Zuname:

Vorname:

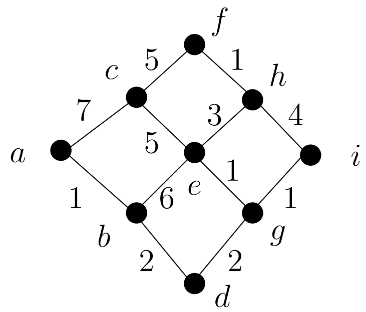
KennNr:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Man bestimme mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen kürzesten Weg von a nach h:



2)(8 P.) Man bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 2u &= 2 \\ x - y - z - u &= -2 \\ 7x + 3y + 8z - 12u &= 6 \\ 5x + 3y + 7z - 9u &= 6 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3)(8 P.) Man bestimme die kleinste Untergruppe von $(\mathbf{Z}, +)$, die die Zahlen 78 und –51 enthält.

—— Bitte wenden ——

4)(8 P.) Wie lassen sich jene Graphen charakterisieren, die Bäume sind? Geben Sie mindestens zwei Charakterisierungen an und begründen Sie deren Äquivalenz.

Was versteht man unter einem bewerteten Graph? Wie sind die Begriffe spannender Baum und minimaler spannender Baum definiert? Beschreiben Sie den Kruskalalgorithmus zur Bestimmung eines minimalen spannenden Baumes.

5)(8 P.) Was ist eine Reihe reeller Zahlen? Wie ist der Grenzwert einer solchen Reihe definiert? Wann heißt sie konvergent, wann absolut konvergent? Illustrieren Sie den Unterschied dieser beiden Begriffe anhand eines Beispiels.

Was versteht man unter einer Potenzreihe? Wie sieht das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe in $\mathbb{C}$ aus und wie läßt sich dessen Größe quantifizieren?

Wien, am 2. Februar 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Erklären Sie die Methode der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Identität:

$$\sum_{j=1}^{n} (j+1)(j-1) = \frac{1}{6} n(n-1)(2n+5), \; n \geq 1.$$

2)(8 P.) Beschreiben Sie die Symmetriegruppe G eines Quadrates und die Symmetriegruppe H eines Rechtecks. Untersuchen Sie, ob H ein Normalteiler von G ist und bestimmen Sie die (Links-)Nebenklassenzerlegung von G bzgl. H.

Hinweis: Die Gruppen G und H lassen sich als Permutationsgruppen der Eckpunkte auffassen.

3)(8 P.) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

differenzierbar? (Ihre Behauptungen müssen Sie auch begründen!) Berechnen Sie weiters die Ableitung von f.

4)(8 P.) Was versteht man unter der Determinate einer $n \times n$ Matrix A? Welche Eigenschaften besitzt die Determinante? Wie bestimmt man den Wert der Determinante im Fall $n = 3$ und wie kann man diesen geometrisch deuten? Was sagt die Determinante von A über A aus?

5)(8 P.) Seien M und N zwei Mengen. Was versteht man unter einer Funktion $f : M \to N$? Was bedeuten die Begriffe injektiv und surjektiv? Geben Sie je ein Beispiel einer injektiven und einer surjektiven Funktion für den Fall $M = N = \mathbb{R}$. Worin besteht der Unterschied zwischen einer Funktion $f : M \to N$ und einer Relation auf $M \times N$?

Wien, am 2. März 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Gegeben sind 3 Teilmengen A, B, C einer Menge D. Untersuchen Sie, ob die Beziehung

$$(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}$$

richtig ist, indem Sie einen Beweis angeben oder ein Gegenbeispiel konstruieren. Die Notation $\overline{M}$ bezeichnet das Komplement bezüglich D.

2)(8 P.) Man bestimme zu den Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

die Permutationen $\sigma \circ \rho$ und ρ^{-1} sowie deren Zyklendarstellungen und Vorzeichen.

3)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe des Inklusions-Exklusions-Prinzips die Anzahl aller Funktionen $f : \{1, .., 5\} \to \{1, .., 5\}$, deren Bildmenge $\{f(x) \mid 1 \leq x \leq 5\}$ die Kardinalität 3 hat.

4)(8 P.) Was versteht man unter der Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Wie ist die Ableitung von f definiert? Wie lassen sich diese beiden Begriffe anschaulich beschreiben? Wie hängen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zusammen? Verdeutlichen Sie diesen Zusammenhang durch ein Beispiel.

5)(8 P.) Gegeben sei eine Gruppe $(G, *)$. Wann heißt G abelsch? Geben Sie ein Beispiel einer nichtabelschen Gruppe (mit Begründung!). Wann nennt man G zyklisch? Sind zyklische Gruppen immer abelsch? (Begründung oder Gegenbeispiel)

Wien, am 27. April 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Bestimmen Sie für die komplexe Zahl

$$z = \frac{(4-7i)(1+3i)}{3-2i}$$

die exakten Werte für den Real- und den Imaginärteil von z^7.

2)(8 P.)
a) Wie viele Diagonalen hat ein regelmäßiges Elfeck?
b) Sei K_n der vollständige Graph mit 66 Kanten und n Knoten. Wie groß ist n?
c) Auf einer Party befinden sich Paare und Singles. Alle trinken ein Glas Sekt. Jeder Gast stößt mit jedem anderen Gast mit Ausnahme seines Partners/seiner Partnerin an (Singles stoßen also mit allen anderen Gästen an.) Insgesamt wird 100 mal angestoßen. Wieviele Personen und wieviele Paare sind auf dieser Party?

3)(8 P.) Man berechne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 3n + 3/n}{2n - 2n^2 + 2}.$$

Erläutern Sie die einzelnen Schritte der Berechnung: welche Rechenregeln und welche bekannten Grenzwerte verwenden Sie?

4)(8 P.) Was ist ein bewerteter Graph? Wozu dient der Disktra-Algorithmus? Welche Voraussetzung muß ein bewerteter Graph erfüllen, damit der Disktra-Algorithmus korrekt ist? Geben Sie ein Beispiel eines bewerteten Graphen an, wo diese Voraussetzung verletzt ist und der Algorithmus ein falsches Resultat liefert.

5)(8 P.) Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem? Wie funktioniert das Gaußsche Eliminationsverfahren? Beschreiben Sie die allgemeine Gestalt der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Wien, am 29. Juni 2007 (Ab hier freilassen!)

1) 4)

2) 5)

3)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} x^n$$

konvergiert.

Bemerkung: Beachten Sie auch die Fälle $x = 1$ und $x = -1$!

2)(8 P.) Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe eines geeigneten graphentheoretischen Modells. Beschreiben Sie zunächst das von Ihnen gewählte Modell und lösen Sie danach die Aufgabe.

a) Zeigen Sie, daß es in jeder Stadt mindestens zwei Bewohner mit der gleichen Anzahl von Nachbarn gibt.

b) 31 Freunde vereinbaren, daß jeder von ihnen an 15 andere Ansichtskarten schicken. Untersuchen Sie, ob das so geschehen kann, daß jeder denjenigen schreibt, die auch ihm geschrieben haben.

3)(8 P.) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$ ist gegeben durch xRy genau dann, wenn 3 ein Teiler von $x^2 - y^2$ ist. Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die durch R induzierte Partition auf $\mathbb{Z}$.

4)(8 P.) Seien $(G, \triangle)$ und $(H, \heartsuit)$ zwei Gruppen. Wie ist ein Homomorphismus definiert? Wann werden $(G, \triangle)$ und $(H, \heartsuit)$ isomorph genannt? Nennen Sie zwei verschiedene, aber isomorphe Untergruppen U_1 und U_2 der symmetrischen Gruppe S_3 und geben Sie einen Isomorphismus zwischen U_1 und U_2 konkret an.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A. Wie hängen die Spalten von A mit der Abbildung f zusammen? Wieviele Zeilen und wieviele Spalten besitzt A? (Begründung!) Warum kann f nicht surjektiv sein?

Wien, am 12. Oktober 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Man bestimme die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x) = x \sin x$ um die Anschlußstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (allgemeines Glied). Wie groß ist der Konvergenzradius der erhaltenen Potenzreihe?

Hinweis: Die Funktion $f(x)$ ist ein Produkt. Ihre Taylorreihe läßt sich daher als Cauchyprodukt darstellen!

2)(8 P.) Erklären Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Aussage: Für $n \geq 2$ läßt sich jede Permutation $\pi \in S_n$ als Produkt von Transpositionen darstellen.

Hinweis: Benützen Sie die Tatsache, daß jede Permutation in Zyklen zerlegt werden kann (Zyklendarstellung).

3)(8 P.) Man bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - 2u &= 1 \\ 2x + 3y + 4z + u &= 1 \\ 3x + 4y + 5z + 4u &= 1 \\ -2x - 3y + 7u &= 1 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

4)(8 P.) Seien n und k zwei natürliche Zahlen. Wie ist $\binom{n}{k}$ definiert? Welches kombinatorische Abzählproblem wird durch $\binom{n}{k}$ gelöst? Benützen Sie diese kombinatorische Interpretation von $\binom{n}{k}$, um die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ zu beweisen.

5)(8 P.) Was versteht man unter einer Folge reeller Zahlen? Was ist ein Häufungspunkt, was ein Grenzwert? Kann eine Folge mit zwei Häufungspunkten a und b mit $a \neq b$ einen Grenzwert besitzen? (Begründung!) Geben Sie eine Folge mit Folgengliedern aus $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ an, die genau die Zahlen $-1, 0, 1$ als Häufungspunkte besitzt.

Wien, am 30. November 2007 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix A und $\mathbf{a}$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^4$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob $\mathbf{a}$ im Bildraum $f(\mathbb{R}^4)$ liegt. Bestimmen Sie weiters eine Basis des Kerns von f.

2)(8 P.) a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung der Funktion $f(x) = xe^x$ um die Anschlußstelle $x_0 = 1$ (allgemeines Glied).

b) Die Funktion $g(x)$ erfülle $g(5) = 2$, $g'(2) = -1$, $g''(2) = 4$ und $g^{(k)}(2) = 0$ für $k \geq 3$. Bestimmen Sie $g(x)$.

3)(8 P.) Offensichtlich gilt

$$1 = 2 - 1, \qquad 1 + 2 = 4 - 1, \qquad 1 + 2 + 4 = 8 - 1,$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1, \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1.$$

a) Diese Gleichungen legen eine Vermutung nahe. Formulieren Sie diese Vermutung!

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion!

4) (8 P.) Auf wieviele Arten können aus 20 verschiedenen Spielkarten 5 ausgewählt werden? Wieviele solche Möglichkeiten gibt es, wenn die Reihenfolge auch berücksichtigt wird? Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese 20 Karten auf vier Personen aufzuteilen (je 5 Karten pro Person)? Wieviele Elemente hat die Menge $\{f : M \to N\}$, wobei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $N = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$?

5)(8 P.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Erklären Sie anschaulich, was man unter der Stetigkeit von f auf $[a, b]$ versteht. Formulieren Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit. Wie sehen alle auf dem Intervall $[a, b]$ „stetigen“ Funktionen aus, wenn man in der Definition der Stetigkeit die Reihenfolge der Quantoren (von ε und δ) vertauscht?

Wien, am 3. Februar 2009 (Ab hier freilassen!)

1) 4)

2) 5)

3)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Man bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} x + z - u &= -1 \\ 2x + y + 4z &= -1 \\ -3x + 2y + z + 7u &= 5 \\ 2x - y - 4u &= -3 \end{aligned}$$

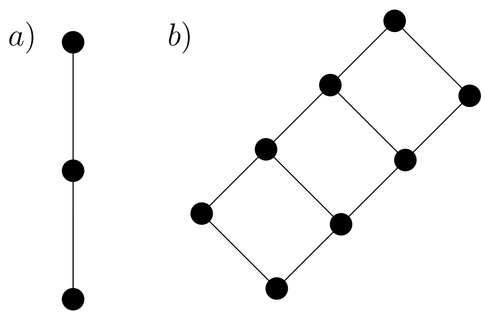
mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

2)(8 P.) Sei

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen G. Bestimmen Sie eine Eulersche und alle Hamiltonschen Linien von G. Begründen Sie insbesondere, warum es außer den von Ihnen genannten Hamiltonschen Linien keine weiteren gibt.

3)(8 P.) Seien n und m zwei natürliche Zahlen und $T_{n,m}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die Vielfache von n und Teiler von m sind. Beweisen Sie, daß $T_{n,m}$ mit der Teilbarkeitsrelation (aRb genau dann, wenn a teilt b) eine Halbordnung bildet. Bestimmen Sie weiters je zwei natürliche Zahlen, sodaß das Hassediagramm dieser Halbordnung wie folgt aussieht:



—— Bitte wenden ——

4)(8 P.) Was ist eine Potenzreihe? Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe? (Bemerkung: Es ist nicht die Formel zur Berechnung des Konvergenzradius gefragt!) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die man in eine Potenzreihe um einen Punkt y entwickeln kann? Wie lautet in diesem Fall die Potenzreihe von $f(x)$?

5)(8 P.) Sei $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ die Menge aller Quadratzahlen, B die Menge aller ganzen Zahlen, die Potenzen von 3 sind,

$$C = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x^n = 1\}$$

und

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 > 3) \wedge (x < 14) \wedge (3 \mid x)\}.$$

Geben Sie die Mengen A und B in „mathematischer Notation" an, d.h., nicht aufzählend oder verbal, sondern unter ausschließlicher Verwendung geeigneter Prädikate. Beschreiben Sie die Menge C verbal und nennen Sie drei Elemente von C. Geben Sie alle Elemente von D konkret an.

Wien, am 6. März 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Sei U die von (123) erzeugte Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_3. Geben Sie alle Elemente von U in Zyklendarstellung an. Bestimmen Sie weiters die Linksnebenklassen von U in S_3. Ist U ein Normalteiler von S_3? (Begründung!)

2)(8 P.) Bestimmen Sie für die Matrix A alle Eigenwerte sowie zu jedem Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 1 \\ 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^{2n+1}} x^n$$

konvergiert. Beachten Sie auch jene Fälle, für die das von Ihnen gewählte Konvergenzkriterium zu keiner Aussage führt.

4)(8 P.) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Was versteht man unter einem größten gemeinsamen Teiler von a und b? Wie funktioniert der Euklidische Algorithmus? Warum bricht der Algorithmus immer nach endlich vielen Schritten ab?

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wie ist die Ableitung von f an der Stelle a definiert? Was sagt die Ableitung anschaulich über die Funktion aus? Wie lautet die Regel von de l'Hospital?

Wien, am 8. Mai 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler der beiden Zahlen 187 718 771 und 89 390 669.

2)(8 P.) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.
b) Untersuchen Sie, ob $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig oder sogar differenzierbar ist. Berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die Partialsummenfolge der folgenden Reihe, indem Sie mit Hilfe des Ansatzes $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$ die Summanden als Differenz passender Ausdrücke darstellen, und ermitteln Sie den Grenzwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n(n+2)}.$$

4)(8 P.) Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Was versteht man unter dem Kern von f? Wie ist der Rang von f definiert? Wann nennt man $a \in \mathbb{R}$ einen Eigenwert von f? Ist 0 ein Eigenwert von f oder nicht? (Begründung!)

5)(8 P.) Sei $G = (V, E)$ ein schlichter, ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$. Wann heißt G zusammenhängend? Wann ist G ein Baum? Was versteht man unter der Adjazenzmatrix A von G? Wie kann man die Einträge der Matrix A^4 interpretieren?

Wien, am 26. Juni 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, ob die folgende Struktur ein Halbring, ein Ring bzw. ein Körper ist:
$M = \{a, b\}$ mit der Addition

$$a + a = b, \; a + b = b + a = a, \; b + b = b$$

und der Multiplikation

$$a \cdot a = a, \; a \cdot b = b \cdot a = b \cdot b = b.$$

2)(8 P.) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1-} \ln(1-x) \cdot \ln(x)$$

3)(8 P.) Erklären Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Behauptung:

$$\text{Für alle } n \geq 1 \text{ gilt} \quad \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer alternierenden Reihe? Wie lautet der Satz von Leibniz über die Konvergenz von alternierenden Reihen? Zeigen Sie durch Angabe konkreter Beispiele, dass die im Satz von Leibniz geforderten Bedingungen nicht notwendig sind, d.h., dass die Umkehrung des Leibnizkriteriums (wie lautet diese?) nicht richtig ist.

5)(8 P.) Wie funktioniert der Algorithmus von Kruskal? Erklären Sie die Aufgabenstellung (Wovon geht man aus? Was ist das Ziel?) sowie den Algorithmus zur Lösung der Aufgabe!

Wien, am 9. Oktober 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, für welche $x \in [0, \pi]$ die Funktion

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 2 - \sin x & \text{für } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

a) stetig und b) differenzierbar ist und fertigen Sie eine Skizze des Funktionsgraphen an.

2)(8 P.) Gegeben seien die drei Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind. Berechnen Sie weiters den Winkel, der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ eingeschlossen wird.

3)(8 P.) Ersetzen Sie * durch einen Konnektor aus der Menge $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$, sodaß eine Tautologie entsteht:

$$(a * b) \leftrightarrow ((\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)).$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer Folge reeller Zahlen? Was ist ein Häufungspunkt, was ein Grenzwert? Wann heißt eine Folge monoton, wann beschränkt? Geben Sie ein Beispiel einer streng monoton wachsenden Folge an, die gegen 1 konvergiert, sowie ein Beispiel einer beschränkten, aber nicht konvergenten Folge.

5)(8 P.) Was versteht man unter der Restklasse einer ganzen Zahl z modulo n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)? Wie ist der Restklassenring Z_n definiert (Definition der Menge sowie der Rechenoperationen)? Geben Sie für $n = 5$ die Operationstafeln für „+“ und „·“ explizit an. Wodurch unterscheidet sich der Fall, wo n eine Primzahl ist, von den anderen Fällen?

Wien, am 4. Dezember 2009 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Kennzahl:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Es gelte

$$f\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Ist f durch diese Angabe eindeutig bestimmt? (Begründung!)
Bestimmen Sie weiters die folgenden Mengen:

$$\ker(f), \qquad \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}, \qquad \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}6\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus zwei ganze Zahlen a und b, welche die Gleichung $2863a + 1057b = 42$ erfüllen.

3)(8 P.) a) Es sollen k ununterscheidbare 1-Euro-Münzen auf n Personen so aufgeteilt werden, daß jede Person mindestens zwei Euro bekommt? Bestimmen Sie alle Wertepaare (k, n), sodaß so eine Aufteilung möglich ist. Berechnen Sie für diese Fälle die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten für so eine Aufteilung.

b) Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, wenn die Münzen vor der Aufteilung so markiert werden, daß man sie unterscheiden kann und die Bedingung, daß jede Person mind. 2 Euro bekommt, fallen gelassen wird.

(Begründung! Der Rechenweg muß nachvollziehbar sein!)

4)(8 P.) Was versteht man darunter, daß eine reelle Funktion f im Punkt x_0 stetig ist? (exakte Definition, nicht nur anschaulich!)

Erklären Sie anhand dieser Definition, warum die Funktion $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x \le 0 \\ 1 & \text{f. } x > 0 \end{cases}$ unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist. Warum ist die Funktion $f_2 : (0, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig? Gibt es eine (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die auf $(0, 1)$ mit f_2 übereinstimmt? (Begründung!)

5)(8 P.) Seien A und B zwei Mengen. Wie sind die Mengen $A \times B$, 2^A und $A \Delta B$ definiert? Sei nun $A = \mathbb{R}$ und $B = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Geben Sie zu jeder der oben genannten Mengen je zwei ihrer Elemente an.

Wien, am 1. Februar 2011 (Ab hier freilassen!)

1) 3) 5)

2) 4)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Der EAN-Code verwendet Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1\, a_2 \ldots a_{12}\, p$. Die letzte Ziffer (die Prüfziffer p) wird so bestimmt, daß

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \cdots + a_{11} + 3a_{12} + p \equiv 0 \mod 10$$

gilt. Zeigen Sie, daß beim EAN-Code Fehler in einer einzelnen Ziffer erkannt werden, während eine Vertauschung von zwei benachbarten Ziffern genau dann nicht erkannt wird, wenn die beiden Ziffern gleich sind oder sich um 5 unterscheiden.

2)(8 P.) Beweisen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, daß die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^{2n}$$

für alle x mit $|x| < \frac{1}{2}$ konvergiert und für alle x mit $|x| > \frac{1}{2}$ divergiert.

3)(8 P.) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit komplexwertigen Einträgen. Erläutern Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der Aussage

$$\det(\bar{A}) = \overline{(\det A)}.$$

Dabei bezeichnet $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl und $\bar{A}$ die Matrix, die aus A durch Konjugieren aller Einträge hervorgeht.

4)(8 P.) Wie ist die Ableitung einer reellen Funktion f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ definiert? Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, daß $g'(a) = -\frac{1}{a^2}$ für $g(x) = \frac{1}{x}$. Wie läßt sich die Ableitung geometrisch interpretieren?

5)(8 P.) Gegeben sei eine Gruppe $(G, \cdot)$. Was versteht man unter einer Untergruppe U von G und unter einer Links- bzw. Rechtsnebenklasse von $a \in G$ bezüglich U? Wann ist eine Untergruppe U auch ein Normalteiler von G? Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe G und einer Untergruppe U von G, die kein Normalteiler ist, sowie ein Beispiel einer Gruppe, wo jede ihrer Untergruppen ein Normalteiler ist. (Die gewünschten Eigenschaften der Beispiele müssen begründet werden.)

Wien, am 4. März 2011 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Lösen Sie die folgende Gleichung in Restklassen bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit:

$$15x \equiv 3 \mod 18$$

2)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/\ln x}.$$

Anleitung: Stellen Sie die Funktion mit Hilfe der Identität $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ in der Form $e^{a(x)/b(x)}$ dar und bestimmen Sie dann $c = \lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{b(x)}$. Der gesuchte Grenzwert ist dann e^c. (Warum gilt das?)

3)(8 P.) Gegeben sei die folgende 4x4-Matrix mit reellen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und zu jedem Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren.

4)(8 P.) Seien n und k zwei natürliche Zahlen. Welches kombinatorische Abzählproblem wird durch $\binom{n}{k}$ gelöst? Beweisen Sie mit Hilfe dieser Interpretation die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Bestimmen Sie weiters, auf wieviele Arten 15 Personen in 5 Dreiergruppen eingeteilt werden können. (Die Antwort muß begründet werden!)

5)(8 P.) Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wie ist der Konvergenzradius R von f definiert? (Definition, nicht Formel!) Mit welcher Formel lässt sich der Konvergenzradius R direkt aus den a_n berechnen? Finden Sie eine Folge von Koeffizienten a_n derart, dass sich der Konvergenzradius $R = 2$ ergibt. Wie müssen die a_n lauten, damit $f(0) = 1$ und $f'(x) = -f(x)$ gilt?

Wien, am 6. Mai 2011 (Ab hier freilassen!)

1)

2)

3)

4)

5)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Berechnen Sie unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{2^n}.$$

2)(8 P.) Im folgenden bezeichnen A und B logische Formeln. Untersuchen Sie die Richtigkeit der folgenden Schlußfolgerungen, indem Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel angeben:

a) Wenn sowohl A als auch B keine Kontradiktionen sind, so ist $A \vee \neg B$ eine Tautologie.

b) Falls A und $A \to B$ keine Kontradiktionen sind, so ist B eine Kontradiktion.

3)(8 P.) Sei $M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ ist endlich oder } \mathbb{N} \setminus X \text{ ist endlich}\}$. Untersuchen Sie, ob die algebraische Struktur $(M, \cap, \cup)$ eine Boolesche Algebra ist, d.h. ob $(M, \cap)$ und $(M, \cup)$ kommutative Halbgruppen sind und zusätzlich noch für alle $A, B \in M$ die Gleichungen $A \cap (A \cup B) = A$ und $A \cup (A \cap B) = A$ gelten.

Bemerkung: Die Assoziativität und die Kommutativität von $\cap$ und $\cup$ dürfen ohne Beweis vorausgesetzt werden.

4)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

5)(8 P.) Erklären Sie die Begriffe "die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum" und "die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein absolutes Maximum". Welche notwendige Bedingung muß die erste Ableitung von f erfüllen, damit f an der Stelle x_0 ein relatives Maximum besitzt? Ist diese Bedingung auch hinreichend (Begründung oder Gegenbeispiel)?

Wien, am 1. Juli 2011 (Ab hier freilassen!)

1)

4)

2)

5)

3)

Zuname:

Vorname:

Matr.Nr:

PRÜFUNG AUS MATHEMATIK 1

(GITTENBERGER)

1)(8 P.) Man berechne die Determinante $|A|$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & u & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter u. Für welchen Wert von u gilt $|A| = 20$? Für welchen Wert von u ist A singulär?

2)(8 P.) Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 20 Fragen, bei denen je zwei Antwortmöglichkeiten zur Auswahl stehen, von denen eine oder beide richtig sind. Pro richtig beantworteter Frage (= Ankreuzen der – je nach Frage – einen bzw. zwei richtigen Antworten) gibt es einen Punkt, andernfalls keinen Punkt. Ab 10 Punkten ist man erfolgreich. Berechnen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einem Antritt mit zufälligem Ankreuzen, d.h., bei jeder Frage wird (i) die erste, (ii) die zweite Antowrt oder (iii) beide Antworten angekreuzt, wobei die Wahl der Varianten (i), (ii) oder (iii) zufällig (d.h. mit gleicher Wahrscheinlichkeit) erfolgt. Begründen Sie Ihre Antwort so, daß Ihr Lösungsweg nachvollziehbar ist!

3)(8 P.) Seien (G, ∇) und $(H, *)$ zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie, daß dann $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

4)(8 P.) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall x \in \mathbb{R} : \ f(-x) = -f(x)$ nennt man *ungerade Funktion*. Gilt hingegen $\forall x \in \mathbb{R} : \ f(-x) = f(x)$, so spricht man von einer *geraden Funktion*. Geben Sie je ein Beispiel einer ungeraden, einer geraden Funktion sowie einer Funktion, die weder gerade noch ungerade ist. Beweisen Sie weiters die folgende Behauptung: Die Ableitung einer differenzierbaren, ungeraden Funktion ist gerade.

5)(8 P.) Sei M eine Menge. Was versteht man unter einer Äquivalenzrelation auf M? Was versteht man unter einer Partition der Menge M? Wie hängen diese beiden Begriffe zusammen?

Wien, am 21. Oktober 2011 (Ab hier freilassen!)

1) 4)

2) 5)

3)