festlegung

$$(\tilde{\pi}(f))(x) := f(\pi(x))$$

eine Permutation $\tilde{\pi} \in S_M$. Offensichtlich ist die dadurch entstehende Menge $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe von S_M und in natürlicher Weise isomorph zu \mathfrak{G} .

Wieder heißen zwei Funktionen $f, g \in M$ äquivalent, i.Z. $f \sim g$, wenn es eine Permutation $\pi \in \mathfrak{G}$ mit $\tilde{\pi}(f) = g$ gibt.

Jedes Element $r \in R$ habe ein *Gewicht* $w(r)$, d.h. es gibt eine Abbildung $w : R \rightarrow W$ von R in eine Menge von Gewichten. (Im obigen Beispiel könnte man etwa $w(\text{grün}) := g$ und $w(\text{rot}) := r$ setzen.) Jeder Abbildung $f \in M = R^D$ wird nun ein *Gewicht*

$$w(f) := \prod_{x \in D} f(x)$$

zugeordnet. (Beispielsweise hat in unserem Beispiel eine für uns interessante Färbung f das Gewicht $w(f) = g^4r^2$.) Streng genommen ist $w(f)$ ein Element aus dem Polynomring $\mathbb{R}[W]$.

LEMMA 6.8. Für $f, g \in R^D$ gilt

$$f \sim g \implies w(f) = w(g).$$

Demnach kann man auch für eine Klasse $C \in M/\sim$ das Gewicht

$$w(C) := w(f) \quad \text{für ein } f \in C$$

in natürlicher Weise definieren.

Der **Satz von Pólya** gibt nun eine genaue Auskunft über die Verteilung der Gewichte auf die Klassen.

SATZ 6.9. Seien R, D endliche Mengen, \mathfrak{G} eine Untergruppe von \mathfrak{S}_D und $M = R^D$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$\sum_{C \in M/\sim} w(C) = P_{\mathfrak{G}} \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^{|D|} \right).$$

KOROLLAR 6.10.

$$|M/\sim| = P_{\mathfrak{G}}(|R|, |R|, \dots, |R|).$$

BEISPIEL 6.11. Sei M die Menge der möglichen Färbungen der sechs Flächen eines Würfels (mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt) mit den Farben grün und rot, also $M = R^D$, wobei D die sechs Flächen des Würfels beschreibt und $R = \{\text{grün, rot}\}$ ist. Weiters sei $w(\text{grün}) := g$ und $w(\text{rot}) := r$ und \mathfrak{G} die Gruppe der Drehungen, die den Würfel auf sich abbilden. Der Zyklenzeiger dieser Gruppe, aufgefaßt als Permutationsgruppe auf den Flächen, ist

$$P_{\mathfrak{G}}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

Nach dem Satz von Pólya ist daher die Anzahl der verschiedenen Färbungen der sechs Flächen, wobei vier Flächen grün und zwei rot gefärbt werden sollen, und zwei Färbungen als gleich gelten, wenn sie durch Drehung des Würfels ineinander übergehen, durch

$$\begin{aligned} & [g^4r^2]P_{\mathfrak{G}}(g+r, g^2+r^2, g^3+r^3, g^4+r^4, g^5+r^5, g^6+r^6) \\ &= [g^4r^2] \frac{1}{24} ((g+r)^6 + 6(g+r)^2(g^4+r^4) + 3(g+r)^2(g^2+r^2)^2 + 6(g^2+r^2)^3 + 8(g^3+r^3)^2) \\ &= \frac{1}{24} (15 + 6 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 0) \\ &= \frac{48}{24} = 2 \end{aligned}$$

gegeben.

Die Anzahl aller möglichen Färbungen mit den zwei Farben grün und rot ist

$$P_{\mathfrak{G}}(2, 2, 2, 2, 2, 2) = \frac{240}{24} = 10.$$

Dabei sind natürlich die Färbungen mit genau einer Farbe auch mitgezählt worden. Es gibt daher $10 - 2 = 8$ verschiedene Färbungen, wobei beide Farben Verwendung finden.

4. Weitere kombinatorische Konstruktionen

Im Kapitel 3 wurden verschiedene kombinatorische Konstruktionen für unmarkierte und markierte Objekte vorgestellt. Dabei wurde zwar weitgehend, aber nicht vollständig parallel vorgegangen. Diese Lücke wird nun mit Hilfe des Satzes von Pólya geschlossen. Weiters wird die Multimengenkonstruktion noch einmal genauer studiert.

SATZ 6.12. Sei A eine kombinatorische Struktur unmarkierter Objekte und $A(x)$ die EF von A . Betrachtet man nun alle k -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_k) von Elementen aus A , wobei zwei k -Tupel miteinander identifiziert werden, wenn sie durch zyklische Vertauschung ineinander übergehen, so entsteht eine neue kombinatorische Struktur C , die **Zyklen der Länge k** . Ihre EF ist durch

$$C(x) = P_{\mathfrak{S}_k}(A(x), A(x^2), \dots, A(x^k))$$

gegeben.

SATZ 6.13. Sei A eine kombinatorische Struktur unmarkierter Objekte und $A(x)$ die EF von A . Betrachtet man nun alle k -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_k) von Elementen aus A , wobei zwei k -Tupel miteinander identifiziert werden, wenn sie durch Permutation ineinander übergehen, so entsteht eine neue kombinatorische Struktur C , die **Multimengen der Größe k** . Ihre EF ist durch

$$C(x) = P_{\mathfrak{S}_k}(A(x), A(x^2), \dots, A(x^k))$$

gegeben.

Man beachte, daß die entsprechenden Konstruktionen für markierte Objekte bereits in Kapitel 3 besprochen wurden. Die EEFen waren dort $\hat{C}(x) = \frac{1}{k} \hat{A}(x)^k$ bzw. $\check{C}(x) = \frac{1}{k!} \hat{A}(x)^k$.

Weiters beachte man, daß die Beziehung

$$\sum_{k \geq 0} P_{\mathfrak{S}_k}(A(x), A(x^2), \dots, A(x^k)) = e^{A(x) + \frac{1}{2}A(x)^2 + \frac{1}{3}A(x)^3 + \dots}$$

gelten muß. Dies ist übrigens in Übereinstimmung mit der im zweiten Abschnitt angegebenen Formel

$$\sum_{n \geq 0} P_{\mathfrak{S}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) t^n = e^{tx_1 + t^2 \frac{x_2}{2} + t^3 \frac{x_3}{3} + \dots},$$

indem man $t = 1$ und $x_j = A(x^j)$ setzt.

BEISPIEL 6.14. Bei den ebenen Wurzelbäumen \mathcal{P} , die durch die symbolische Gleichung $\mathcal{P} = \{\circ\} \times \mathcal{P}^*$ beschrieben werden, besteht noch eine eindeutige links-rechts-Reihenfolge der von der Wurzel ausgehenden *Teilbäume*. Diese Eigenschaft ist für den rekursiven Aufbau (der sich in der Gleichung $\mathcal{P} = \{\circ\} \times \mathcal{P}^*$ widerspiegelt wesentlich. Möchte man jedoch wirklich **Wurzelbäume in der Ebene \mathcal{W}** betrachten, also zwei Bäume als gleich betrachten, wenn sie durch zyklische Vertauschung der Teilbäume, die von der Wurzel ausgehen, auseinander hervorgehen, so muß in einem letzten Schritt aus den ebenen Wurzelbäumen mit Hilfe einer Zykluskonstruktion diese kombinatorische Struktur beschrieben werden. Bezeichnet man mit $C_k(\mathcal{P})$ einen Zyklus der Länge k von ebenen Wurzelbäumen, so sind die Wurzelbäume in der Ebenen gerade die Struktur

$$\mathcal{W} = \{\circ\} \times (\mathcal{P} + C_2(\mathcal{P}) + C_3(\mathcal{P}) + \dots).$$

Die EF $w(x)$ ist daher durch

$$w(x) = x \sum_{k \geq 0} P_{\mathfrak{S}_k}(p(x), p(x^2), \dots, p(x^k))$$

gegeben, wobei

$$p(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

die Gleichung $p(x) = x/(1 - p(x))$ erfüllt. $p(x)$ hat Konvergenzradius $\frac{1}{4}$. $p(x^2)$ hat daher Konvergenzradius $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ usw. Daraus erkennt man, daß die hier auftretende Summe durch

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} P_{3^k}(p(x), p(x^2), \dots, p(x^k)) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k} p(x)^k + r_1(x) \\ &= \log \frac{1}{1 - p(x)} + r_1(x) \end{aligned}$$

beschrieben werden kann, wobei $r_1(x)$ eine analytische Funktion ist, die Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ hat. Daher hat $w(x)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} w(x) &= x \left(\log \frac{1}{1 - p(x)} + r_1(x) \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{1 - 4x} + O((1 - 4x)^{3/2}) + r_2(x), \end{aligned}$$

wobei $r_2(x)$ wieder eine analytische Funktion mit Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ ist. Wegen Satz 3.40 erhält man daher für die Anzahl w_n der Wurzelbäume in der Ebene

$$w_n = \frac{4^{n-1}}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Graphentheorie

Alle in diesem Kapitel vorkommenden Graphen sind endlich.

1. Grundlegende Begriffe

1.1. Knoten, Kanten und Knotengrade.

DEFINITION 7.1. Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge $V = V(G)$ und einer Kantenmenge $E = E(G)$. Dabei ist eine Kante $e \in E(G)$ entweder **gerichtet**, d.h. ein geordnetes Paar $e = \langle v_1, v_2 \rangle$ von zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$, oder **ungerichtet**, d.h. ein ungeordnetes Paar $e = (v_1, v_2)$ von zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$.¹ Im gerichtete Fall heißt v_1 **Anfangsknoten** und v_2 **Endknoten** von e .

Sind alle Kanten $e \in E(G)$ gerichtet, so spricht man von einem **gerichteten Graphen**, sind hingegen alle Kanten $e \in E(G)$ ungerichtet, so heißt G **ungerichteter Graph**.²

In der obigen Definition sind auch Kanten der Form $\langle v, v \rangle$ (bzw. (v, v)) zugelassen. So eine Kante heißt auch **Schlinge**.

Sind zwei Knoten v, w eines Graphen durch eine Kante verbunden, so heißen v und w auch **adjazent**. Weiters **inzidieren** Knoten v, w mit einer Kante, die sie verbindet.

Die Anzahl der Knoten eines Graphen G wird auch mit $\alpha_0(G) = |V(G)|$ und die Anzahl der Kanten mit $\alpha_1(G) = |E(G)|$ bezeichnet.

Es ist auch möglich, Graphen mit **Mehrfachkanten** zu betrachten. Hier kann man aber Kanten nicht mehr mit Paaren von Knoten identifizieren. Einer allgemeinen Kante e werden zwei Knoten v_1, v_2 zugeordnet, die als Anfangs- bzw. Endknoten interpretiert werden können. Zwei verschiedene Kanten können daher (in diesem Rahmen) durchaus dieselben Anfangs- und Endknoten besitzen.

DEFINITION 7.2. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **schlicht** oder **einfach**, wenn G keine Schlingen (und keine Mehrfachkanten) enthält.

DEFINITION 7.3. In einem schlichten ungerichteten Graphen G heißen die zu $v \in V(G)$ adjazenten Knoten

$$\Gamma(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$$

Nachbarn von v .

Die Anzahl

$$d(v) = |\Gamma(v)| = |\{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}|$$

¹Diese Notation der geordneten bzw. ungeordneten Paare weicht ein wenig von der bisher verwendeten ab, wo (a, b) ein geordnetes Paar bezeichnet hat.

²Ein Graph ist natürlich eine alternative Beschreibung einer binären Relation auf einer Menge V . Dabei beschreibt ein gerichteter Graph eine allgemeine Relation und ein ungerichteter Graph eine symmetrische Relation.

der Nachbarn von $v \in V(G)$ ist der **Knotengrad** von $v \in V(G)$

In einem gerichteten Graphen G heißen die Elemente von

$$\Gamma^+(v) = \{w \in V(G) \mid \langle v, w \rangle \in E(G)\}$$

Nachfolger des Knoten $v \in V(G)$ und

$$\Gamma^-(v) = \{w \in V(G) \mid \langle w, v \rangle \in E(G)\}$$

Vorgänger von $v \in V(G)$. $\Gamma(v) = \Gamma^+(v) \cup \Gamma^-(v)$ bilden die Nachbarn von $v \in V(G)$.

Die Anzahl

$$d^+(v) = |\Gamma^+(v)| = |\{w \in V(G) \mid \langle v, w \rangle \in E(G)\}|.$$

der Nachfolger von $v \in V(G)$ ist der **Weggrad** von $v \in V(G)$.

Die Anzahl

$$d^-(v) = |\{w \in V(G) \mid \langle w, v \rangle \in E(G)\}|.$$

der Vorgänger von $v \in V(G)$ ist der **Hingrad** von $v \in V(G)$

Der minimale Grad, der in einem Graphen G auftritt, wird mit $\delta(G)$ bezeichnet, der Maximalgrad mit $\Delta(G)$.

Mit $\varepsilon(G) = \frac{\alpha_1(G)}{\alpha_0(G)}$ wird die **Dichte** eines Graphen bezeichnet. Die Dichte ist halb so groß wie der mittlere Knotengrad $d(G)$.

Man beachte, daß bei gerichteten Graphen in dieser Definition Schlingen zugelassen sind. Ließe man auch im ungerichteten Fall Schlingen zu, so müßten diese bei der Gradberechnung doppelt gezählt werden.

SATZ 7.4. In einem schlichten ungerichteten Graphen G gilt

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

In einem ungerichteten Graphen G gilt hingegen

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E(G)|.$$

1.2. Teilgraphen.

DEFINITION 7.5. Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt **Teilgraph** eines Graphen $G = (V, E)$ wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gelten.

Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißt **induzierter Teilgraph**, wenn E' alle Kanten aus E enthält, für die Anfangs-, und Endknoten in V' liegen, d.h. E' muß nicht extra angegeben werden, sondern wird durch Vorgabe von G und V' induziert. Der von V' induzierte Teilgraph wird mit $G[V']$ bezeichnet.

Auf der Menge aller Teilgraphen eines Graphen G können Durchschnitt und Vereinigung von Teilgraphen definiert werden, indem man die entsprechenden Operationen auf die Knoten- und die Kantenmenge anwendet.

DEFINITION 7.6. Unter dem **komplementären Graph** G^c eines Graphen versteht man einen Graphen mit derselben Knotenmenge wie G , in dem je zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn das in G nicht der Fall ist. Die Vereinigung $G \cup G^c$ ist daher der Graph mit derselben Knotenmenge wie G , in dem je zwei Knoten durch eine Kante verbunden

sind. Dieser Graph wird der **vollständige Graph** mit $n = \alpha_0(G)$ Knoten. Er wird mit K_n bezeichnet.

1.3. Kantenfolgen.

DEFINITION 7.7. Eine Folge von Kanten $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ eines ungerichteten Graphen G heißt **Kantenfolge**, wenn es Knoten $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w \in V(G)$ mit

$$e_1 = (v, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_{k-1} = (v_{k-2}, v_{k-1}), e_k = (v_{k-1}, w)$$

gibt, d.h. man kann die Kanten e_1, e_2, \dots, e_k "ohne Absetzen" durchlaufen. Man sagt auch daß die Kantenfolge e_j ($1 \leq j \leq k$) die Knoten v und w verbindet. Die Anzahl k der Kanten ist die **Länge** der Kantenfolge. Eine Kantenfolge der Länge 0 besteht aus keiner Kante und wird als **leere Kantenfolge** bezeichnet. Sie verbindet jeden Knoten mit sich selbst.

Eine Folge von Kanten $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ eines gerichteten Graphen G heißt **Kantenfolge**, wenn für je zwei aufeinanderfolgende Kanten e_j, e_{j+1} ($1 \leq j < k$) der Endknoten von e_j mit dem Anfangsknoten von e_{j+1} übereinstimmt, d.h. es gibt Knoten $v, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, w$ mit

$$e_1 = \langle v, v_1 \rangle, e_2 = \langle v_1, v_2 \rangle, \dots, e_{k-1} = \langle v_{k-2}, v_{k-1} \rangle, e_k = \langle v_{k-1}, w \rangle.$$

Wiederum spricht man von einer Kantenfolge, die die Knoten v und w (gerichtet) verbindet, v ist der Anfangsknoten und w der Endknoten. Ebenso ist k die Länge der Kantenfolge.

Ein Knoten w ist von einem Knoten v aus **erreichbar**, wenn es eine Kantenfolge gibt, die v mit w verbindet.

Eine Kantenfolge $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ in einem Graphen G heißt **Kantenzug**, wenn alle Kanten e_j ($1 \leq j \leq k$) voneinander verschieden sind.

Eine Kantenfolge $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ in einem Graphen G heißt **Weg** (in einem ungerichteten Graphen) bzw. **Bahn** (in einem gerichteten Graphen), wenn alle Knoten, die mit den Kanten e_j ($1 \leq j \leq k$) inzidieren, voneinander verschieden sind.

Verbindet eine Kantenfolge (resp. ein Kantenzug resp. ein Weg oder Bahn) die Knoten v und w , so bezeichnet man dies auch durch $KF(v, w)$ (resp. durch $KZ(v, w)$ resp. durch $W(v, w)$).

Eine Kantenfolge, die einen Knoten $v \in V(G)$ mit sich selbst verbindet, heißt **geschlossen**.

Eine geschlossene Kantenfolge $K(v, v)$ in einem ungerichteten Graphen heißt **Kreis**, wenn alle Knoten dieser Kantenfolge mit Ausnahme von v voneinander verschieden sind und keine Kante mehrfach vorkommt.

Eine geschlossene Kantenfolge $K(v, v)$ in einem gerichteten Graphen heißt **Zyklus**, wenn alle Knoten dieser Kantenfolge mit Ausnahme von v voneinander verschieden sind.

Die Erreichbarkeitsrelation kann nicht nur durch Kantenfolgen beschrieben werden.

SATZ 7.8. Werden in einem Graphen G zwei verschiedene Knoten v, w durch eine Kantenfolge verbunden, so gibt es auch einen Weg bzw. Bahn, der v mit w verbindet und nur Kanten aus der ursprünglichen Kantenfolge enthält.

Bei geschlossenen Kantenfolgen ist die Situation ein wenig differenzierter.

SATZ 7.9. Gibt es in einem ungerichteten Graphen zwei (verschiedenen) Knoten v, w und zwei verschiedene Wege, die diese Knoten verbinden, dann gibt einen Kreis positiver Länge, der nur Kanten aus diesen beiden Wegen enthält.

Gibt es in einem gerichteten Graphen G eine geschlossene Kantenfolge positiver Länge, so gibt es auch einen Zyklus positiver Länge, der nur Kanten aus der ursprünglichen geschlossenen Kantenfolge enthält.

1.4. Isomorphe Graphen.

DEFINITION 7.10. Zwei Graphen G_1, G_2 heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

gibt, so daß eine Kante (v, w) (bzw. $\langle v, w \rangle$) genau dann in $E(G_1)$ enthalten ist, wenn die Kante $(\phi(v), \phi(w))$ (bzw. $\langle \phi(v), \phi(w) \rangle$) in $E(G_2)$ enthalten ist.

Insbesondere heißt ein Isomorphismus $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$ auf einem Graphen $G = (V, E)$ **Automorphismus**. Die Menge aller Automorphismen $\text{Aut}(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte **Automorphismengruppe** von $G = (V, E)$.

1.5. Adjazenz- und Inzidenzmatrix.

DEFINITION 7.11. Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Die **Adjazenzmatrix** $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ist durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } (v_i, v_j) \in E(G) \text{ bzw. } \langle v_i, v_j \rangle \in E(G), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Man beachte, daß die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen immer symmetrisch ist.

Schlingen äußern sich in der Adjazenzmatrix durch Einträge 1 in der Diagonale. Schlichte Graphen haben daher eine symmetrische Adjazenzmatrix mit verschwindender Diagonale.

Es ist auch sinnvoll, Graphen mit Mehrfachkanten eine Adjazenzmatrix zuzuordnen, wo a_{ij} die Anzahl der Kanten von v_i nach v_j bezeichnet.

Mit Hilfe der Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen lassen sich direkt die Knotengrade ablesen.

SATZ 7.12. Sei $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ist G schlicht und ungerichtet, so gilt

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

Ist G gerichtet, so gilt entsprechend

$$d^+(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \text{und} \quad d^-(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

SATZ 7.13. Sei $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Dann ist der Eintrag $a_{ij}^{[k]}$ der k -ten Potenz der Adjazenzmatrix

$$A(G)^k = (a_{ij}^{[k]})_{1 \leq i, j \leq n}$$

die Anzahl der Kantenfolgen der Länge k von v_i nach v_j .

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich auch die **Erreichbarkeitsrelation** beschreiben.

SATZ 7.14. Sei $A(G) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen G mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und m Kanten. Weiters sei die Matrix $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ durch

$$C = \sum_{k=0}^{m-1} A(G)^k$$

gegeben. Dann ist v_j von v_i genau dann erreichbar, wenn $c_{ij} > 0$ ist.

DEFINITION 7.15. Sei G ein Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und Kantenmenge $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Die **Inzidenzmatrix** $B(G) = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ eines schlichten ungerichteten Graphen G ist durch

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Die **Inzidenzmatrix** $B(G) = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ eines gerichteten Graphen G ist durch

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \text{ ist,} \\ -1 & \text{wenn } v_i \text{ Endknoten von } e_j \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

1.6. Azyklische Graphen.

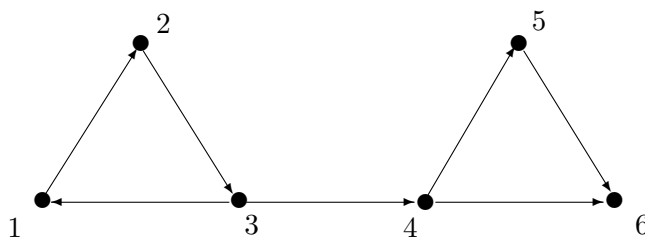
DEFINITION 7.16. Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **azyklisch** wenn er keine Zyklen (positiver Länge) enthält.

Der folgende **Markierungsalgorithmus** entscheidet, ob ein Graph azyklisch ist oder nicht.

- (1) (a) Bestimme alle Knoten v mit Weggrad $d^+(v) = 0$ und markiere diese mit \oplus .
(b) Wurde in 1.(a) kein solcher Knoten gefunden, so ist G **nicht azyklisch** \rightarrow **ENDE**.
- (2) (a) Sind bereits alle Knoten von G mit \oplus markiert, so ist G **azyklisch** \rightarrow **ENDE**.
(b) Suche (unmarkierte) Knoten, von denen nur Kanten zu schon markierten führen und markiere diese mit \oplus .
- (3) (a) Wurde in 2.(b) mindestens ein Knoten markiert, so wiederhole 2.
(b) Wurde in 2.(b) kein Knoten markiert, so ist G **nicht azyklisch** \rightarrow **ENDE**.

BEISPIEL 7.17. Wendet man den Markierungsalgorithmus auf den folgenden Graphen an, so durchläuft man folgende Schritte und markiert die angegebenen Punkte:

- 1.(a) $6 \rightarrow \oplus$
- 1.(b)
- 2.(a)
- 2.(b) $5 \rightarrow \oplus$
- 3.(a)



- 2.(a)
- 2.(b) $4 \rightarrow \oplus$
- 2.(a)
- 2.(b)
- 3.(a)
- 3.(b) G ist nicht azyklisch

Dem Markierungsalgorithmus liegt der folgende Satz zugrunde.

SATZ 7.18. *Jeder azyklische Graph G besitzt einen Knoten $v \in V(G)$ mit Weggrad $d^+(v) = 0$ (und entsprechend auch einen Knoten $w \in V(G)$ mit Eingrad $d^-(w) = 0$).*

Dieser Satz begründet zunächst einmal den Schritt 1.(b).

Weiters beachte man, daß die Knoten, die im Schritt 1.(a) (mit \oplus) markiert werden, sicherlich nicht in einem Zyklus liegen können, d.h. *streicht* man alle in diesem Schritt markierten Knoten und alle zu ihnen hinführenden Kanten, so entsteht ein kleinerer Graph G' , der genau dann azyklisch ist, wenn G azyklisch ist.

Im Schritt 2.(b) werden alle Knoten markiert, von denen nur Kanten zu bereits markierten führen. In G' sind dies aber genau jene Knoten $v' \in V(G')$, die in G' Weggrad $d_{G'}^+(v') = 0$ haben, d.h. 2.(b) ist nichts anderes als 1.(a) angewandt auf G' . Das sukzessive Markieren stellt daher ein *Abarbeiten* jener Knoten dar, die sicherlich in keinem Zyklus von G liegen.

Schließlich trifft einer der beiden folgenden Fälle zu:

- A. Es können alle Knoten markiert werden (Fall 2.(a)), d.h. kein Knoten von G liegt in einem Zyklus, der Graph G ist daher azyklisch.
- B. Es können nicht alle Knoten markiert werden (Fall 3.(b)), d.h. nach dem Entfernen von gewissen Knoten (die in keinem Zyklus von G liegen können) bleibt ein Graph G'' über, der keine Knoten $v'' \in V(G'')$ mit Weggrad $d_{G''}^+(v'') = 0$ besitzt. Nach Satz 7.18 ist G'' und damit auch G nicht azyklisch.

2. Zusammenhang von Graphen

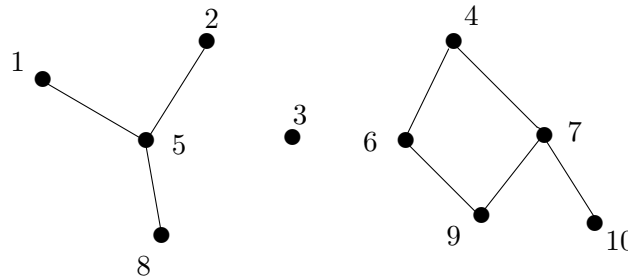
2.1. Ungerichtete Graphen.

DEFINITION 7.19. *Ein ungerichteter Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn es zwischen je zwei Knoten $v, w \in V(G)$ eine Kantenfolge $KF(v, w)$ (bzw. einen Weg $W(v, w)$) gibt.*

*Die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen eines ungerichteten Graphen G heißen (**Zusammenhangs-)** **Komponenten** von G .*

Ein Graph G ist daher genau dann zusammenhängend, wenn er nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht.

BEISPIEL 7.20. Die Zusammenhangskomponenten des folgenden Graphen



sind $K_1 = \{1, 2, 5, 8\}$, $K_2 = \{3\}$ und $K_3 = \{4, 6, 7, 9, 10\}$.

2.2. Gerichtete Graphen.

DEFINITION 7.21. Ein gerichteter Graph G heißt **stark zusammenhängend**, wenn für je zwei (verschiedene) Knoten $v, w \in V(G)$ eine (gerichtete) Kantenfolge $KF(v, w)$ (bzw. ein Bahn $W(v, w)$) existiert.

Die maximalen stark zusammenhängenden Teilgraphen eines gerichteten Graphen G heißen **starke Zusammenhangskomponenten** oder **Komponenten des starken Zusammenhangs** von G .

DEFINITION 7.22. Der Schatten G^u eines gerichteten Graphen G ist ein ungerichteter Graph mit der selben Knotenmenge wie G ($V(G^u) = V(G)$) und (v, w) ist eine (ungerichtete) Kante von G^u , wenn $\langle v, w \rangle$ oder $\langle w, v \rangle$ in $E(G)$ enthalten sind, d.h. gerichtete Kanten werden einfach durch ungerichtete ersetzt.

Ein gerichteter Graph G heißt **schwach zusammenhängend**, wenn der Schatten G^u zusammenhängend ist. Entsprechend sind die **schwachen Zusammenhangskomponenten** die Komponenten von G^u .

Die Komponenten des schwachen Zusammenhangs können daher wie im ungerichteten Fall bestimmt werden.

DEFINITION 7.23. Sei G ein gerichteter Graph, und bezeichnen K_1, K_2, \dots, K_r die Komponenten des starken Zusammenhangs. Die **Reduktion** $G_R = (V(G_R), E(G_R))$ ist jener (gerichtete) Graph mit Knotenmenge

$$V(G_R) = \{K_1, K_2, \dots, K_r\},$$

wobei eine (gerichtete) Kante $\langle K_i, K_j \rangle$ ($i \neq j$) genau dann in $E(G_R)$ enthalten ist, wenn es Knoten $v \in K_i$ und $w \in K_j$ mit $\langle v, w \rangle \in E(G)$ gibt.

SATZ 7.24. Die Reduktion G_R eines gerichteten Graphen G ist ein azyklischer Graph.

DEFINITION 7.25. Eine **Knotenbasis** B eines gerichteten Graphen G ist eine Teilmenge $B \subseteq V(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Zu jedem Knoten $v \in V(G)$ gibt es einen Knoten $b \in B$ und einen Weg $W(b, v)$.
- (2) B ist minimal bezüglich der Eigenschaft 1., d.h. jede echte Teilmenge $B' \subseteq B$ (mit $B' \neq B$) erfüllt 1. nicht.

Für azyklische Graphen läßt sich eine (die) Knotenbasis sehr einfach ermitteln.

SATZ 7.26. $B = \{v \in V(G) \mid d^-(v) = 0\}$ ist die einzige Knotenbasis eines azyklischen Graphen G .

Man beachte, daß wegen Satz 7.18 die so definierte Menge B in einem azyklischen Graphen nichtleer ist.

SATZ 7.27. Sei G ein gerichteter Graph, und bezeichnen K_1, K_2, \dots, K_l jene Komponenten des starken Zusammenhangs von G mit Hingrad

$$d_{G_R}^-(K_j) = 0 \quad (1 \leq j \leq l),$$

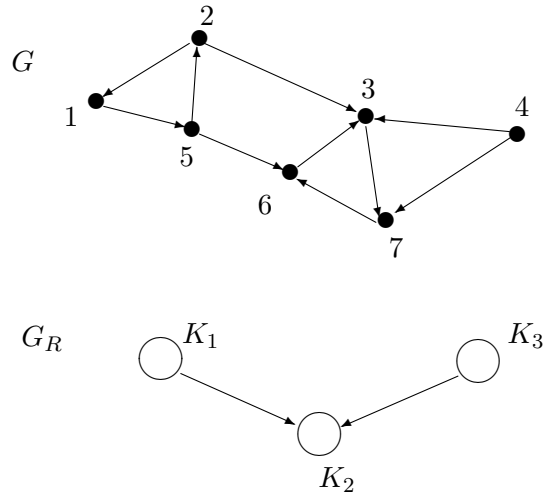
d.h. $B_R = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ bilden die Knotenbasis von G_R . Ist $v_1 \in K_1, v_2 \in K_2, \dots, v_l \in K_l$ eine beliebige Auswahl von Knoten v_j aus diesen Komponenten, so ist

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$$

eine Knotenbasis von G . Weiters erhält man auf diese Art und Weise alle Knotenbasen von G .

KOROLLAR 7.28. Alle Knotenbasen eines gerichteten Graphen haben dieselbe Anzahl von Elementen.

BEISPIEL 7.29. Im folgenden Graphen G sind die Komponenten des starken Zusammenhangs $K_1 = \{1, 2, 5\}$, $K_2 = \{3, 6, 7\}$ und $K_3 = \{4\}$. Damit hat die Reduktion G_R die angegebene Gestalt.



$B_R = \{K_1, K_3\}$ ist die Knotenbasis von G_R . Damit sind $B_1 = \{1, 4\}$, $B_2 = \{2, 4\}$ und $B_3 = \{5, 4\}$ alle Knotenbasen von G .

DEFINITION 7.30. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$, $X \subseteq V \cup E$. Falls alle Wege, die einen Knoten $x \in A$ mit einem Knoten $y \in B$ verbinden, einen Knoten oder eine Kante aus X enthalten, so sagen wir, daß X die Mengen A und B **trennt**. Insbesondere gilt dann $X \supseteq A \cap B$. Wir sagen, X trennt G , wenn es zwei Knoten x und y gibt, sodaß X die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ trennt.

Falls eine einelementige Knotenmenge $X = \{v\}$ mit $v \in V$ bzw. Kantenmenge $X = \{e\}$ mit $e \in E$ den Graphen G trennt, so heißt der Knoten v eine **Artikulation** bzw. die Kante e eine **Brücke** von G .

G heißt **k-zusammenhängend**, wenn G mehr als k Knoten besitzt und keine Knotenmenge, die weniger als k Elemente hat, G trennt. Die maximale Zahl k , sodaß G noch k -zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhang** von G und wird mit $\kappa(G)$ bezeichnet.

G heißt **ℓ -kantenzusammenhängend**, wenn G mehr als 2 Knoten besitzt und keine Kantenmenge, die weniger als ℓ Elemente hat, G trennt. Die maximale Zahl ℓ , sodaß G noch

ℓ -kantenzusammenhängend ist, heißt **Kantenzusammenhang** von G und wird mit $\lambda(G)$ bezeichnet.

Hoher Zusammenhang eines Graphen bedeutet, daß er viele Kanten haben muß, was zu einem hohen Minimalgrad führt. Dies quantifiziert der folgende Satz.

SATZ 7.31. Sei G ein Graph mit mindestens zwei Knoten. Dann gilt $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

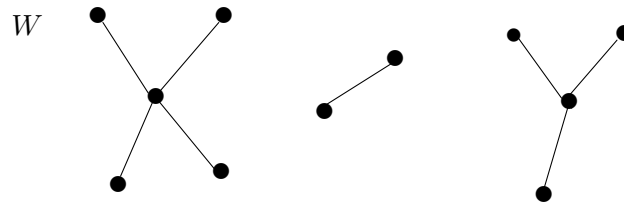
SATZ 7.32. Ein Graph G mit einem mittleren Knotengrad von mindestens $4k$ besitzt einen $(k+1)$ -zusammenhängenden Teilgraphen H mit $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$

2.3. Bäume und Wälder.

DEFINITION 7.33. Ein schlichter ungerichteter Graph W , der keine Kreise enthält, heißt **Wald**.

Ein Wald T , der auch zusammenhängend ist, heißt **Baum**.

Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind Bäume.



Man beachte, daß in einem Baum T zu je zwei Knoten v, w genau einen Weg $W(v, w)$ gibt. (Da T zusammenhängend ist, muß es es einen Weg $W(v, w)$ geben. Gäbe es aber einen weiteren von $W(v, w)$ verschiedenen Weg, $\tilde{W}(v, w)$, so müßte es auch einen Kreis positiver Länge, was aber definitionsgemäß ausgeschlossen ist.) Die Länge dieses Weges $W(v, w)$ bezeichnet man als den **Abstand** $d_T(v, w)$.

Bäume können auf verschiedene Arten charakterisiert werden:

SATZ 7.34. Sei T ein Graph. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) T ist ein Baum
- (2) Für je zwei Knoten $v, w \in V(T)$ existiert genau ein Weg $W(v, w)$ in T .
- (3) T ist zusammenhängend und diesbezüglich minimal, d.h., jede Kante ist eine Brücke von T .
- (4) T besitzt keine Kreise und ist diesbezüglich maximal, d.h., durch Hinzufügen einer Kante entsteht ein Kreis.

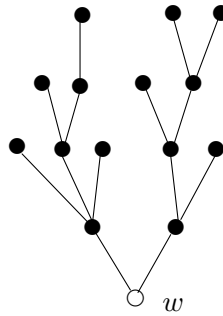
SATZ 7.35. Für einen Baum T gilt

$$\alpha_0(T) = \alpha_1(T) + 1.$$

Entsprechend gilt für einen Wald W mit k Komponenten

$$\alpha_0(W) = \alpha_1(W) + k.$$

Zeichnet man in einem Baum einen Knoten $w \in E(T)$ (**Wurzel**) aus, so kann man sich die Struktur eines Baumes sehr einfach verdeutlichen. Zeichnet man in einer graphischen Darstellung die Nachbarn von w oberhalb von w und deren Nachbarn (mit der Ausnahme w) wieder darüber usw., so entsteht tatsächlich ein Bild, das einem Baum ähnelt.



Man beachte, daß hier tatsächlich von jedem Knoten in neue Knoten verzweigt wird, da ein Baum definitionsgemäß kreisfrei ist.

DEFINITION 7.36. Ein Baum T , bei dem ein Knoten w (**Wurzel**) ausgezeichnet ist, heißt **Wurzelbaum**.

Knoten $v \in V(T)$, $v \neq w$, eines Wurzelbaumes T mit Knotengrad $d(v) = 1$ heißen **Endknoten**, **externe Knoten** oder **Blätter**. Alle anderen Knoten $v \in V(T)$ heißen **interne Knoten**.

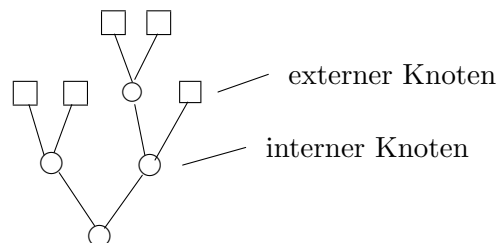
Ein **ebener Wurzelbaum** ist ein Wurzelbaum, bei dem die Links-Rechts-Reihenfolge der Nachfolgeäste der Wurzel wesentlich ist, z.B. sind werden die beiden Wurzelbäume



als verschieden betrachtet, obwohl sie natürlich denselben Graphen repräsentieren.

Der Vorteil von Wurzelbäumen ist, daß sie eine *rekursive Struktur* haben. Ist w' ein Nachbar von der Wurzel w , so bilden alle Knoten $v \in V(T)$, deren Verbindungsweg $W(v, w)$ zu w über w' führt, gemeinsam mit w' einen kleineren Wurzelbaum usw.

DEFINITION 7.37. Ein **Binärbaum** T ist ein ebener Wurzelbaum, bei dem jeder interne Knoten $v \in V(T)$ mit Ausnahme der Wurzel w Knotengrad $d(v) = 3$ und die Wurzel Knotengrad $d(w) = 2$ hat, d.h. jeder interne Knoten hat genau zwei Nachfolgeknoten.

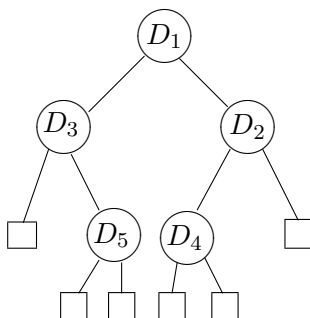


Binärbäume werden wegen ihres einfachen rekursiven Aufbaus als **Datenstrukturen** verwendet:

- (1) **Binärer Suchbaum:** Es sollen n Daten D_1, D_2, \dots, D_n , die mit n paarweise vergleichbaren *Schlüsseln* k_1, k_2, \dots, k_n versehen sind, in einem (noch aufzubauenden)

Binärbaum gespeichert werden. Zunächst wird D_1 als *Wurzel* verwendet. Nun nehme man an, die ersten j Daten D_1, D_2, \dots, D_j seien schon eingetragen, dann wird der Platz für D_{j+1} so bestimmt, daß man bei der Wurzel D_1 beginnend die Schlüssel miteinander vergleicht. Ist etwa $k_{j+1} < k_1$ so geht man (im Binärbaum) nach links weiter, und ist $k_{j+1} > k_1$ so geht man nach rechts weiter. Erreicht man jetzt einen weiteren Knoten D_i , so vergleicht man die Schlüssel k_{j+1} und k_i in derselben Art und Weise und setzt dieses Verfahren so lange fort bis man zu einem unbesetzten Knoten kommt. Dort trägt dort D_{j+1} ein.

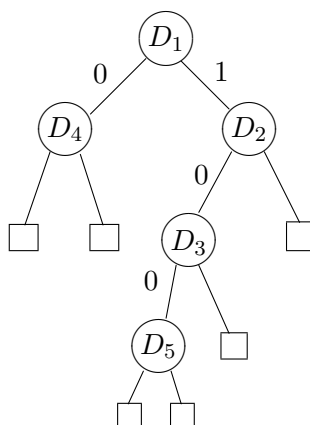
Sind etwa die Schlüssel der Datensätze D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 durch $k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 1, k_4 = 4, k_5 = 2$ gegeben, so erhält man folgenden Datenaufbau:



Die Daten D_1, D_2, \dots, D_n sind daher in den internen Knoten gespeichert.

- (2) **Digitaler Suchbaum:** Wieder sollen n Daten D_1, D_2, \dots, D_n gespeichert werden, wobei die Schlüssel k_j ($1 \leq j \leq n$) 0-1-Folgen sind. D_1 ist wie im binären Suchbaum die Wurzel. Die Platz der weiteren Datensätze D_j wird aber jetzt nicht durch Vergleich der Schlüssel gefunden, sondern man orientiert sich nur am Schlüssel k_j . Ist das erste bit 0, so geht man (bei der Wurzel beginnend) nach links weiter, ist das erste bit 1, so geht man nach rechts weiter. Im nächsten Schritt verwendet man das zweite bit in derselben Art und Weise. Dieses Verfahren führt man solange durch bis man einen freien Platz gefunden hat. Dort trägt man D_j ein.

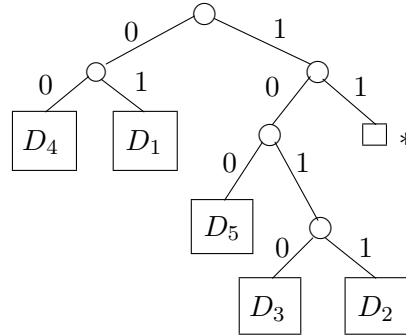
Haben die Datensätze D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 die Schlüssel $k_1 = 01101\dots, k_2 = 10110\dots, k_3 = 10100\dots, k_4 = 00101\dots, k_5 = 10010\dots$ so ergibt sich folgender auf der nächsten Seite dargestellter Datenaufbau.



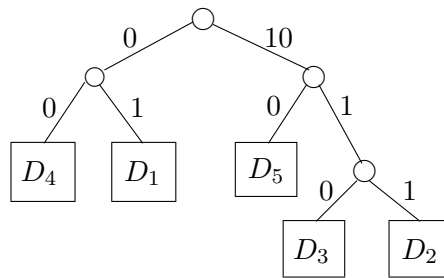
Man beachte, daß die Struktur eines binären bzw. digitalen Suchbaums von der Reihenfolge der Dateneinträge abhängt, der erste Datensatz wird z.B. immer als Wurzel verwendet.

- (3) **Tries:** Hier werden die Daten D_1, D_2, \dots, D_n nicht als interne Knoten eines Binärbaumes gespeichert, sondern in den externen Knoten. Die Schlüssel k_j ($1 \leq j \leq n$) sind wieder 0-1-Folgen. Die Position von D_j wird durch den kürzesten eindeutigen Anfangsabschnitt von k_j bestimmt, wobei 0 wieder *gehe nach links* und 1 *gehe nach rechts* bedeutet.

Verwendet man dieselben Schlüssel $k_1 = \underline{01101} \dots$, $k_2 = \underline{10110} \dots$, $k_3 = \underline{10100} \dots$, $k_4 = \underline{00101} \dots$, $k_5 = \underline{10010} \dots$ wie im letzten Beispiel (nur daß jetzt der kürzeste eindeutige Anfangsabschnitt der Übersicht halber unterstrichen wurde), so hat der zugehörige Trie die folgende Gestalt:



Der Baum ist bei Tries nicht mehr von der Reihenfolge der Daten abhängig. (Es ist bei einem Trie übrigens sehr einfach, neue Datensätze einzutragen. Die jeweiligen kürzesten eindeutigen Anfangsabschnitte müssen dabei nicht immer neu berechnet werden. Im Gegenteil, sie lassen sich aus dem entstandenen Trie ablesen.) Ein Nachteil des Trie ist, daß unbesetzte Endknoten (*) auftreten können. Dieser Nachteil kann dadurch behoben werden, daß *unnötige* Kanten *elminiert* werden, und man erhält den sogenannten **Patricia Trie**:



2.4. Spannende Bäume und Gerüste.

DEFINITION 7.38. Ein **spannender Baum** T eines schlichten ungerichteten zusammenhängenden Graphen G ist ein Baum mit $V(T) = V(G)$ und $E(T) \subseteq E(G)$, d.h. er enthält dieselben Knoten wie G und gewisse Kanten von G .

Ein **Gerüst** oder **spannender Wald** W eines schlichten ungerichteten Graphen G ist ein Wald mit $V(W) = V(G)$ und $E(W) \subseteq E(G)$ und denselben Zusammenhangskomponenten wie G , d.h. schränkt man W auf eine Zusammenhangskomponente K von G ein, so ist diese Einschränkung T ein spannender Baum von K .

SATZ 7.39 (Matrix-Baum-Theorem von Kirchhoff). Sei G ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph mit Knotenmenge $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und Adjazenzmatrix $A(G)$. Es bezeichne weiters $D(G)$ die Diagonalmatrix der Knotengrade $\text{diag}(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$, so ist jeder Kofaktor der Matrix

$$D(G) - A(G),$$

d.h. der Betrag einer beliebige $(n - 1) \times (n - 1)$ -Unterdeterminante dieser Matrix, die Anzahl der spannenden Bäume von G .

Ist G nicht zusammenhängende, so wendet man das Matrix-Baum-Theorem für jede Komponente an und multipliziert die Ergebnisse, um die Anzahl der Gerüste von G zu erhalten.

3. Eulersche und Hamiltonsche Linien

3.1. Eulersche Linien.

DEFINITION 7.40. Eine Kantenfolge in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G heißt **Eulersche Linie**, wenn sie jeden Knoten und jede Kante enthält, und zwar jede Kante genau einmal.

Bei einer **geschlossenen Eulerschen Linie** stimmen Anfangs- und Endknoten überein, bei einer **offenen Eulerschen Linie** sind sie verschieden.

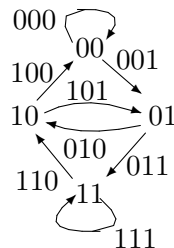
SATZ 7.41. Ein ungerichteter Graph G besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, wenn G zusammenhängend ist und alle Knotengrade $d(v)$ ($v \in V(G)$) gerade sind.

Ein ungerichteter Graph G besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn G zusammenhängend ist und mit der Ausnahme von zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$ (mit ungeradem Knotengrad) alle Knotengrade $d(v)$ ($v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$) gerade sind.

SATZ 7.42. Ein gerichteter Graph G besitzt genau dann eine geschlossene Eulersche Linie, wenn G schwach zusammenhängend ist und alle Knoten $v \in V(G)$ Hin- und Weggrad gleich sind: $d^+(v) = d^-(v)$.

Ein gerichteter Graph G besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn G schwach zusammenhängend ist und mit der Ausnahme von zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(G)$, für die $d^+(v_1) = d^-(v_1) + 1$ und $d^+(v_2) = d^-(v_2) - 1$ gilt, bei allen Knoten $v \in V(G) \setminus \{v_1, v_2\}$ Hin- und Weggrad gleich sind: $d^+(v) = d^-(v)$.

BEISPIEL 7.43. Die 0-1-Folge 00010111 der Länge 8 hat die Eigenschaft, daß sie (wenn man sie zyklisch fortsetzt) alle 8 0-1-Folgen der Länge 3 – 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 – als Teilblöcke auftreten. Folgen dieser Art können mit Hilfe einer Eulerschen Linie auf einem **De Bruijn-Graphen** konstruiert werden. In unserem Fall sind die Knoten die 0-1-Folgen der Länge 2, d.h. $V(G) = \{00, 01, 10, 11\}$, und zwei Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn die letzte Stelle des ersten Knoten mit der ersten des zweiten Knoten übereinstimmt.



Dadurch entsteht ein gerichteter Graph, wo alle Knoten v gleichen Hin- und Weggrad haben, nämlich $d^+(v) = d^-(v) = 2$. Daher gibt es eine geschlossene Eulersche Linie, die dann aus offensichtlichen Gründen einer Folge wie oben entspricht. Z.B. entspricht Der Folge 00010111 der Zyklus

$$00 \rightarrow 00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00.$$

3.2. Hamiltonsche Linien.

DEFINITION 7.44. Eine Kantenfolge in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G heißt **Hamiltonsche Linie**, wenn sie jeden Knoten (mit der möglichen Ausnahme, daß Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen) genau einmal enthält.

Bei einer **geschlossenen Hamiltonschen Linie** stimmen Anfangs- und Endknoten überein, bei einer **offenen Hamiltonschen Linie** sind sie verschieden.

Im Gegensatz zu den Eulerschen Linien gibt es (bis jetzt) noch kein allgemeines Kriterium für die Existenz von Hamiltonschen Linien. Es gibt aber viele Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Hamiltonschen Linie angeben. Als Beispiel dafür sei der folgende Satz angegeben.

SATZ 7.45. Sei G ein schlichter ungerichteter Graph mit n Knoten, so daß für alle Knotenpaare $x, y \in V(G)$, die in G nicht durch eine Kante verbunden sind, d.h. $(x, y) \notin E(G)$,

$$d(x) + d(y) \geq n$$

gilt. Dann gibt es in G eine geschlossene Hamiltonsche Linie.

4. Planare Graphen

4.1. Eulersche Polyederformel.

DEFINITION 7.46. Ein **Polygon** ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 , die die Vereinigung von endlich vielen Strecken ist und homöomorph zur eindimensionalen Sphäre S^1 (Kreislinie) ist. Ein **Polygonzug** ist eine Vereinigung von endlich vielen Strecken und homöomorph zum Einheitsintervall $[0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei P ein Polygonzug und $f : P \rightarrow [0, 1] \times \{0\}$ ein Homöomorphismus. Dann heißen die Punkte $f^{-1}(0, 0)$ und $f^{-1}(1, 0)$ **Endpunkte** des Polygonzugs P . Die anderen Punkte nennen wir das **Innere** von P .³

Sei $O \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $x, y \in O$. Wir definieren, daß x und y äquivalent sind ($x \sim y$), wenn es einen Polygonzug $P \subseteq O$ gibt, der x und y verbindet. Die Äquivalenzklassen von \sim heißen Gebiete.

Die für die Graphentheorie wesentlichen Eigenschaften von Polygonzügen bzw. Polygonen sind in den folgenden Sätzen zusammengefaßt.

SATZ 7.47 (Jordanscher Kurvensatz für Polygone). Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Dann besitzt $\mathbb{R}^2 \setminus P$ genau zwei Gebiete, deren Rand jeweils ganz P ist.

SATZ 7.48. Seien X_1 und X_2 disjunkte Mengen, die jeweils Vereinigung endlich vieler Polygonzüge sind. Weiters seien $x \in X_1$, $y \in X_2$ und P ein Polygonzug, der x und y verbindet. Darüberhinaus sei das Innere von P eine Teilmenge eines Gebietes O von $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$. Dann ist $O \setminus P$ ein Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus (P \cup X_1 \cup X_2)$.

³Dieser Begriff unterscheidet sich vom gleichnamigen topologischen Begriff.

DEFINITION 7.49. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **eben**, wenn

- (1) $V \subseteq \mathbb{R}^2$,
- (2) jede Kante $e \in E$ ein Polygonzug ist, der zwei Knoten $x, y \in V$ verbindet;
- (3) je zwei Kanten verschiedene Endpunkte besitzen;
- (4) jeder Knoten Endpunkt einer Kante ist;
- (5) der Durchschnitt zweier Kanten nur einen Endpunkt enthält oder leer ist.

Diese Definition besagt anschaulich, daß sich zwei Kanten des Graphen nicht kreuzen dürfen. Durch einen ebenen Graphen wird die Ebene in eine endliche Anzahl von Gebieten zerlegt, da wegen des Jordanschen Kurvensatzes für jeden ebenen Graphen G die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus G$ eine offene Menge ist. Es stellt sich heraus, daß diese Anzahl unabhängig davon ist, wie man G in der Ebene kreuzungsfrei repräsentiert, d.h. isomorphe ebene Graphen haben dieselbe Anzahl von Gebieten. Man bezeichnet diese Anzahl mit $\alpha_2(G)$.

Aus Satz 7.48 folgt beispielsweise, daß ein ebener Wald genau ein Gebiet besitzt.

SATZ 7.50. Sei G ein ebener Graph, e eine Kante von G und f ein Gebiet von G . Dann gilt:

- (1) Die Kante e ist entweder Teilmenge des Randes von f oder ihr Inneres und der Rand von f sind disjunkt.
- (2) Die Kante e ist Teilmenge des Randes von höchstens zwei verschiedenen Gebieten.

Der Rand eines Gebiets eines ebenen Graphen besteht also aus Kanten dieses Graphen.

DEFINITION 7.51. Ein Graph G heißt **planar**, wenn G kreuzungsfrei in der Ebene \mathbb{R}^2 dargestellt werden kann, d.h., es gibt einen ebenen Graphen, der zu G isomorph ist.

SATZ 7.52 (Eulersche Polyederformel). Für einen zusammenhängenden planaren Graphen G gilt

$$\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = 2.$$

Durch Projektion eines konvexen Polyeders P (Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen im \mathbb{R}^3) auf eine im Inneren des Polyeders liegende Kugel erhält man auf der Kugeloberfläche eine kreuzungsfreie Darstellung eines Graphen G , der dieselbe Anzahl von Knoten, Kanten und Gebieten hat wie das Polyeder Eckpunkte, Kanten und Flächen. Projiziert man nun die Kugeloberfläche mittels stereographischer Projektion auf die Ebene (wobei als *Nordpol* weder ein Knotenpunkt noch ein Punkt einer Kante des Graphen auf der Kugeloberfläche verwendet werden darf) so wird die kreuzungsfreie Darstellung des Graphen G auf der Kugeloberfläche auf eine kreuzungsfreie Darstellung von G in der Ebene projiziert. Natürlich bleibt auch bei dieser Projektion die Anzahl der Knoten, Kanten und Gebiete gleich. Daher gilt auch

$$\alpha_0(P) - \alpha_1(P) + \alpha_2(P) = 2,$$

wobei $\alpha_0(P)$ die Anzahl der Eckpunkte, $\alpha_1(P)$ die Anzahl der Kanten und $\alpha_2(P)$ die Anzahl der Flächen des Polyeders P bezeichnen.

Aus der eben geführten Überlegung ergibt sich auch die folgende Eigenschaft.

SATZ 7.53. Ein Graph läßt sich genau dann kreuzungsfrei in der Ebene darstellen, wenn er kreuzungsfrei auf einer Kugeloberfläche darstellbar ist.

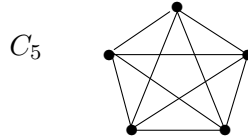
4.2. Satz von Kuratowski.

DEFINITION 7.54. Der **vollständige Graph** C_n ist ein schlichter ungerichteter Graph mit n Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden ist.

LEMMA 7.55. Für einen schlichten, zusammenhängenden, planaren Graphen G gilt

$$\alpha_1(G) \leq 3\alpha_0(G) - 6.$$

SATZ 7.56. Der vollständige Graph C_5 ist nicht planar.



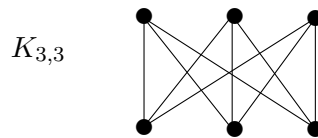
DEFINITION 7.57. Ein (ungerichteter) Graph G heißt **paarer Graph**, wenn dessen Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so daß alle Kanten nur zwischen V_1 und V_2 verlaufen.

Der **vollständige paare Graph** $K_{m,n}$ ($m, n \geq 1$) ist ein schlichter paarer Graph mit $m + n$ Knoten $V(G) = V_1 \cup V_2$, wobei V_1 m Knoten und V_2 n Knoten enthält und jeder Knoten aus V_1 mit allen Knoten aus V_2 durch eine Kante verbunden ist.

LEMMA 7.58. Für einen einfachen, planaren Graphen G mit der Eigenschaft, daß jeder Kreis Länge ≥ 4 hat gilt

$$\alpha_1(G) \leq 2\alpha_0(G) - 4.$$

SATZ 7.59. Der vollständige paare Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.



DEFINITION 7.60. Ein Graph H heißt **Unterteilung** eines Graphen G , wenn H aus G dadurch hervorgeht, wenn in einer oder in mehreren Kanten von G zusätzliche Knoten eingefügt werden.

SATZ 7.61 (Satz von Kuratowski). Eine Graph G ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der aus C_5 oder $K_{3,3}$ durch eventuelle Unterteilung (von Kanten) entsteht.

4.3. Duale Graphen.

DEFINITION 7.62. Sei G ein in die Ebene \mathbb{R}^2 eingebetteter ungerichteter planarer Graph ohne Schlingen, und es bezeichne F die Menge der Gebiete der Ebene \mathbb{R}^2 , die durch den eingebetteten Graphen festgelegt werden.

Der **duale Graph** G^* von G hat als Knotenmenge $V(G^*) = F$ und ein Paar (f_1, f_2) von verschiedenen Gebieten $f_1, f_2 \in F$ bilden eine Kante von G^* , wenn f_1, f_2 eine gemeinsame begrenzende Kante $e \in E(G)$ haben.

Man beachte, daß, wenn es keine Knoten vom Grad ≤ 2 gibt, die Kantenmengen von G und G^* dadurch bijektiv aufeinander abgebildet werden, insbesondere gilt neben der Eigenschaft $\alpha_1(G^*) = \alpha_1(G)$ auch die Gleichheit $\alpha_0(G^*) = \alpha_2(G)$. Es gilt sogar $\alpha_2(G^*) = \alpha_0(G)$, was aus dem folgenden Satz abgeleitet werden kann.

SATZ 7.63. Sei G ein in die Ebene \mathbb{R}^2 eingebetteter ungerichteter planarer Graph ohne Schlingen und ohne Knoten vom Grad ≤ 2 . Dann ist der duale Graph G^* auch planar mit einer durch die Konstruktion natürlichen Einbettung in die Ebene \mathbb{R}^2 . Weiters ist der biduale Graph G^{**} in natürlicher Weise isomorph zu G .

Es gibt noch weitere interessante Eigenschaften von planaren Graphen, wie den **Vierfarbensatz**, der aussagt, daß es möglich ist, die Gebiete eines in die Ebene eingebetteten planaren Graphen immer mit nur vier Farben färben kann, so daß je zwei aneinandergrenzende Gebiete (d.h. die eine gemeinsame begrenzende Kante besitzen) verschieden gefärbt sind. Dieser Satz wird in nächsten Abschnitt über **Färbungen** genauer besprochen.

5. Färbungen und Matchings

5.1. Chromatische Zahl.

DEFINITION 7.64. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph. Eine **Färbung** ist eine Abbildung $c : V \rightarrow R$ (in eine Menge R von "Farben").

Eine Färbung $c : V \rightarrow R$ heißt **zulässig**, wenn für alle Kanten $e = (x, y) \in E$

$$c(x) \neq c(y)$$

gilt, d.h. benachbarte Knoten sind verschieden gefärbt.

Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung der Knoten von G gibt.

Analog könnte man auch *zulässige Kantenfärbungen* definieren. Dies ist jedoch nicht notwendig. Ordnet man einem Graphen $G = (V, E)$ einen Graphen \bar{G} mit Knotenmenge $V(\bar{G}) = E$ und

$$(e_1, e_2) \in E(\bar{G}) : \iff e_1 \neq e_2 \wedge \exists x, y, z \in V : e_1 = (x, y) \wedge e_2 = (x, z),$$

so entspricht einer zulässigen Kantenfärbung von G eine zulässige Knotenfärbung von \bar{G} .

Das Bestimmen der chromatischen Zahl $\chi(G)$ ist nur in den wenigsten Fällen einfach.

SATZ 7.65. Für jeden schlichten ungerichteten Graphen $G = (V; E)$ gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{v \in V} d(v).$$

SATZ 7.66. Ein schlichter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist genau dann mit ≤ 2 Farben zulässig färbbar (d.h. $\chi(G) \leq 2$), wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Graphen $G = (V, E)$ mit chromatischer Zahl $\chi(G) \leq 2$ heißen auch **paare Graphen**. Diese sind ja dadurch charakterisiert, daß die Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen V_1, V_2 zerlegt werden kann, so daß es keine Kanten gibt, die Knoten innerhalb von V_1 verbinden und keine Kanten, die Knoten innerhalb von V_2 verbinden, d.h. man erhält eine zulässige Färbung mit 2 Farben, indem man alle Knoten aus V_1 mit der ersten Farbe färbt und alle Knoten aus V_2 mit der zweiten Farbe.

Eine detaillierte Information über die Anzahl aller möglichen Färbungen gibt das chromatische Polynom.

DEFINITION 7.67. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph mit $|V| = n$ Knoten. Für jede natürliche Zahl $\lambda \geq 1$ bezeichne c_λ die Anzahl der verschiedenen zulässigen Färbungen von G mit $\leq \lambda$ Farben.

Das **chromatische Polynom** von G ist ein Polynom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n mit

$$P(\lambda) = c_\lambda$$

für alle natürlichen Zahlen $\lambda \geq 1$.

SATZ 7.68. Für jeden schlichten ungerichteten Graphen G gibt es ein eindeutig bestimmtes chromatisches Polynom.

BEISPIEL 7.69. Das chromatische Polynom eines **Dreiecks** ist

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

BEISPIEL 7.70. Das chromatische Polynom eines Baumes mit n Knoten ist

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

Offensichtlich kann aus dem chromatischen Polynom die chromatische Zahl ermittelt werden:

$$\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N}^+ \mid P(\lambda) \neq 0\}.$$

5.2. Vierfarbensatz.

Der **Vierfarbensatz** lautet, daß es bei einem in die Ebenen eingebetteten planaren Graphen möglich ist, die dadurch entstehenden Gebiete mit nur vier Farben so zu färben, daß keine zwei Gebiete, die durch eine gemeinsame Kante begrenzt werden, gleich gefärbt sind, d.h. es gibt eine zulässige Färbung der Gebiete mit vier Farben.

Interpretiert man diese Färbung der Gebiete als Knotenfärbung des dualen Graphen und benützt man die Tatsache, daß alle planaren Graphen (ohne Knoten mit Grad ≤ 2 , die ja bei Färbungsproblemen mit ≥ 3 Farben sowieso keine Rolle spielen) als duale Graphen auftreten, so kann der Vierfarbensatz auch folgendermaßen umformuliert werden.

SATZ 7.71. Für jeden planaren Graphen G gilt

$$\chi(G) \leq 4.$$

Der Beweis dieses Satztes ist außerordentlich schwierig und wurde erstmals von Appel und Haken mit intensiver Computerunterstützung bewiesen. Hingegen ist es möglich, mit ganz elementaren Mitteln

$$\chi(G) \leq 5$$

zu beweisen.

5.3. Matchings.

DEFINITION 7.72. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph. Ein **Matching** M ist eine Teilmenge der Kanten E , so daß keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten haben.

Ein Matching M heißt **maximal**, wenn die Kardinalität $|M|$ unter allen Matchings von G größtmöglich ist.

Ein Matching entspricht daher einer Auswahl von paarweise disjunkten zweielementiger Teilmengen der Knoten, die jeweils durch eine Kante verbunden sind.

DEFINITION 7.73. Sei M ein Matching eines schlichten ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Ein Weg W in G heißt **alternierend**, wenn die Kanten in W abwechselnd in M und $E \setminus M$ liegen.

Eine alternierender Weg W heißt **erweiternd**, wenn sowohl Anfangs-, als auch Endknoten von W zu keiner Kante aus M gehören.

Mit Hilfe von erweiternden alternierenden Wegen können Matchings vergrößert werden.

LEMMA 7.74. *Ist M Matching eines schlichten ungerichteten Graphen G und W ein erweiternder alternierender Weg in G , dann ist $M' := M \Delta W$ ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$ Kanten.*

Damit ergibt sich die folgende Charakterisierung von maximalen Matchings.

SATZ 7.75. *Ein Matching M eines schlichten ungerichteten Graphen G ist genau dann maximal, wenn es keinen erweiternden alternierenden Weg gibt.*

Bei paaren Graphen können genauere Antworten gegeben werden.

DEFINITION 7.76. *Sei G ein paarer Graph, d.h. G ist ein schlichter ungerichteter Graph, dessen Knotenmenge $V(G)$ in zwei disjunkte Teilmengen V_1, V_2 zerlegt ist, so daß es keine Kanten gibt, die Knoten innerhalb von V_1 verbinden und keine Kanten, die Knoten innerhalb von V_2 verbinden.*

Die **Defizienz** $D(G)$ von G ist durch

$$D(G) := \max_{A \subseteq V_1} (|A| - |\Gamma(A)|)$$

definiert.

Man beachte, daß wegen $|\emptyset| - |\Gamma(\emptyset)| = 0$ die Defizienz $D(G) \geq 0$ ist.

SATZ 7.77. *Sei G ein paarer Graph mit Knotenmenge $V(G) = V_1 \cup V_2$. Dann ist die Größe eines maximalen Matchings*

$$|V_1| - D(G).$$

Man beachte, daß der **Heiratssatz** ein Spezialfall dieses Satzes ($D(G) = 0$) ist.

Insbesondere können in einem paaren Graphen auch **vollständige Matchings** charakterisiert werden. (Ein Matching heißt vollständig, wenn alle Knoten zu einer Kante des Matchings gehören.) Wegen des Heiratssatzes gibt es genau dann ein vollständiges Matching, wenn $|V_1| = |V_2|$ ist und für alle $A \subseteq V_1$

$$|\Gamma(A)| \geq |A|$$

erfüllt ist.

6. Kreise und Schnitte

DEFINITION 7.78. *Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph mit $|E| = m$ Kanten. Die Menge $\mathcal{V}(G) = \{f : V \rightarrow \mathbb{Z}_2\}$ wird als **Knotenraum** und $\mathcal{E}(G) = \{f : E \rightarrow \mathbb{Z}_2\}$ als **Kantenraum** bezeichnet. Knoten- und Kantenraum bilden Vektorräume über \mathbb{Z}_2 . Das neutrale Element ist jeweils die leere Menge \emptyset und jedes Element ist zu sich selbst invers.*

Daß der Knoten- und der Kantenraum tatsächlich Vektorräume sind, sieht man am einfachsten aus der Isomorphie zu $\mathbb{Z}_2^{\alpha_0(G)}$ bzw. $\mathbb{Z}_2^{\alpha_1(G)}$.

DEFINITION 7.79. *Der von den Kreisen erzeugte Unterraum von $\mathcal{E}(G)$ wird als **Kreisraum** $\mathcal{C}(G)$ von G bezeichnet.*

SATZ 7.80. *Die Menge der induzierten Kreise erzeugt den Kreisraum.*

SATZ 7.81. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $F \subseteq E$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) $F \in \mathcal{C}(G)$
- (2) F ist Vereinigung von disjunkten Kreisen von G .
- (3) Im Graphen $H = (V, F)$ sind alle Knotengrade gerade.

DEFINITION 7.82. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter Graph. Weiters sei V_1, V_2 eine Zerlegung von V , d.h. $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und $V_1 \cup V_2 = V$. Unter dem **Schnitt** $S = E(V_1, V_2)$ von G versteht man die Menge von Kanten

$$S = E(V_1, V_2) := \{(v, w) \in E \mid v \in V_1, w \in V_2\}.$$

d.h. die Kanten, die zwischen V_1 und V_2 bestehen.

Schnitte und Kreise eines schlichten ungerichteten zusammenhängenden Graphen haben erstaunliche Parallelen. Einige sind im folgenden Satz zusammengestellt. (Dabei bezeichne Δ die symmetrische Differenz.)

SATZ 7.83. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

- (1) Sei T ein spannender Baum von G und S ein Schnitt von G . Dann ist $E(T) \cap S \neq \emptyset$, d.h. jeder Schnitt hat mit jedem spannenden Baum wenigstens eine Kante gemeinsam.
- (2) Sei T ein spannender Baum von G und K ein Kreis in G . Dann ist $(E \setminus E(T)) \cap K \neq \emptyset$.
- (3) Sei S ein Schnitt von G und K ein Kreis in G . Dann ist $|S \cap K|$ eine gerade Zahl.
- (4) Sind S_1, S_2 zwei verschiedene Schnitte von G , dann ist $S_1 \Delta S_2$ wieder ein Schnitt von G .
- (5) Sind K_1, K_2 zwei verschiedene Kreise in G , dann ist $K_1 \Delta K_2$ entweder wieder ein Kreis oder die disjunkte Vereinigung von mehreren Kreisen.

DEFINITION 7.84. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter ungerichteter zusammenhängender Graph. Ein **verallgemeinerter Schnitt** von G ist entweder die leere Menge oder ein Schnitt. Die Menge aller verallgemeinerter Schnitte wird als **Schnittraum** $\mathcal{C}^*(G)$ von G bezeichnet.

SATZ 7.85. Der Schnittraum eines ungerichteten schlichten Graphen (V, E) ist ein Unterraum des Kantenraums und die Menge $\{E(\{v\}, V \setminus \{v\})\}$ ist ein Erzeugendensystem des Schnittraums.

LEMMA 7.86. Jeder Schnitt ist disjunkte Vereinigung von minimalen Schnitten.

SATZ 7.87. Schnittraum und Kreisraum bilden orthogonale Komplemente bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathcal{E}(G)$.

DEFINITION 7.88. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, T ein spannender Baum von T und $e \in E \setminus E(T)$. Fügt man dem spannenden Baum T die Kante e hinzu, so entsteht ein Kreis C_e . Die Kreise C_e werden als **Fundamentalkreise** von G zu T bezeichnet.

Sei nun $e \in E(T)$. Entfernt man die Kante e aus T , so zerfällt T in zwei Komponenten K_1 und K_2 . Die Schnitte $D_e := E(V(K_1), V(K_2))$ werden als **Fundamentalschnitte** bezeichnet.

SATZ 7.89. Sei $G = (V, E)$ ein schlichter, ungerichteter und zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten. Weiters sei T ein spannender Baum von G . Dann ist die Menge der Fundamentalkreise eine Basis von $\mathcal{C}(G)$ und die Menge der Fundamentalschnitte eine Basis von $\mathcal{C}^*(G)$. Weiters gilt $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$ und $\dim \mathcal{C}^*(G) = n - 1$.

Eine Anwendung dieser Theorie bildet die Theorie linearer (elektrischer) Schaltkreise mit den **Kirchhoffsche Gesetzen**. Hier muß allerdings der Kantenraum über \mathbb{R} (oder \mathbb{C}) betrachtet werden (was in ähnlicher Weise wie oben durchgeführt werden kann, allerdings muß auf G eine beliebige, aber feste Orientierung gewählt werden.) Die elektrischen Ströme auf den Kanten

und die Spannungen zwischen zwei benachbarten Knoten werden dann als Vektoren des Kantenraums interpretiert, wobei sich herausstellt, daß eine zulässige Stromverteilung (die also den Kirchhoffschen Gesetzen genügt) ein verallgemeinerter Kreis ist und eine zulässige Spannungsverteilung ein verallgemeinerter Schnitt. Die oben angegebenen Dimensionen für diese Räume geben also an, wie viele verschiedene Gleichungen für die zu ermittelten Strome und Spannungen *aufgestellt* werden müssen, um alle Größen berechnen zu können.

7. Erzeugende Funktionen von Graphen

7.1. Ungerichtete Graphen.

SATZ 7.90. *Es sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Menge von n Knoten. Dann ist die Anzahl T_{nm} der verschiedenen schlichten ungerichteten Graphen G mit $V(G) = V$ und m Kanten durch*

$$T_{nm} = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

gegeben. Die (gemischte) erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} T_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \sum_{n \geq 0} (1+y) \binom{n}{2} \frac{x^n}{n!}.$$

Bezeichnet C_{nm} die Anzahl der verschiedenen zusammenhängenden schlichten ungerichteten Graphen, so gilt auch

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} C_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \log \left(\sum_{n \geq 0} (1+y) \binom{n}{2} \frac{x^n}{n!} \right).$$

7.2. Gerichtete Graphen.

SATZ 7.91. *Es sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Menge von n Knoten. Dann ist die Anzahl T_{nm} der verschiedenen schlichten gerichteten Graphen G mit $V(G) = V$ und m Kanten durch*

$$T_{nm} = \binom{n(n-1)}{m}$$

gegeben. Die (gemischte) erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} T_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \sum_{n \geq 0} (1+y)^{n(n-1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Bezeichnet C_{nm} die Anzahl der verschiedenen zusammenhängenden schlichten gerichteten Graphen, so gilt auch

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} C_{nm} \frac{x^n}{n!} y^m = \log \left(\sum_{n \geq 0} (1+y)^{n(n-1)} \frac{x^n}{n!} \right).$$

7.3. Markierte Bäume.

SATZ 7.92. *Es sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Menge von n Knoten. Dann ist die Anzahl T_n der verschiedenen Bäume T mit $V(T) = V$ durch*

$$T_n = n^{n-2}$$

gegeben. Die exponentielle erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} T_n \frac{x^n}{n!} = \hat{r}(x) - \frac{1}{2} \hat{r}(x)^2,$$

wobei $\hat{r}(x)$ die Gleichung

$$\hat{r}(x) = x e^{\hat{r}(x)}$$

erfüllt.

7.4. Unmarkierte Bäume — der Satz von Otter.

SATZ 7.93. Es sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Menge von n Knoten und \mathcal{T}_n die Menge der Bäume T mit $V(T) = V$. Weiters sei \tilde{T}_n die Anzahl der Isomorphieklassen in \mathcal{T}_n . Die gewöhnliche erzeugende Funktion dieser Anzahlen ist

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{T}_n \frac{x^n}{n!} = r(x) - \frac{1}{2} (r(x)^2 - r(x^2))$$

gegeben, wobei $r(x)$ die Gleichung

$$r(x) = x e^{r(x) + \frac{1}{2} r(x^2) + \frac{1}{3} r(x^3) + \dots}$$

erfüllt.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner, *Kombinatorik I, II*, Springer, Berlin, 1975, 1976.
- [2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [3] N. Chistofides, *Graph Theory, An Algorithmic Approach*, Academic Press, New York, 1975.
- [4] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer, Berlin 2006.
- [5] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.
- [6] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962.
- [7] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, Dover, 2004.
- [8] F. Harary and E. M. Palmer, *Graphical Enumeration* Academic Press, New York, 1973.
- [9] W. G. Kelley and A. C. Peterson, *Difference Equations*, Academic Press, 1991.
- [10] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [11] R. Mickens, *Difference Equations*, van Nostrand, New York, 1990.
- [12] V. N. Sachkov, *Combinatorial Methods in Discrete Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [13] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume I*, Wadsworth & Brooks, Monterey, 1986.
- [14] W. T. Tutte, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Readings, 1984.
- [15] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [16] H. Walther und G. Nagler, *Graphen - Algorithmen - Programme*, Springer, Wien, 1987.

Index

- ℓ -kantenzusammenhängend, 83
- k -zusammenhängend, 83

- Ableitungsoperator, 32
- Abstand zweier Knoten, 83
- adjazente Knoten, 75
- Adjazenzmatrix, 78
- Algorithmus von Dijkstra, 98
- Algorithmus von Floyd-Warshall, 101
- Algorithmus von Ford und Fulkerson, 101, 103
- Algorithmus von Kruskal, 97
- Algorithmus von Moore, 100
- allgemeine Lösung einer linearen Rekursion, 3
- alternierender Weg, 93
- Anfangsknoten, 75
- Ansatzmethode, 3, 4
- arithmetische Funktion, 54, 59
- Artikulation, 83
- Auszeichnen, 22
- azyklischer Graph, 79

- Bahn, 77
- Baum, 83
- Bernoullipolynome, 45
- Bernoullizahlen, 45
- bewerteter Graph, 97
- Binärbäume, 19
- Binärbaum, 84
- binärer Suchbaum, 85
- Binomische Reihe, 9
- bivariate erzeugende Funktion, 39
- Blatt eines Baumes, 84
- Box-Produkt, 29
- Brücke, 83

- chromatische Polynom, 92
- chromatische Zahl, 91

- Datenstruktur, 84
- De Bruijn-Graph, 87
- Defizienz eines paaren Graphen, 93
- Dichte, 76
- Diedergruppe, 69
- Differentialoperator, 31
- Differenzoperator, 4
- digitaler Suchbaum, 85

- Dijkstra-Algorithmus, 98
- direkter Nachfolger, 65
- Dirichletsche Reihe, 63
- Distanz, 98
- doppelt stochastische Matrix, 54
- dualer Graph, 91

- ebener Graph, 89
- ebener Wurzelbaum, 84
- eigentliche arithmetische Funktion, 54
- einfacher Graph, 75
- Endknoten, 75
- Endknoten eines Baumes, 84
- Endpunkt, 88
- Euler-Mascheronische Konstante, 47
- Eulerprodukt, 64
- Eulersche Linie, 87
- Eulersche Polyederformel, 89
- exponentielle erzeugende Funktion, 21
- externer Knoten eines Baumes, 84

- Färbung eines Graphen, 91
- Faltung arithmetischer Funktionen, 54
- Fibonaccizahlen, 1
- Floyd-Warshall-Algorithmus, 101
- Fluß, 101, 105
- formale Ableitung, 16
- formale Potenzreihe, 15
- formale Topologie, 17
- Fundamentalkreis, 95
- Fundamentalschnitt, 95

- Gebiet, 89
- Gerüst, 87
- gerichtete Kante, 75
- gerichteter Graph, 75
- geschlossene Eulersche Linie, 87
- geschlossene Hamiltonsche Linie, 88
- geschlossene Kantenfolge, 77
- gewöhnliche erzeugende Funktion, 21
- gewöhnliche erzeugende Funktion, 7
- Graph, 75

- Halbordnung, 51
- Hamiltonsche Linie, 88
- harmonischen Zahlen, 47

- Hassediagramm, 51
 Heiratssatz, 53
 Hingrad, 76
 homogene Lösung, 5
 Homogene lineare Rekursion, 1

 induzierter Teilgraph, 76
 Inhomogene lineare Rekursion, 5
 Inklusions-Exklusions-Prinzip, 57
 interner Knoten eines Baumes, 84
 Inzidenzmatrix, 79
 isomorphe Graphen, 78
 Isomorphie (kombinatorischer Strukturen), 20

 Kante, 75
 Kantenfolge, 77
 Kantenraum, 94
 Kantenzug, 77
 Kantenzusammenhang, 83
 Kapazität eines Schnittes, 102
 Knoten, 75
 Knotenbasis, 81
 Knotengrad, 76
 Knotenraum, 94
 Koeffizienten einer Potenzreihe, 12, 15
 Kombinationen mit Wiederholung, 23
 Kombinationen ohne Wiederholung, 22
 kombinatorische Struktur, 20
 komplementärer Graph, 77
 Komponente, 81
 Komposition von Potenzreihen, 16
 Konvergenzabszisse, 63
 Kreis, 77
 Kreisraum, 94

 Länge einer Kantenfolge, 77
 Laguerrepolynome, 34
 leere Kantenfolge, 77
 Lemma von Burnside, 67
 lineare Ordnung, 51

 Markierungsalgorithmus, 79
 Matching, 53, 93
 Matrix-Baum-Theorem, 87
 maximales Matching, 93
 Mehrfachkante, 75
 Moore-Algorithmus, 100

 Nachbar eines Knotens, 75
 Nachfolger, 101
 Nachfolger eines Knoten, 76
 Netzwerk, 97
 Normale Polynomfamilie, 32
 Normale Polynomfamilie vom Binomialtyp, 33

 obere Schranke, 65
 offene Eulersche Linie, 87
 offene Hamiltonsche Linie, 88
 paarer Graph, 54, 90, 92

 Partialbruchzerlegung, 8
 partielle Ordnung, 51
 partikuläre Lösung, 5
 Partitionsprodukt, 27
 Patricia Trie, 86
 Permutationsmatrix, 54
 planarer Graph, 89
 Polygon, 88
 Polygonzug, 88
 Potenzsummen, 47
 Produkt kombinatorischer Strukturen, 21

 Quelle, 101

 Reduktion eines Graphen, 81
 Rekursionsgleichung, 1
 Riemannsche Zetafunktion, 63
 Rotationskorrespondenz, 25

 Satz von Dilworth, 53
 Satz von Kuratowski, 90
 Satz von Pólya, 71
 schlichter Graph, 75
 Schlinge, 75
 Schnitt, 102
 Schnitt eines Graphen, 94
 Schnittraum, 94
 schwach zusammenhängender Graph, 81
 schwache Zusammenhangskomponente, 81
 semimodularer Verband, 65
 Senke, 101
 spannender Baum, 87
 spannender Wald, 87
 stark zusammenhängender Graph, 81
 starke Zusammenhangskomponente, 81
 Stirlingzahlen, 36
 Stirlingzahlen 1. Art, 37
 Stirlingzahlen 2. Art, 35, 37
 Summe arithmetischer Funktionen, 54
 Summe kombinatorischer Strukturen, 21, 27
 Summenformel von Euler-McLaurin, 46
 Symmetriegruppe, 69

 Teilgraph, 76
 Totalordnung, 51
 translationsinvariant, 32
 Transversalsystem, 53
 trennende Menge, 82
 Trie, 85

 umbrale Komposition, 34
 unendliche untere Dreiecksmatrix, 35
 ungerichtete Kante, 75
 ungerichteter Graph, 75
 Unterteilung, 90

 verallgemeinerter binomische Lehrsatz, 33
 Verband, 65
 Verschiebungsoperator, 32
 Vierfarbensatz, 92

vollständiger Graph, 77, 90
vollständiger paarer Graph, 90
vollständiges Matching, 93
Vorgänger, 76, 101

wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion, 40
Wald, 83
Weg, 77
Weggrad, 76
Wurzel eines Baumes, 84
Wurzelbaum, 84

Zetafunktion einer Halbordnung, 55
zulässige Färbung eines Graphen, 91
zusammenhängender Graph, 80
Zusammenhang, 83
Zusammenhangskomponente, 81
Zyklentyp einer Permutation, 68
Zykenzeiger einer Permutationsgruppe, 68
Zyklus, 77