Harmonische Analysis und Geometrie

WS 2019/20

Franz Schuster

franz.schuster@tuwien.ac.at

Einleitung

Eine Vielzahl von Problemen aus verschiedenen mathematischen Gebieten, wie etwa der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Harmonischen Analysis oder der Geometrie der Zahlen, können auf Fragen über das Volumen von Schnitten oder Projektionen konvexer Körper zurückgeführt werden. Während solche Fragen einfach erscheinen mögen, beruhen deren Lösungen oft auf heiklen Techniken aus der Fourier Analysis. In den letzten 20 Jahren entwickelte sich daher ein eigenständiges mathematisches Gebiet, die *Geometrische Tomographie*, welches sich mit der Wiedergewinnung von Informationen über ein geometrisches Objekt aus Daten über die Schnitte und die Projektionen des Objekts beschäftigt. Der Begriff „geometrisches Objekt" ist hier bewusst vage gehalten und kann je nach Fragestellung konvexe oder sternförmige Körper, kompakte oder sogar ganz allgemeine Borel-messbare Mengen umfassen.

In dieser Vorlesung sollen grundlegende Methoden der Fourier Analysis, wie die Fouriertransformation und Fourierreihen bezüglich Kugelfunktionen, sowie einige wesentliche Konzepte der Geometrie konvexer und sternförmiger Körper besprochen werden. Wir wenden diese dann zur Lösung zweier berühmter Probleme aus der Geometrischen Tomographie an, die sowohl die Art der Fragestellungen in dem Gebiet, als auch die Methoden zu deren Lösungen illustrieren sollen.

1956 haben Herbert Busemann und Clinton Petty zehn offene Fragen über zentrale Schnitte konvexer Körper im $\mathbb{R}^n$ zusammengestellt. Das erste Problem dieser Liste ist die folgende Frage, welche heute als das *Busemann–Petty Problem* bekannt ist:

Es seien K und L zwei symmetrische konvexe Körper im $\mathbb{R}^n$. Angenommen es gilt

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^\perp) < \mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp)$$

für alle $u \in S^{n-1}$. Folgt dann

$$V(K) < V(L)?$$

Das dazu duale Problem bezüglich Projektionen, formuliert von Shephard 1964, lautet wie folgt:

Es seien K und L zwei symmetrische konvexe Körper im $\mathbb{R}^n$. Angenommen es gilt

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp) < \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^\perp)$$

für alle $u \in S^{n-1}$. Folgt dann

$$V(K) < V(L)?$$

Im Gegensatz zum Busemann–Petty Problem, dessen vollständige Lösung (durch Beiträge von mehr als 15 Mathematikern) über 40 Jahre gedauert hat, wurde Shephards Problem bereits ein Jahr nach seiner Formulierung von Clinton Petty und unabhängig davon von Rolf Schneider gelöst. Wir werden die vollständigen Lösungen beider Probleme in dieser Vorlesung präsentieren.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] R.J. Gardner, *Geometric tomography*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 58, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] H. Groemer, *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 61, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] P.M. Gruber, *Convex and discrete geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 336, Springer, Berlin, 2007.

[4] A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*, Mathematical Surveys and Monographs 116, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[5] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

1 Konvexe Körper und Sternkörper

Wir arbeiten im n-dimensionalen reellen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit innerem Produkt $\cdot$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|$.

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $\lambda \in [0,1]$,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in K.$$

Die Menge K ist also genau dann konvex, wenn sie mit je zwei Punkten x, y auch stets deren Verbindungsstrecke $[x, y]$ enthält.

Ein *konvexer Körper* im $\mathbb{R}^n$ ist eine (nichtleere) kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}^n$ die Menge aller konvexen Körper des $\mathbb{R}^n$.

Beispiele.

(a) $\mathbb{R}^n$ und jeder affine Unterraum des $\mathbb{R}^n$ sind konvex.

(b) Die Einheitskugel jeder Norm im $\mathbb{R}^n$ ist ein konvexer Körper.

Für Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man die Minkowski Summe $A + B$ und Skalarmultiplikation λA durch

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b : a \in A, b \in B\}, \\ \lambda A &= \{\lambda a : a \in A\}. \end{aligned}$$

Unmittelbar aus den Definitionen folgt:

Proposition 1.1 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist eine konvexe Menge.

(b) Bilder und Urbilder konvexer Mengen unter affinen Abbildungen sind konvex.

(c) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Körper, so auch $A + B$ und λA für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung.

(a) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu > 0$ gilt offensichtlich $\lambda A + \mu A \supseteq (\lambda + \mu)A$.

(b) Es gilt $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$ für alle $\lambda, \mu > 0$ genau dann, wenn A konvex ist.

Beweis: Es sei A konvex und $x \in \lambda A + \mu A$. Dann ist $x = \lambda a + \mu b$ mit $a, b \in A$, und es folgt

$$x = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, a + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, b\right) \in (\lambda + \mu)A,$$

womit $\lambda A + \mu A \subseteq (\lambda + \mu)A$ und damit nach (a) $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$. Die umgekehrte Schlussrichtung ist trivial. $\blacksquare$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in [0,1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Die Funktion f ist also genau dann konvex, wenn die Verbindungsstrecke im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ zwischen je zwei Punkten des Graphen von f oberhalb des Graphen von f liegt.

Beispiele.

(a) Jedes affine Funktional im $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

(b) Jede Norm im $\mathbb{R}^n$ ist konvex.

Aus der Definition konvexer Funktionen leitet man leicht her:

Proposition 1.2 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen, so auch $f + g$ und αf für $\alpha \geq 0$.

(b) Jedes lokale Minimum einer konvexen Funktion ist ein globales Minimum.

(c) Ungleichung von Jensen
Ist f konvex, so gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$.

Der Epigraph einer reellen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\operatorname{epi} f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Das folgende (triviale) Resultat erlaubt es Informationen über konvexe Mengen auf konvexe Funktionen zu übertragen und vice versa.

Proposition 1.3 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konvex.

(b) $\operatorname{epi} f$ ist eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Wir kehren zu konvexen Mengen zurück:

Definition. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die *konvexe Hülle* $\operatorname{conv} A$ definiert als der Durchschnitt aller konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$ die A enthalten.

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{conv} A$ die kleinste konvexe Menge (bezüglich Mengeninklusion) welche A enthält.

Der Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine *konvexe Kombination* der Punkte $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ gibt mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, sodass

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k.$$

Satz 1.4 *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist* $\operatorname{conv} A$ *die Menge aller konvexen Kombinationen von je endlich vielen Elementen von A.*

Beweis: Es seien $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ und $y = \lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda_{k+l} x_{k+l}$ zwei konvexe Kombinationen von Punkten aus A. Dann gilt für $\lambda \in [0,1]$,

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\lambda_1 x_1 + \cdots + (1-\lambda)\lambda_k x_k + \lambda\lambda_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \lambda\lambda_{k+l} x_{k+l}.$$

Da die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_{k+l}$ alle nicht-negativ sind und ihre Summe 1 ergibt, ist auch $(1-\lambda)x + \lambda y$ eine konvexe Kombination von Punkten aus A. Damit ist die Menge aller konvexen Kombinationen von Punkten aus A konvex. Da $\operatorname{conv} A$ aber die kleinste konvexe Menge ist, die A enthält, ist $\operatorname{conv} A$ insbesondere enthalten in der Menge aller konvexen Kombinationen von Punkten aus A.

Wir zeigen nun weiter mittels Induktion, dass eine konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ stets alle konvexen Kombinationen von $m = 1, 2, \ldots$ ihrer Punkte enthält. Die Behauptung ist trivial für $m = 1$. Wir können daher annehmen, dass $m > 1$ und die Behauptung für $m-1$ gezeigt ist. Es sei $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ eine konvexe Kombination von $x_1, \ldots, x_m \in K$. Ist $\lambda_m = 0$, dann ist $x \in K$ nach Induktionsvoraussetzung. Ist $\lambda_m = 1$, dann ist $x = x_m \in K$. Wir können daher $0 < \lambda_m < 1$ annehmen. Dann gilt $0 < \lambda_1 + \cdots + \lambda_{m-1} = 1 - \lambda_m < 1$ und es folgt

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = (1-\lambda_m)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_m} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{m-1}}{1-\lambda_m} x_{m-1}\right) + \lambda_m x_m \in K.$$

Da $\operatorname{conv} A$ selbst konvex ist, enthält $\operatorname{conv} A$ damit alle konvexen Kombinationen ihrer Punkte und insbesondere der Punkte aus A. ■

Eine der grundlegenden Aussagen der kombinatorischen Konvexgeometrie ist eine Verfeinerung des obigen Resultats:

Satz von Carathéodory. *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist* $\operatorname{conv} A$ *die Menge aller konvexen Kombinationen von affin unabhängigen Punkten aus A. Insbesondere ist $x \in \operatorname{conv} A$ konvexe Kombination von $n+1$ oder weniger Punkten von A.*

Beweis: Es sei $x \in \operatorname{conv} A$. Nach Satz 1.4 hat x eine Darstellung der Form

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k,$$

wobei $x_1, \ldots, x_k \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ und wir können annehmen, dass hierbei $k \in \mathbb{N}$ minimal gewählt ist. Angenommen $x_1, \ldots, x_k$ wären affin abhängig. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass

(i) $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$,

(ii) $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = o$.

Wegen (i) ist mindestens ein α_m positiv. Wir wählen m so, dass λ_m/α_m positiv und dabei so klein wie möglich ist. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, k$,

$$\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_i \geq 0$$

und wegen (i)

$$\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_1\right) + \cdots + \left(\lambda_k - \frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_k\right) = 1.$$

Damit ist nach (ii)

$$x = \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_1\right) x_1 + \cdots + \left(\lambda_k - \frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_k\right) x_k$$

eine Darstellung von x als konvexe Kombination von höchstens $k-1$ Punkten, im Widerspruch zur Minimalität von k. Also sind $x_1, \ldots, x_k$ affin unabhängig, woraus insbesondere $k \leq n+1$ folgt. ■

Die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten des $\mathbb{R}^n$ wird als *Polytop* bezeichnet. Ein *k-Simplex* im $\mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle von $k+1$ affin unabhängigen Punkten und diese Punkte heißen dann die *Ecken* des Simplex.

Man kann den Satz von Carathéodory auch so formulieren, dass die konvexe Hülle einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die Vereinigung aller Simplizes mit Ecken in A ist.

Das nächste Resultat ist eine einfache Konsequenz aus dem Satz von Carathéodory:

Korollar 1.5 *Die konvexe Hülle einer kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis: Die Menge

$$\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, x_1, \ldots, x_{n+1}) : \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1, x_j \in A\}$$

ist eine kompakte Teilemenge des $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$. Das Bild dieser Menge unter der stetigen Abbildung

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

von $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n(n+1)}$ nach $\mathbb{R}^n$ ist also auch kompakt. Nach dem Satz von Carathéodory stimmt dieses Bild mit der konvexen Hülle $\operatorname{conv} A$ überein. ■

Insbesondere ist jedes Polytop im $\mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper.

In unserem nächsten Resultat fassen wir einige Beziehungen zwischen Konvexität und topologischen Eigenschaften zusammen. An Bezeichnungen verwenden wir dabei $\operatorname{clos} A$ für den Abschluss, $\operatorname{int} A$ für das Innere und $\operatorname{bd} A$ für den Rand einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Das Innere von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bezüglich der affinen Hülle von A bezeichnen wir mit $\operatorname{relint} A$. B^n bezeichne die abgeschlossene euklidische Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Satz 1.6 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und nicht leer. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\operatorname{clos} K$ *ist konvex.*

(b) $\operatorname{relint} K$ *ist nicht leer und konvex.*

Beweis: (a) Es seien $x, y \in \operatorname{clos} K$ und $\lambda \in [0,1]$. Wir wählen Folgen $x_k, y_k \in K$, $k \in \mathbb{N}$, mit $x_k \to x$ und $y_k \to y$. Die Konvexität von K impliziert $(1-\lambda)x_k + \lambda y_k \in K$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $(1-\lambda)x_k + \lambda y_k \to (1-\lambda)x + \lambda y$, erhalten wir $(1-\lambda)x + \lambda y \in \operatorname{clos} K$.

(b) Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die affine Hülle von K Dimension n hat. Dann gibt es $n+1$ affin unabhängige Punkte $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ in K. Wir bezeichnen ihre konvexe Hülle mit $S \subseteq K$. Es sei $x \in S$ so gewählt, dass

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ und $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \dots, n+1$. Da $x_1, \dots, x_{n+1}$ affin unabhängig sind, bilden die Vektoren $(x_1, 1), \dots, (x_{n+1}, 1)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Basis. Für $y \in \mathbb{R}^n$ sind die Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ in der affinen Darstellung

$$y = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1}$$

mit $\mu_1 + \dots + \mu_{n+1} = 1$, gerade die Koeffizienten von $(y, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ bezüglich dieser Basis. Da Koordinatenfunktionen stetig sind, hängen die Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ stetig von y ab. Daher kann eine Zahl $\delta > 0$ so gewählt werden, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$ die Ungleichungen $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, n+1$, erfüllt sind und daher $y \in S$ gilt. Es ist also $x \in \operatorname{int} S \subseteq \operatorname{int} K$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{int} K$ konvex ist. Es seien $x, y \in \operatorname{int} K$ und $\lambda \in [0,1]$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $x + \delta B^n$, $y + \delta B^n \subseteq \operatorname{int} K \subseteq K$. Dann folgt aus der Konvexität von B^n und K,

$$(1-\lambda)x + \lambda y + \delta B^n = (1-\lambda)(x + \delta B^n) + \lambda(y + \delta B^n) \subseteq K$$

und damit $(1-\lambda)x + \lambda y \in \operatorname{int} K$. ■

In Anbetracht von Satz 1.6 (b) ist es sinnvoll, als *Dimension* einer konvexen Menge A die Dimension der affinen Hülle von A zu definieren.

Wir wenden uns nun grundlegenden Stütz- und Trennungseigenschaften konvexer Mengen zu. Diese bilden ein wesentliches Hilfsmittel in späteren Abschnitten.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zunächst eine beliebige abgeschlossene Teilmenge. Eine Hyperebene H im $\mathbb{R}^n$ (i.e. ein affiner Unterraum der Kodimension 1) heißt *Stützebene* von A im Randpunkt x, wenn $x \in H \cap A$ und A in einem der beiden abgeschlossenen Halbräume, die von H berandet werden, enthalten ist. In diesem Fall bezeichnen wir mit H^- den Halbraum der A enthält und nennen H^- einen *Stützhalbraum* von A in x. Eine Hyperebene kann in der Form

$$H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = \alpha\}$$

mit $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Ist $H = H_{u,\alpha}$ Stützebene von A in y, so gilt $u \cdot y = \alpha$ und

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq u \cdot y\}.$$

Der Vektor $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ heißt (äußerer) *Normalenvektor* von H bzw. A in y.

Wir werden zeigen, dass die Stützebenen einer abgeschlossenen konvexen Menge diese eindeutig bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst:

Lemma 1.7 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $p(K,x) \in K$, sodass für alle $y \in K$*

$$\|x - p(K,x)\| \leq \|x - y\|.$$

Beweis: Für geeignetes $\eta > 0$ ist die kompakte Menge $x + \eta B^n \cap K$ nicht leer. Die stetige Funktion $y \mapsto \|x - y\|$ nimmt also auf dieser Menge ein Minimum an, etwa in $z \in K$. Dann gilt $\|x - z\| \leq \|x - y\|$ für alle $y \in K$.
Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, auch $z' \in K$ erfülle $\|x - z'\| \leq \|x - y\|$ für alle $y \in K$. Dann ist $\|x - z'\| = \|x - z\|$ und es folgt $\|x - \frac{1}{2}(z + z')\| < \|x - z\|$. Da $\frac{1}{2}(z + z') \in K$ steht das im Widerspruch zur Minimalität von z. ■

Die Abbildung $p(K,\cdot) : \mathbb{R}^n \to K$ heißt *metrische Projektion* der konvexen Menge K.

Satz 1.8 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Dann ist die metrische Projektion $p(K,\cdot) : \mathbb{R}^n \to K$ Lipschitz stetig und es gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\|p(K,x) - p(K,y)\| \leq \|x - y\|.$$

Beweis: Es sei $u \in \mathbb{R}^n \backslash K$ und $v \in R(K,u)$, wobei

$$R(K,u) = \{p(K,u) + \lambda(u - p(K,u)) : \lambda \geq 0\}$$

der Strahl durch u mit Endpunkt $p(K,u)$. Wir zeigen zunächst $p(K,u) = p(K,v)$. Angenommen, dies gilt nicht. Ist $v \in [u, p(K,u))$, so folgt

$$\|u - p(K,v)\| \leq \|u - v\| + \|v - p(K,v)\| < \|u - v\| + \|v - p(K,u)\| = \|u - p(K,u)\|,$$

ein Widerspruch. Ist $u \in [v, p(K,u))$, so sei $q \in [p(K,u), p(K,v)]$ der Punkt mit der Eigenschaft, dass die Strecke $[u,q]$ parallel ist zur Strecke $[v, p(K,v)]$. Dann folgt

$$\frac{\|u - q\|}{\|u - p(K,u)\|} = \frac{\|v - p(K,v)\|}{\|v - p(K,u)\|} < 1$$

was ebenfalls ein Widerspruch ist. Also ist $p(K,u) = p(K,v)$.
Zum Beweis der Behauptung des Satzes können wir $w := p(K,x) - p(K,y) \neq o$ annehmen. Es seien $H(x)$ und $H(y)$, die zu w orthogonalen Hyperebenen durch $p(K,x)$ bzw. $p(K,y)$. Wir wollen zeigen, dass die Strecke $[x,y]$ die Hyperebenen $H(x)$ und $H(y)$ trifft oder äquivalent dazu, dass

$$x \cdot w \geq p(K,x) \cdot w \qquad \text{und} \qquad y \cdot w \leq p(K,y) \cdot w.$$

Angenommen es gilt $x \cdot w < p(K,x) \cdot w$. Dann ist $x \notin K$ und $R(K,x)$ trifft die Hyperebene $H(y)$ in einem Punkt z. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\|z - p(K,y)\| < \|z - p(K,x)\| = \|z - p(K,z)\|,$$

ein Widerspruch. Analog zeigt man $y \cdot w \leq p(K,y) \cdot w$. ■

Im folgenden Resultat fassen wir die Stützeigenschaften konvexer abgeschlossener Mengen zusammen:

Satz 1.9 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Durch jeden Randpunkt von K gibt es eine Stützebene von K.

(b) Ist K kompakt und nicht leer, so gibt es zu jedem Vektor $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ eine Stützebene an K mit äußerem Normalenvektor u.

Beweis: Es sei $y \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Wir zeigen zunächst, dass die Hyperebene H durch $p(K, y)$ und orthogonal zu $y - p(K, y)$ eine Stützebene an K ist. Offensichtlich ist $H \cap K \neq \emptyset$. Sei H^- der von H berandete abgeschlossene Halbraum, der y nicht enthält. Angenommen, es gibt ein $q \in K$ mit $q \notin H^-$. Sei z der zu y nächste Punkt der Strecke $[p(K, y), q]$. Dann gilt $\|y - z\| < \|y - p(K, y)\|$, was wegen $z \in K$ der Definition von $p(K, y)$ widerspricht. Es folgt $K \subseteq H^-$, womit H Stützebene an K im Punkt $p(K, y)$ ist.

(a) Es sei $x \in \operatorname{bd} K$ und $y_m \in \mathbb{R}^n \backslash K$, $m \in \mathbb{N}$, sodass $y_m \to x$. Nach Satz 1.8 gilt $x_m = p(K, y_m) \in \operatorname{bd} K \to x = p(K, x)$. Nach dem ersten Teil des Beweises, gibt es Stützebenen $H_m = \{z \in \mathbb{R}^n : u_m \cdot z = u_m \cdot x_m\}$ von K in x_m, wobei $u_m \in S^{n-1} := \operatorname{bd} B^n$. Da S^{n-1} kompakt ist, können wir $u_m \to u \in S^{n-1}$ annehmen. Es sei $H = \{z \in \mathbb{R}^n : u \cdot z = u \cdot x\}$. Offensichtlich ist $x \in H$. Für $y \in K$ gilt wegen $u_m \cdot y \leq u_m \cdot x_m$, $m \in \mathbb{N}$, auch $u \cdot y \leq u \cdot x$ und damit $K \subseteq H^-$, womit H Stützebene an K in x ist.

(b) Da K kompakt ist, gibt es ein $x \in K$, sodass $\max\{u \cdot y : y \in K\} = u \cdot x$. Offensichtlich ist $x \in \operatorname{bd} K$ und $H = \{z \in \mathbb{R}^n : u \cdot z = u \cdot x\}$ ist eine Stützebene von K in x mit äußerem Normalenvektor u. ■

Umgekehrt können konvexe Mengen unter den abgeschlossenen Mengen mit nichtleerem Inneren durch Stützeigenschaften charakterisiert werden:

Satz 1.10 *Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge mit $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) A ist konvex.

(b) Durch jeden Randpunkt von A gibt es eine Stützebene von A.

Beweis: (a) impliziert (b) nach Satz 1.9. Es gelte daher umgekehrt (b). Es bezeichne K den Durchschnitt aller Stützhalbräume von A. Als Durchschnitt konvexer Mengen ist K konvex. Wir wollen zeigen, dass $A = K$. Offensichtlich ist $A \subseteq K$. Es sei $z \in \mathbb{R}^n \backslash A$ und $y \in \operatorname{int} A$. Es sei $x \in [y, z] \cap \operatorname{bd} A$. Nach Voraussetzung gibt es eine Stützebene H von A in x. Damit gilt aber $y \in \operatorname{int} A \subseteq A \subseteq H^-$ und daher $z \notin H^-$, also $z \notin K$. ■

Korollar 1.11 *Jede nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt ihrer Stützhalbräume.*

Nach Korollar 1.11 kann ein konvexer Körper beschrieben werden, indem man die Lage seiner Stützhalbräume in Abhängigkeit vom äußeren Normalenvektor angibt. Diese Beschreibung wird analytisch durch die Stützfunktion geliefert.

Definition. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper. Die *Stützfunktion* von K ist für $u \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$h(K, u) = \max\{x \cdot u : x \in K\}.$$

Für $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ setzen wir

$$\begin{aligned} H(K, u) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = h(K, u)\} \\ H^-(K, u) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h(K, u)\}. \end{aligned}$$

Die Mengen $H(K, u)$ und $H^-(K, u)$ sind die *Stützebene* bzw. der *Stützhalbraum* von K mit äußerem Normalenvektor u.

Für $u \in S^{n-1}$ ist $h(K, u)$ der mit Vorzeichen versehene Abstand der Stützebene $H(K, u)$ mit äußerem Normalenvektor u vom Ursprung. Der Abstand ist dabei genau dann negativ, wenn u in den offenen Halbraum weist, der den Ursprung enthält. Da K der Durchschnitt seiner Stützhalbräume ist, erhalten wir

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h(K, u) \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Bemerkung.

(a) Es ist $K = \{z\}$, für ein $z \in \mathbb{R}^n$, genau dann wenn $h(K, u) = z \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für $K \in \mathcal{K}^n$ und $t \in \mathbb{R}^n$ gilt $h(K + t, u) = h(K, u) + t \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^n$.

(c) Für $K \in \mathcal{K}^n$ und $\lambda \geq 0$ ist $h(\lambda K, \cdot) = \lambda h(K, \cdot)$.

Aus der Definition der Stützfunktion erhält man unmittelbar folgende Eigenschaften:

Proposition 1.12 *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$, $\lambda \geq 0$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

(a) $h(K, \lambda u) = \lambda h(K, u)$,

(b) $h(K, u + v) \leq h(K, u) + h(K, v)$.

Wir nennen eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Proposition 1.12 *sublinear*.

Die Stützfunktion eines konvexen Körpers ist also eine sublineare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und damit insbesondere konvex und, wie der nächste Satz zeigt, stetig.

Satz 1.13 *Eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig und Lipschitz-stetig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und S ein Simplex mit $x_0 \in \operatorname{int} S$. Wir können $\eta > 0$ so wählen, dass $x_0 + \eta B^n \subseteq S$. Für jedes $x \in S$ gibt es eine Darstellung

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

wobei $x_1, \ldots, x_{n+1}$ die Ecken von S sind, $\lambda_i \geq 0$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$. Es folgt

$$f(x) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq c := \max_i \{f(x_i)\}.$$

Es sei $y \in x_0 + \eta B^n$, d.h. $y = x_0 + \alpha u$ mit $\alpha \in [0,1]$ und $\|u\| = \eta$. Dann folgt aus $y = (1-\alpha)x_0 + \alpha(x_0 + u)$,

$$f(y) \leq (1-\alpha) f(x_0) + \alpha f(x_0 + u),$$

und damit wegen $x_0 + u \in S$,

$$f(y) - f(x_0) \leq \alpha(c - f(x_0)).$$

Andererseits ist

$$x_0 = \frac{1}{1+\alpha} y + \frac{\alpha}{1+\alpha}(x_0 - u)$$

und daher

$$f(x_0) \leq \frac{1}{1+\alpha} f(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha} f(x_0 - u),$$

also

$$f(x_0) - f(y) \leq \alpha(c - f(x_0)).$$

Somit erhalten wir für $y \in x_0 + \eta B^n$,

$$|f(y) - f(x_0)| \leq \frac{c - f(x_0)}{\eta} \|y - x_0\|$$

und damit die Stetigkeit von f in x_0 in verschärfter Form.

Nun sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und für ein $\eta > 0$ sei $C_\eta = C + \eta B^n$. Auf der kompakten Menge C_η nimmt die stetige Funktion $|f|$ ein Maximum a an. Seien $x, y \in C$ gegeben. Dann ist

$$z = y + \frac{\eta}{\|y - x\|}(y - x) \in C_\eta$$

und

$$y = (1-\lambda)x + \lambda z \qquad \text{mit } \lambda = \frac{\|y - x\|}{\eta + \|y - x\|}.$$

Aus $f(y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(z)$ folgt damit

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(f(z) - f(x)) \leq \frac{2a}{\eta} \|y - x\|.$$

Vertauschung von x und y liefert daher die Ungleichung

$$|f(y) - f(x)| \leq b \|y - x\|$$

mit einer von x und y unabhängigen Konstanten b. ■

Das folgende Resultat zeigt, dass die Sublinearität bereits charakterisierend für Stützfunktionen ist.

Satz 1.14 *Es sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) h ist Stützfunktion eines eindeutig bestimmten konvexen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) h ist sublinear.

Beweis: (a) impliziert (b) nach Proposition 1.12. Sei daher h sublinear. Wir setzen

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v \le h(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Als Durchschnitt von abgeschlossenen Halbräumen ist K abgeschlossen und konvex. Setzen wir $v = \pm b_1, \dots, \pm b_n$, wobei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, so folgt, dass K kompakt ist. Gilt $K \neq \emptyset$, so ist offenbar $h(K, u) \le h(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$. Es bleibt also zu zeigen, dass $K \neq \emptyset$ und $h(K, u) \ge h(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$.

Da h sublinear und damit stetig ist, ist $\operatorname{epi} h$ ein abgeschlossener konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit nichtleerem Inneren. Es sei $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$. Nach Satz 1.10 gibt es eine Stützebene $H_{(y,\eta),\alpha}$ an $\operatorname{epi} h$ durch $(u, h(u)) \in \operatorname{bd} \operatorname{epi} h$, sodass $\operatorname{epi} h \subseteq H^-_{(y,\eta),\alpha}$. Da $\operatorname{epi} h$ ein konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren ist, folgt $\alpha = 0$. Da h auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert ist, ist $\eta \neq 0$, also können wir $\eta = -1$ annehmen. Nun folgt aus $\operatorname{epi} h \subseteq H^-_{(y,-1),0}$ aber $y \cdot v \le h(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also $y \in K$ und damit $K \neq \emptyset$. Aus $(u, h(u)) \in H_{(y,-1),0}$ folgt weiters $y \cdot u = h(u)$, also $h(K, u) \ge h(u)$. ∎

Stützfunktionen sind für die Beschreibung konvexer Körper besonders nützlich da sich geometrische Eigenschaften der Körper in analytischen Eigenschaften ihrer Stützfunktionen widerspiegeln.

Satz 1.15 *Für konvexe Körper $K, L \in \mathcal{K}^n$ gilt*

(a) $K \subseteq L$ genau dann, wenn $h(K, \cdot) \le h(L, \cdot)$,

(b) $h(K + L, \cdot) = h(K, \cdot) + h(L, \cdot)$.

Beweis: (a) ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Stützfunktion. Für (b) sei $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$. Es gibt Punkte $x \in K$ und $y \in L$ mit $h(K, u) = x \cdot u$ und $h(L, u) = y \cdot u$. Daraus folgt $h(K, u) + h(L, u) = (x + y) \cdot u \le h(K + L, u)$. Andererseits hat jeder Punkt $z \in K + L$ eine Darstellung $z = x + y$ mit $x \in K$ und $y \in L$. Es folgt $z \cdot u = x \cdot u + y \cdot u \le h(K, u) + h(L, u)$. Da $z \in K + L$ beliebig war, erhalten wir $h(K + L, u) \le h(K, u) + h(L, u)$. ∎

Korollar 1.16 $(\mathcal{K}^n, +)$ *ist eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel.*

Neben der Stützfunktion können auch andere Funktionen verwendet werden, um konvexe Körper analytisch zu beschreiben.

Definition. Für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit $o \in \operatorname{int} K$ definiert man die *Distanzfunktion* (oder das Minkowski Funktional) von K für $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$g(K, x) = \min\{\lambda \ge 0 : x \in \lambda K\}.$$

Die *Radialfunktion* von K ist für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ definiert durch

$$\rho(K,x) = \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\} = \frac{1}{g(K,x)}.$$

Bemerkung.

(a) Die Distanzfunktion von $K \in \mathcal{K}^n$ mit $o \in \operatorname{int} K$ ist sublinear und es gilt

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : g(K,x) \leq 1\}.$$

(b) Für $u \in S^{n-1}$ gibt $\rho(K,u)$ den Abstand vom Ursprung des Randes von K in Richtung u an. Es gilt $\rho(K,x)x \in \operatorname{bd} K$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$.

Als sublineare Funktion ist $g(K,\cdot)$, nach Satz 1.14, auch die Stützfunktion eines konvexen Körpers. Dieser steht, wie wir im folgenden sehen werden, in einem natürlichen Dualitätsverhältnis zum Körper K.

Definition. Für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit $o \in \operatorname{int} K$ definiert man den *Polarkörper* von K durch

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y \leq 1 \text{ für alle } y \in K\}.$$

Der nachfolgende Satz zeigt, dass K^* wieder ein konvexer Körper ist und dass in der Tat eine Dualität vorliegt.

Satz 1.17 *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ mit $o \in \operatorname{int} K$. Dann ist $K^* \in \mathcal{K}^n$ ein konvexer Körper mit $o \in \operatorname{int} K^*$ und es gilt $K^{**} = K$.*

Beweis: K^* ist nach Definition abgeschlossen und konvex. Ebenfalls unmittelbar aus der Definition ergibt sich $(\lambda B^n)^* = \lambda^{-1} B^n$ für $\lambda > 0$ und die Eigenschaft, dass aus $K \subseteq L$ stets $K^* \supseteq L^*$ folgt. Da $o \in \operatorname{int} K$, können wir $\varepsilon, \eta > 0$ so wählen, dass $\varepsilon B^n \subseteq K \subseteq \eta B^n$. Damit folgt $\eta^{-1} B^n \subseteq K^* \subseteq \varepsilon^{-1} B^n$, also $K^* \in \mathcal{K}^n$ und $o \in \operatorname{int} K^*$.
Es bleibt $K^{**} = K$ zu zeigen. Dazu sei $y \in K$. Für jedes $x \in K^*$ gilt $x \cdot y \leq 1$, also ist $y \in K^{**}$. Somit gilt $K \subseteq K^{**}$. Sei nun $z \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Für die Stützebene $H_{u,\alpha}$ an $p(K,z)$ gilt dann $K \subseteq H^-_{u,\alpha}$ und $z \cdot u > \alpha$. Da $o \in \operatorname{int} K$ ist $\alpha > 0$. Für alle $y \in K$ gilt also $y \cdot \frac{u}{\alpha} \leq 1$ und damit $\frac{u}{\alpha} \in K^*$. Wegen $z \cdot \frac{u}{\alpha} > 1$ folgt aber $z \notin K^{**}$. ■

Korollar 1.18 *Für $K \in \mathcal{K}^n$ mit $o \in \operatorname{int} K$ gilt*

$$g(K,\cdot) = \frac{1}{\rho(K,\cdot)} = h(K^*,\cdot).$$

Beweis: Wir setzen

$$\overline{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : h(K^*,x) \leq 1\}.$$

Dann gilt nach der Definition von $g(\overline{K},\cdot)$ offenbar $g(\overline{K},\cdot) = h(K^*,\cdot)$. Für $x \in \overline{K}$ und $u \in K^*$ gilt $u \cdot x \leq h(K^*,x) \leq 1$, also ist $x \in K^{**} = K$. Somit gilt $\overline{K} \subseteq K$. Andererseits gibt es zu jedem $x \in K$ ein $v \in K^*$ mit $h(K^*,x) = v \cdot x \leq 1$, also ist $x \in \overline{K}$ und damit $K \subseteq \overline{K}$. ■

Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ mit $o \in \operatorname{int} K$ und $K = -K$. Dann wird durch

$$\|x\|_K = g(K, x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

offenbar eine Norm $\|\cdot\|_K$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert für die K die Einheitskugel ist. Der zu $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ duale Banachraum sei $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K^*)$. Dann gilt

$$\|y\|_K^* = \sup\{x \cdot y : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_K \leq 1\} = h(K, y) = g(K^*, y) = \|y\|_{K^*}.$$

K^* ist also gerade die Einheitskugel der Norm $\|\cdot\|_K^* = \|\cdot\|_{K^*}$.

Radialfunktionen können nicht nur zur Beschreibung konvexer Mengen sondern auch für allgemeinere Mengen verwendet werden.

Eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* in Bezug auf o, wenn für jeden Punkt $z \in L$ die gesamte Strecke $[o, z]$ in L liegt. Ist L darüberhinaus kompakt und die Radialfunktion von L, definiert für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ durch

$$\rho(L, x) = \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in L\},$$

stetig, so nennen wir L einen *Sternkörper*. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}^n$ die Menge aller Sternkörper des $\mathbb{R}^n$.

Aus der Definition von Sternkörpern erhalten wir unmittelbar ein Gegenstück zu Satz 1.14.

Proposition 1.19 *Es sei $\rho : \mathbb{R}^n \backslash \{o\} \to \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) ρ ist Radialfunktion eines eindeutig bestimmten Sternkörpers $L \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) ρ ist stetig, nicht-negativ und (positiv) homogen vom Grad -1, d.h. für alle $\lambda > 0$ gilt $\rho(\lambda x) = \lambda^{-1}\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$.

Bemerkung.

(a) Für $L \in \mathcal{S}^n$ gilt $L = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\} : \rho(L, x) \geq 1\} \cup \{o\}$.

(b) Für Sternkörper $K, L \in \mathcal{S}^n$ gilt $K \subseteq L$ genau dann, wenn $\rho(K, \cdot) \leq \rho(L, \cdot)$.

(c) Für $L \in \mathcal{S}^n$ und $\lambda \geq 0$ ist $\rho(\lambda L, \cdot) = \lambda \rho(L, \cdot)$.

Motiviert durch Satz 1.15 definiert man für $K, L \in \mathcal{S}^n$ und $\lambda \geq 0$ die Radial (Minkowski) Summe $K \tilde{+} L \in \mathcal{S}^n$ und Skalarmultiplikation $\lambda L \in \mathcal{S}^n$ durch

$$\rho(K \tilde{+} L, \cdot) := \rho(K, \cdot) + \rho(L, \cdot), \tag{1.1}$$
$$\rho(\lambda L, \cdot) := \lambda \rho(L, \cdot). \tag{1.2}$$

Offensichtlich stimmen Minkowski und Radial Skalarmultiplikation auf $\mathcal{S}^n$ überein.

Korollar 1.20 $(\mathcal{S}^n, \tilde{+})$ *ist eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel.*

Zum Abschluss des ersten Kapitels wenden wir uns noch einmal konvexen Mengen zu und behandeln zwei Trennungsaussagen, die im folgenden hilfreich sein werden.

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige Mengen. Eine Hyperebene $H_{u,\alpha} \subseteq \mathbb{R}^n$ *trennt* A und B, wenn $A \subseteq H^-_{u,\alpha}$ und $B \subseteq H^+_{u,\alpha}$ gilt oder umgekehrt, wobei wir mit $H^-_{u,\alpha}$ und $H^+_{u,\alpha}$ die abgeschlossenen Halbräume bezeichnen, welche von $H_{u,\alpha}$ berandet werden. Die Mengen A und B werden *stark getrennt*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $H_{u,\alpha-\varepsilon}$ und $H_{u,\alpha+\varepsilon}$ beide die Mengen A und B trennen.

Die Trennung von Paaren von Mengen kann auf die Trennung einer Menge und eines Punktes zurückgeführt werden:

Satz 1.21 *Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) A und B können (stark) getrennt werden.

(b) Die Mengen $A + (-B)$ und $\{o\}$ können (stark) getrennt werden.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung für starke Trennung. Der andere Fall ergibt sich analog indem man $\varepsilon = 0$ setzt. Die Hyperebene $H_{u,\alpha}$ trenne A und B stark und es gelte $A \subseteq H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$ und $B \subseteq H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$. Sei $x \in A - B := A + (-B)$, dann ist $x = a - b$ mit $a \in A$, $b \in B$. Wegen $a \cdot u \leq \alpha - \varepsilon$ und $b \cdot u \geq \alpha + \varepsilon$ gilt $x \cdot u \leq -2\varepsilon$, also werden $A - B$ und $\{o\}$ durch $H_{u,-\varepsilon}$ stark getrennt.
Jetzt werde umgekehrt $A - B$ und $\{o\}$ durch $H_{u,-\varepsilon}$ stark getrennt, d.h. $x \cdot u \leq -2\varepsilon$ für alle $x \in A - B$. Wir setzen $\alpha = \sup\{a \cdot u : a \in A\}$ und $\beta = \inf\{b \cdot u : b \in B\}$. Für $a \in A$, $b \in B$ gilt $a \cdot u - b \cdot u \leq -2\varepsilon$, also $\beta - \alpha \geq 2\varepsilon$. Durch die Hyperebene $H_{u,(\alpha+\beta)/2}$ werden daher A und B stark getrennt. ■

Der folgende Satz ist eine endlich-dimensionale Version des (Trennungs-) Satzes von Hahn–Banach. Er zeigt außerdem, dass konvexe Mengen auch dann trennbar sein können, wenn sie nicht disjunkt sind.

Satz 1.22 *Es seien $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Ist K kompakt, L abgeschlossen und $K \cap L = \emptyset$, dann können K und L stark getrennt werden.

(b) Ist $\operatorname{relint} K \cap \operatorname{relint} L = \emptyset$*, dann können K und L getrennt werden.*

Beweis: (a) Da $K \in \mathcal{K}^n$ und L abgeschlossen und konvex ist, ist $K - L$ auch abgeschlossen und konvex. Die Bedingung $o \notin K - L$ ist äquivalent mit $K \cap L = \emptyset$. Da ein Translat der Stützebene durch $p(K - L, o)$ orthogonal zu $p(K - L, o)$ die Mengen $K - L$ und $\{o\}$ stark trennt, folgt die Behauptung nun aus Satz 1.21.

(b) Es sei $C = \operatorname{relint} K - \operatorname{relint} L$. Dann ist C konvex und $o \notin C$. Damit ist aber auch $o \notin \operatorname{relint}(K - L)$. Ist $o \in \operatorname{clos}(K - L)$ dann trennt jede Stützebene an $\operatorname{clos}(K - L)$ durch o, die Mengen $K - L$ und $\{o\}$. Andernfalls trennt die Hyperebene durch $p(\operatorname{clos}(K - L), o)$ und orthogonal zu $-p(\operatorname{clos}(K - L), o)$ die Mengen $K - L$ und $\{o\}$. In beiden Fällen folgt die Behauptung also aus Satz 1.21. ■

2 Hausdorff und Radial-Metrik

Wir versehen im folgenden die Menge $\mathcal{K}^n$ der konvexen Körper und die Menge $\mathcal{S}^n$ der Sternkörper im $\mathbb{R}^n$ mit einer Metrik d bzw. r. Damit werden $(\mathcal{K}^n, d)$ und $(\mathcal{S}^n, r)$ zu vollständigen metrischen Räumen. Eigenschaften allgemeiner Körper können dann oft mittels Approximation durch spezielle Körper nachgewiesen werden.

Wir betrachten zunächst allgemeiner die Menge $\mathcal{C}^n$ der nichtleeren kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und führen hierauf eine Metrik ein.

Definition. Für $K, L \in \mathcal{C}^n$ wird der *Hausdorff-Abstand* definiert durch

$$d(K,L) := \max\{\max_{x\in K} \min_{y\in L} \|x-y\|, \max_{x\in L} \min_{y\in K} \|x-y\|\}.$$

Bemerkung.

(a) Für $K, L \in \mathcal{C}^n$ ist $d(K,L)$ der maximale Abstand den ein Punkt in einer der Mengen K, L von der anderen Menge haben kann.

(b) In einem allgemeinen metrischen Raum (X, ϱ) wird der Hausdorff-Abstand zweier kompakter Mengen K, L definiert durch

$$d(K,L) = \max\{\max_{x\in K} \varrho(x,L), \max_{y\in L} \varrho(y,K)\}.$$

Satz 2.1 *Für $K, L \in \mathcal{C}^n$ gilt*

$$d(K,L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B^n, L \subseteq K + \lambda B^n\}. \tag{2.1}$$

Beweis: Es bezeichne α die rechte Seite von (2.1). Für $x \in K$ gilt dann $x \in L + \alpha B^n$, also $x = y + \alpha b$ mit geeigneten $y \in L$ und $b \in B^n$. Es folgt $\|x - y\| \leq \alpha$ und damit $\min_{y\in L} \|x-y\| \leq \alpha$. Da dies für alle $x \in K$ gilt, folgt $\max_{x\in K} \min_{y\in L} \|x-y\| \leq \alpha$. Vertauschung von K und L ergibt $d(K,L) \leq \alpha$.

Nun sei $0 < \lambda < \alpha$ und etwa $K \not\subseteq L + \lambda B^n$. Dann gilt $x \notin L + \lambda B^n$ für geeignetes $x \in K$, also $\|x-y\| \geq \lambda$ für alle $y \in L$ und daher $d(K,L) \geq \lambda$. Da $\lambda < \alpha$ beliebig war, folgt $d(K,L) \geq \alpha$. ■

Satz 2.2 *Der Hausdorff-Abstand ist eine Metrik auf $\mathcal{C}^n$ und $(\mathcal{C}^n, d)$ ist vollständig.*

Beweis: Zum Nachweis, dass d eine Metrik auf $\mathcal{C}^n$ definiert, zeigen wir nur die Dreiecksungleichung. Die anderen Eigenschaften einer Metrik sind offenbar erfüllt. Es seien $K, L, M \in \mathcal{C}^n$ und $d(K,L) = \alpha$ und $d(L,M) = \beta$. Dann gilt $K \subseteq L + \alpha B^n$ und $L \subseteq M + \beta B^n$, also $K \subseteq M + \beta B^n + \alpha B^n = M + (\alpha+\beta)B^n$. Analog gilt $M \subseteq K + (\alpha+\beta)B^n$ und daher $d(K,M) \leq d(K,L) + d(L,M)$.

Um zu zeigen, dass $(\mathcal{C}^n, d)$ vollständig ist, beweisen wir zunächst, dass für eine abnehmende Folge $K_i \subseteq \mathcal{C}^n$, d.h. $K_{i+1} \subseteq K_i$ für $i \in \mathbb{N}$, gilt

$$\lim_{i\to\infty} K_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j. \tag{2.2}$$

Die Menge $K := \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ ist kompakt und, wie man leicht zeigt, nicht leer. Wir nehmen an (2.2) gilt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ mit $d(K_i, K) > \varepsilon$. Wegen $K \subseteq K_i$ gilt also $K_i \not\subseteq K + \varepsilon B^n$ für diese i. Wegen $K_{i+1} \subseteq K_i$ gilt sogar $K_i \not\subseteq K + \varepsilon B^n$ für alle $i \geq m$ für passendes $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$A_i := K_i \backslash \mathrm{int}(K + \varepsilon B^n).$$

Dann ist $A_i, i \geq m$, eine abnehmende Folge von nichtleeren kompakten Mengen und hat damit nichtleeren Durchschnitt A. Da $K \subseteq \mathrm{int}\,(K + \varepsilon B^n)$ ist $A \cap K = \emptyset$. Aber aus $A_i \subseteq K_i$ folgt $A \subseteq K$, ein Widerspruch.

Es sei nun K_i, $i \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $\mathcal{C}^n$. Aus der Cauchy-Eigenschaft folgt, dass die Mengen $\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ beschränkt sind. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}$,

$$A_m := \mathrm{clos} \bigcup_{i=m}^{\infty} K_i.$$

Dann bilden die A_m eine abnehmende Folge von nichtleeren kompakten Mengen und nach dem zuvor Gezeigten gibt es ein $A \in \mathcal{C}^n$ mit

$$\lim_{m\to\infty} A_m = A := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $A_m \subseteq A + \varepsilon B^n$ für $m \geq n_0$ und daher $K_i \subseteq A + \varepsilon B^n$ für $i \geq n_0$. Da die K_i eine Cauchy-Folge bilden, gibt es ein $n_1 \geq n_0$ mit $K_j \subseteq K_i + \varepsilon B^n$ für alle $i, j \geq n_1$. Für alle $i, m \geq n_1$ gilt also $\bigcup_{j=m}^{\infty} K_j \subseteq K_i + \varepsilon B^n$ und daher $A_m \subseteq K_i + \varepsilon B^n$, woraus $A \subseteq K_i + \varepsilon B^n$ folgt. Wir erhalten damit insgesamt $d(K_i, A) \leq \varepsilon$ für $i \geq n_1$. ∎

Als nächstes wollen wir zeigen, dass in dem metrischen Raum $(\mathcal{C}^n, d)$ abgeschlossene, beschränkte Mengen kompakt sind. Dazu genügt es nach einem bekannten Kompaktheitskriterium in metrischen Räumen, Folgenkompaktheit nachzuweisen:

Satz 2.3 *In $(\mathcal{C}^n, d)$ besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Es sei K_i^0, $i \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge in $\mathcal{C}^n$. Dann gibt es eine beschränkte Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $K_i^0 \subseteq C$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $E \subseteq C$ mit $C \subseteq E + \varepsilon B^n$. Wir wählen nun zu jedem $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, eine derartige Menge $E = E_m$. Für $K \in \mathcal{C}^n$ mit $K \subseteq C$ sei

$$A_m(K) := (K + \tfrac{1}{m} B^n) \cap E_m.$$

Dann gilt für die endlichen Mengen $A_m(K)$ offenbar

$$d(K, A_m(K)) \leq \frac{1}{m}. \tag{2.3}$$

Da E_1 endlich ist, gibt es unendlich viele Indizes $i \in \mathbb{N}$, für die $A_1(K_i^0)$ dieselbe Teilmenge von E_1 ist. Die Folge K_i^0, $i \in \mathbb{N}$, hat also eine Teilfolge K_i^1 derart, dass für alle $i \in \mathbb{N}$,

$$A_1(K_i^1) =: T_1.$$

Analog hat K_i^1, $i \in \mathbb{N}$, eine Teilfolge K_i^2 derart, dass für alle $i \in \mathbb{N}$,

$$A_2(K_i^2) =: T_2.$$

Auf diese Weise erhalten wir eine rekursiv definierte Folge T_m, $m \in \mathbb{N}$, von endlichen Mengen $T_m \subseteq E_m$ und zu jedem m eine Folge K_i^m, $i \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$,

$$A_m(K_i^m) =: T_m.$$

Darüber hinaus ist K_i^k, $i \in \mathbb{N}$, für $k > m$ eine Teilfolge von K_i^m, $i \in \mathbb{N}$. Nach (2.3) gilt daher für $k \geq m$ und $i, j \in \mathbb{N}$,

$$d(K_i^k, T_m) \leq \frac{1}{m} \qquad \text{also} \qquad d(K_i^m, K_j^k) \leq \frac{2}{m}.$$

Wir setzen nun für $k \in \mathbb{N}$,

$$K_k := K_k^k.$$

Dann ist K_m, $m \in \mathbb{N}$, eine Teilfolge von K_i^0, $i \in \mathbb{N}$, und wegen

$$d(K_m, K_k) \leq \frac{2}{m}$$

für $k \geq m$, eine Cauchy-Folge, die nach Satz 2.2 konvergiert. ■

Korollar 2.4 *Für eine Teilmenge $\mathcal{T}$ von $(\mathcal{C}^n, d)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathcal{T}$ ist kompakt.

(b) $\mathcal{T}$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Wir wenden uns nun wieder der Menge $\mathcal{K}^n \subseteq \mathcal{C}^n$ der konvexen Körper zu.

Satz 2.5 *$\mathcal{K}^n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $(\mathcal{C}^n, d)$.*

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{C}^n \backslash \mathcal{K}^n$ offen ist. Dazu sei $K \in \mathcal{C}^n$ nicht konvex. Dann gibt es $x, y \in K$ und Zahlen $\lambda \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ mit $(z + 2\varepsilon B^n) \cap K = \emptyset$ für $z := (1-\lambda)x + \lambda y$. Es sei $L \in \mathcal{C}^n$ eine kompakte Menge mit $d(K, L) < \varepsilon$. Dann gibt es Punkte $x', y' \in L$ mit

$$\|x - x'\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \|y - y'\| < \varepsilon.$$

Für den Punkt $z' := (1-\lambda)x' + \lambda y'$ gilt also $\|z' - z\| < \varepsilon$. Wäre $z' \in L$, so gäbe es einen Punkt $w \in K$ mit $\|w - z'\| < \varepsilon$, also mit $\|w - z\| < 2\varepsilon$, ein Widerspruch. Damit ist auch L nicht konvex. ■

In vielen Bereichen der Mathematik benötigt man Resultate, die die Existenz der Lösungen von Extremalproblemen garantieren. Als Konsequenz der Sätze 2.3 und 2.5 erhalten wir ein solches Ergebnis für konvexe Körper.

Auswahlsatz von Blaschke. *Jede beschränkte Folge konvexer Körper besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Da die Menge der konvexen Körper $\mathcal{K}^n$ nun mit einer Metrik versehen wurde, können wir die Approximation allgemeiner Körper durch spezielle, wie Polytope, behandeln. Diese stellt ein oft benutztes Hilfsmittel dar, welches insbesondere zur Definition und dem Studium geometrischer Funktionale eingesetzt werden kann. Wir zeigen zunächst, dass die Menge der Polytope dicht ist in $\mathcal{K}^n$.

Satz 2.6 *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Polytop $P \in \mathcal{K}^n$ mit $P \subseteq K$ und $d(P, K) \leq \varepsilon$.*

Beweis: Als kompakte Menge können wir K durch endlich viele Kugeln mit Radius ε, deren Mittelpunkte in K liegen, überdecken. Die konvexe Hülle der Mittelpunkte dieser Kugeln ist ein Polytop P mit

$$P \subseteq K \subseteq P + \varepsilon B^n.$$

Insbesondere gilt also $d(K, P) \leq \varepsilon$. ■

Im vorstehenden Beweis können wir zusätzlich fordern, dass alle verwendeten Kugelmittelpunkte rationale Koordinaten haben. Da die Menge der Polytope mit rationalen Ecken abzählbar ist, zeigt dies, dass der Raum $(\mathcal{K}^n, d)$ separabel ist.

Korollar 2.7 *Der metrische Raum $(\mathcal{K}^n, d)$ ist lokalkompakt, separabel und vollständig.*

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm von stetigen Funktionen auf S^{n-1}:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(u)| : u \in S^{n-1}\}, \qquad f \in \mathbf{C}(S^{n-1}).$$

Verwenden wir Stützfunktionen zur Beschreibung konvexer Körper, so lässt sich deren Konvergenz auf einfache Art ausdrücken.

Satz 2.8 *Für $K, L \in \mathcal{K}^n$ gilt*

$$d(K, L) = \|h(K, \cdot) - h(L, \cdot)\|_\infty.$$

Beweis: Es sei $d(K, L) = \alpha$. Dann gilt $K \subseteq L + \alpha B^n$, also für $u \in S^{n-1}$,

$$h(K, u) \leq h(L + \alpha B^n, u) = h(L, u) + \alpha.$$

Vertauschung von K und L liefert daher für alle $u \in S^{n-1}$,

$$|h(K, u) - h(L, u)| \leq \alpha$$

und daher $\|h(K, \cdot) - h(L, \cdot)\|_\infty \leq \alpha$. Dieses Argument kann umgekehrt werden. ■

Nach Satz 1.15 und Satz 2.8 wird der metrische Raum $(\mathcal{K}^n, d)$ durch die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{K}^n \to \mathbf{C}(S^{n-1}), \quad K \mapsto h(K, \cdot)$$

isomorph (als konvexer Kegel) und isometrisch in den Banachraum $\mathbf{C}(S^{n-1})$ der stetigen Funktionen auf S^{n-1} versehen mit der Maximumsnorm eingebettet.

Die Konvergenz konvexer Körper ist also äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz der entsprechenden Stützfunktionen auf S^{n-1}. Das nächste Resultat zeigt, dass diese gleichmäßige Konvergenz bereits aus der punktweisen Konvergenz folgt.

Satz 2.9 *Ist eine Folge von Stützfunktionen auf S^{n-1} punktweise konvergent, so konvergiert sie auf S^{n-1} gleichmäßig gegen eine Stützfunktion.*

Beweis: Es sei $h(K_i,\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, eine Folge von Stützfunktionen, die auf S^{n-1} und daher wegen der Homogenität von Stützfunktionen auf ganz $\mathbb{R}^n$ punktweise konvergiert. Die (punktweise) Grenzfunktion h ist offenbar sublinear und daher nach Satz 1.14 ebenfalls eine Stützfunktion.

Für jedes $u \in S^{n-1}$ ist $\alpha(u) := \sup_i h(K_i,u)$ endlich. Wir können daher eine Zahl $R > 0$ wählen mit

$$\bigcap_{u \in S^{n-1}} H^-_{u,\alpha(u)} \subseteq RB^n.$$

Dann gilt offenbar $K_i \subseteq RB^n$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir wählen Punkte $x_i \in K_i$ mit $h(K_i,u) = x_i \cdot u$. Dann gilt für $v \in S^{n-1}$,

$$h(K_i,u) - h(K_i,v) \leq x_i \cdot (u-v) \leq \|x_i\|\|u-v\| \leq R\|u-v\|.$$

Vertauschung von u und v liefert $|h(K_i,u) - h(K_i,v)| \leq R\|u-v\|$.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen eine endliche Menge $S \subseteq S^{n-1}$ derart, dass zu jedem $u \in S^{n-1}$ ein $v \in S$ existiert mit $\|u-v\| < \varepsilon/3R$. Da S endlich ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für $i,j \geq n_0$ und alle $v \in S$,

$$|h(K_i,v) - h(K_j,v)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun sei $u \in S^{n-1}$. Wir können ein $v \in S$ wählen mit minimalem Abstand von u. Schreiben wir h_i für die Einschränktung von $h(K_i,\cdot)$ auf S^{n-1}, so folgt für $i,j \geq n_0$,

$$|h(K_i,u) - h(K_j,u)| \leq |h_i(u) - h_i(v)| + |h_i(v) - h_j(v)| + |h_j(v) - h_j(u)| < \varepsilon.$$

Damit erhalten wir für $i \geq n_0$,

$$|h(K_i,u) - h(u)| \leq \varepsilon.$$

Da $u \in S^{n-1}$ beliebig war, folgt die gleichmäßige Konvergenz von $h(K_i,\cdot)$ gegen h. ∎

Wir wollen uns nun der Menge $\mathcal{S}^n \subseteq \mathcal{C}^n$ der Sternkörper im $\mathbb{R}^n$ zuwenden. Wie einfache Beispiele zeigen, ist $\mathcal{S}^n$ keine abgeschlossene Teilmenge von $(\mathcal{C}^n, d)$. Man versieht daher $\mathcal{S}^n$ mit einer neuen Metrik. Motiviert durch Satz 2.1 definiert man:

Definition. Für $K, L \in \mathcal{S}^n$ wird der *Radial-Abstand* definiert durch

$$r(K,L) := \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L \tilde{+} \lambda B^n, L \subseteq K \tilde{+} \lambda B^n\}.$$

Nach Satz 2.8 lässt sich die Konvergenz konvexer Körper bequem durch die gleichmäßige Konvergenz der entsprechenden Stützfunktionen auf S^{n-1} audrücken. Auf analoge Weise zeigt man, dass die Konvergenz von Sternkörpern bezüglich der Radial-Metrik äquivalent ist zur Konvergenz der entsprechenden Radialfunktionen bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathbf{C}(S^{n-1})$.

Proposition 2.10 *Für $K, L \in \mathcal{S}^n$ gilt*

$$r(K,L) = \|\rho(K,\cdot) - \rho(L,\cdot)\|_\infty.$$

Die Definitionen (1.1), (1.2) und Proposition 2.10 zeigen, dass der metrische Raum $(\mathcal{S}^n, r)$ durch die Abbildung

$$\psi : \mathcal{S}^n \to \mathbf{C}(S^{n-1}), \quad L \mapsto \rho(L, \cdot)$$

isomorph (als konvexer Kegel) und isometrisch in den Banachraum $\mathbf{C}(S^{n-1})$ versehen mit der Maximumsnorm eingebettet wird. Es gilt dabei genauer

$$\psi(\mathcal{S}^n) = \mathbf{C}_+(S^{n-1}) = \{\rho \in \mathbf{C}(S^{n-1}) : \rho \geq 0\}.$$

Korollar 2.11 *Der metrische Raum $(\mathcal{S}^n, r)$ ist vollständig.*

Bemerkung.

(a) Man kann zeigen, dass $(\mathcal{S}^n, r)$ nicht lokalkompakt ist.

(b) Für $K, L \in \mathcal{S}^n$ gilt

$$d(K, L) \leq r(K, L).$$

Die Konvergenz in der Radial-Metrik impliziert also insbesondere Konvergenz in der Hausdorff-Metrik.

(c) Es seien $0 < r < R$ und $K, L \in \mathcal{K}^n(r, R)$, wobei

$$\mathcal{K}^n(r, R) := \{K \in \mathcal{K}^n : rB^n \subseteq K \subseteq RB^n\}.$$

Dann gilt

$$r(K, L) \leq \frac{R}{r} d(K, L).$$

Konvergenz bezüglich der Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{K}^n(r, R)$ ist also äquivalent zur Konvergenz bezüglich der Radial-Metrik.

Im folgenden beziehen sich alle metrischen und topologischen Begriffe, die im Zusammenhang mit $\mathcal{K}^n$ verwendet werden, auf die Hausdorff-Metrik und jene die im Zusammenhang mit $\mathcal{S}^n$ verwendet werden, auf die Radial-Metrik und die davon induzierte Topologie.

Nachdem wir $\mathcal{K}^n$ und $\mathcal{S}^n$ mit einer Metrik versehen haben, stellt sich die Frage nach der Stetigkeit der für uns wesentlichen Abbildungen. Aus den Sätzen 1.15 und 2.8 sowie der Definition 1.1 und der Proposition 2.10 folgt die Stetigkeit der Additionen auf $\mathcal{K}^n$ und $\mathcal{S}^n$:

Proposition 2.12 *Für $K, K', L, L' \in \mathcal{K}^n$ gilt*

$$d(K + K', L + L') \leq d(K, L) + d(K', L').$$

Für $K, K', L, L' \in \mathcal{S}^n$ gilt

$$r(K \tilde{+} K', L \tilde{+} L') \leq r(K, L) + r(K', L').$$

Schwieriger zu zeigen ist die Stetigkeit des Volumens auf $\mathcal{K}^n$ und $\mathcal{S}^n$. Das *Volumen* auf $\mathcal{C}^n$ ist dadurch definiert, dass $V(K)$ das Lebesgue-Maß von $K \in \mathcal{C}^n$ ist.

Satz 2.13 *Das Volumen ist stetig auf $\mathcal{K}^n$.*

Beweis: Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ gegeben. Gilt $V(K) = 0$, so liegt K in einer Hyperebene. Es sei $L \in \mathcal{K}^n$ ein konvexer Körper mit $d(K, L) \leq \alpha \leq 1$. Dann gilt $L \subseteq K + \alpha B^n$, also $V(L) \leq V(K + \alpha B^n)$. Eine einfache Abschätzung zeigt, dass $V(K + \alpha B^n) \leq c(K)\alpha$ mit einer von α unabhängigen Zahl $c(K)$. Daraus folgt die Stetigkeit von V bei K.

Sei nun $V(K) > 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir können $o \in \operatorname{int} K$ annehmen. Wir wählen $\lambda > 1$ mit $(\lambda^n - 1)\lambda^n V(K) < \varepsilon$ und ein $r > 0$ mit $rB^n \subseteq \operatorname{int} K$. Dann ist die Funktion $h(K, \cdot) - h(rB^n, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ positiv, sie nimmt also auf S^{n-1} ein positives Minimum α an. Für alle $L \in \mathcal{K}^n$ mit $d(K, L) < \eta \leq \alpha$, gilt dann $|h(K, u) - h(L, u)| < \alpha$ und daher $h(rB^n, u) \leq h(K, u) - \alpha < h(L, u)$ für $u \in S^{n-1}$ also $rB^n \subseteq L$. Wählen wir $\eta \leq \min\{\alpha, (\lambda - 1)r\}$, so folgt

$$K \subseteq L + (\lambda - 1)rB^n \subseteq L + (\lambda - 1)L = \lambda L$$

und analog $L \subseteq \lambda K$. Daraus erhalten wir

$$V(K) \leq \lambda^n V(L) \qquad \text{und} \qquad V(L) \leq \lambda^n V(K),$$

also

$$V(K) - V(L) \leq (\lambda^n - 1)V(L) \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n V(K), \tag{2.4}$$
$$V(L) - V(K) \leq (\lambda^n - 1)V(K) \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n V(K) \tag{2.5}$$

und daher

$$|V(K) - V(L)| \leq (\lambda^n - 1)\lambda^n V(K) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Um zu zeigen, dass das Volumen auf $\mathcal{S}^n$ stetig ist, verwenden wir Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$. Dabei wird ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ durch seinen Abstand r vom Ursprung und einen Punkt $u \in S^{n-1}$, der die Richtung von x angibt, bestimmt. Der Punkt $u \in S^{n-1}$ kann dabei durch $n - 1$ reelle Koordinaten spezifiziert werden. Wir definieren für $(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi)^{n-2} \times [0, 2\pi)$,

$$p(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) := \begin{pmatrix} r & \cos\varphi_1 & & & & \\ r & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 & & & \\ \vdots & & & & & \\ r & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \ldots & \sin\varphi_{n-2} & \cos\varphi_{n-1} \\ r & \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \cdots & \sin\varphi_{n-2} & \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix} =: ru.$$

Die induktive Berechnung der Funktionaldeterminante liefert

$$(Jp)(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2}.$$

Für jede integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ gilt daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(ru)\, r^{n-1}\, d\sigma(u)\, dr.$$

Dabei haben wir das durch

$$\int_{S^{n-1}} g(u)\, d\sigma(u) = \int_{[0,\pi)^{n-2}\times[0,2\pi)} g(p(1,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))(Jp)(1,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\, d(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})$$

definierte rotationsinvariante Maß σ auf S^{n-1} verwendet.

Nach einem bekannten Resultat über invariante Maße auf Restklassenräumen ist das Maß σ bis auf einen positiven Faktor das eindeutig bestimmte rotationsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf S^{n-1}. Wir machen uns diese Invarianzeigenschaft bei der Berechnung der Gesamtmasse von σ, also der Oberfläche ω_n von B^n, zu Nutze.

Die Funktion $f(x) = \exp(-x\cdot x)$ ist einerseits rotationsinvariant und andererseits ein Produkt von Funktionen in den Koordinaten von x. Damit erhalten wir einerseits

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x_i^2)\, dx_i = \left(\sqrt{\pi}\,\right)^n$$

und andererseits

$$\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \exp(-r^2) r^{n-1}\, d\sigma(u)\, dr = \sigma(S^{n-1}) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n}.$$

Es gilt also

$$\omega_n := \sigma(S^{n-1}) = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Durch die Integration bezüglich Polarkoordinaten erhalten wir eine sehr nützliche Formel zur Berechnung des Volumens von Sternkörpern:

Satz 2.14 *Für $L \in \mathcal{S}^n$ gilt*

$$V(L) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho(L,u)^n\, d\sigma(u).$$

Beweis: Schreiben wir $\mathbb{I}(L,\cdot)$ für die Indikatorfunktion von L, so gilt

$$V(L) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{I}(L,x)\, dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(L,u)} r^{n-1}\, dr\, d\sigma(u) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho(L,u)^n\, d\sigma(u).$$

■

Korollar 2.15 *Das Volumen V ist stetig auf $\mathcal{S}^n$.*

Zum Abschluss weisen wir darauf hin, dass das Volumen auf $(\mathcal{C}^n, d)$ nicht stetig ist: Jede kompakte Menge ist Grenzwert einer Folge endlicher Mengen, und diese haben Volumen Null.

3 Gemischte und duale gemischte Volumina

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten des Volumens in Verbindung mit den auf den Räumen $\mathcal{K}^n$ und $\mathcal{S}^n$ eingeführten Additionen. Betrachtet man das Volumen einer Minkowski Linearkombination von konvexen Körpern mit variablen Koeffizienten, so erhält man ein Polynom. Die Koeffzienten sind die sogenannten gemischten Volumina. Analog dazu kann auch das Volumen einer Radial Linearkombination von Sternkörpern durch ein Polynom ausgedrückt werden, dessen Koeffizienten duale gemischte Volumina heißen.

Als unmittelbare Folge von Satz 2.14 und Definition (1.1) erhalten wir:

Satz 3.1 *Es seien $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{S}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$. Dann gibt es Koeffizienten $\tilde{V}(L_{i_1}, \dots, L_{i_n})$, $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m$, die symmetrisch in ihren Argumenten sind, sodass*

$$V(\lambda_1 L_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_m L_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \tilde{V}(L_{i_1}, \dots, L_{i_n}).$$

Beweis: Nach Satz 2.14 und Definition (1.1) gilt

$$V(\lambda_1 L_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_m L_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \left(\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho(L_{i_1}, u) \cdots \rho(L_{i_n}, u) \, d\sigma(u) \right).$$

■

Definition. Für $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{S}^n$ ist das *duale gemischte Volumen* definiert durch

$$\tilde{V}(L_1, \dots, L_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho(L_1, u) \cdots \rho(L_n, u) \, d\sigma(u).$$

Unmittelbar aus den Eigenschaften von Radialfunktionen erhalten wir die folgenden Eigenschaften dualer gemischter Volumina:

Proposition 3.2 *Es seien $K, L, L_1, \dots, L_n \in \mathcal{S}^n$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $\tilde{V} : \mathcal{S}^n \times \cdots \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

(b) $\tilde{V}(L_1, \dots, L_n) \geq 0$.

(c) $\tilde{V}$ *ist multilinear, d.h. für alle* $\alpha, \beta \geq 0$ *gilt*

$$\tilde{V}(\alpha K \tilde{+} \beta L, L_2, \dots, L_n) = \alpha \tilde{V}(K, L_2, \dots, L_n) + \beta \tilde{V}(L, L_2, \dots, L_n).$$

(d) $\tilde{V}$ *ist monoton, d.h. für* $K \subseteq L$ *gilt* $\tilde{V}(K, L_2, \dots, L_n) \leq \tilde{V}(L, L_2, \dots, L_n)$.

(e) $\tilde{V}(K, \dots, K) = V(K)$.

(f) Für alle $\phi \in \mathrm{GL}(n)$ *gilt* $\tilde{V}(\phi L_1, \dots, \phi L_n) = |\det \phi| \tilde{V}(L_1, \dots, L_n)$.

Als nächstes untersuchen wir das Volumen einer Minkowski Summe von konvexen Körpern. Um hier eine zu Satz 3.1 analoge Aussage zu erhalten, betrachten wir zunächst Polytope und einige ihrer grundlegenden Eigenschaften.

Für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ ist die *Stützmenge* von K mit äußerem Normalenvektor $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ definiert durch

$$F(K,u) := H(K,u) \cap K.$$

Jede Stützmenge von K ist offenbar wieder ein konvexer Körper, deren Stützfunktion sich auf einfache Weise durch die Stützfunktion von K ausdrücken lässt.

Satz 3.3 *Es seien $K \in \mathcal{K}^n$ und $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$h(F(K,u),x) = h_K'(u;x) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{h(K,u+\lambda x) - h(K,u)}{\lambda}.$$

Insbesondere folgt $F(K+L,u) = F(K,u) + F(L,u)$ für $K, L \in \mathcal{K}^n$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $h_K'(u;x)$ für alle $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ existiert. Dazu sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\eta) = h(K,u+\eta x)$. Offenbar ist f eine konvexe Funktion. Damit gilt aber für $0 < \lambda < \mu$,

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\lambda}{\mu}\mu\right) \leq \frac{\mu-\lambda}{\mu} f(0) + \frac{\lambda}{\mu} f(\mu),$$

also

$$\frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda} \leq \frac{f(\mu)-f(0)}{\mu}.$$

Für beliebiges $\eta > 0$ und alle $\lambda > 0$ gilt

$$f(0) = f\left(\frac{\lambda}{\lambda+\eta}(-\eta) + \frac{\eta}{\lambda+\eta}\lambda\right) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\eta} f(-\eta) + \frac{\eta}{\lambda+\eta} f(\lambda),$$

und damit

$$\frac{f(0)-f(-\eta)}{\eta} \leq \frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda}.$$

Diese Ungleichung und die zuvor gezeigte Monotonie Eigenschaft sichern aber gerade die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(\lambda)-f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{h(K,u+\lambda x) - h(K,u)}{\lambda} = h_K'(u;x).$$

Als nächstes zeigen wir, dass für festes $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ die Funktion $h_K'(u;\cdot)$ sublinear und damit nach Satz 1.14 Stützfunktion eines konvexen Körpers ist. Für $\lambda, \mu > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{h(K,u+\mu\lambda x) - h(K,u)}{\mu} = \lambda \frac{h(K,u+\mu\lambda x) - h(K,u)}{\mu\lambda}$$

und wegen der Konvexität von $h(K,\cdot)$,

$$\frac{h(K,u+\mu(x+y)) - h(K,u)}{\mu} \leq \frac{h(K,u+2\mu x) - h(K,u)}{2\mu} + \frac{h(K,u+2\mu y) - h(K,u)}{2\mu}.$$

Mit $\mu \downarrow 0$ folgt $h_K'(u;\lambda x) = \lambda h_K'(u;x)$ und $h_K'(u;x+y) \leq h_K'(u;x) + h_K'(u;y)$.

Damit gibt es einen konvexen Körper $K_u \in \mathcal{K}^n$ mit $h(K_u, \cdot) = h'_K(u; \cdot)$. Wegen $h(K, u + \lambda x) \leq h(K, u) + \lambda h(K, x)$ gilt für alle $\lambda > 0$,

$$\frac{h(K, u + \lambda x) - h(K, u)}{\lambda} \leq h(K, x).$$

Mit $\lambda \downarrow 0$ folgt $h'_K(u; x) \leq h(K, x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, also $K_u \subseteq K$. Es sei nun $y \in K_u$. Dann ist

$$\begin{aligned} y \cdot u &\leq h(K_u, u) \leq h(K, u), \\ y \cdot -u &\leq h(K_u, -u) = h'_K(u; -u) = -h(K, u). \end{aligned}$$

Es folgt $y \cdot u = h(K, u)$ und daher $y \in H(K, u)$. Somit gilt $K_u \subseteq F(K, u)$.

Es sei schließlich noch $y \in F(K, u)$. Dann gilt $y \cdot u = h(K, u)$ und $y \cdot v \leq h(K, v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $v = u + \lambda x$, für $\lambda > 0$. Dann folgt

$$y \cdot x \leq \frac{h(K, u + \lambda x) - h(K, u)}{\lambda},$$

also $y \cdot x \leq h'_K(u; x) = h(K_u, x)$. Da dies für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, ist $y \in K_u$. ■

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathcal{P}^n$ die Menge aller Polytope im $\mathbb{R}^n$.

Definition. Eine Stützmenge eines Polytops $P \in \mathcal{P}^n$ heißt eine *Seite* von P. Wir bezeichnen die Menge aller i-dimensionalen Seiten von P mit $\mathcal{F}_i(P)$. Die Seiten der Dimension Null heißen die *Ecken* von P, die Seiten der Dimension $n - 1$ heißen *Facetten* von P.

Polytope sind konvexe Körper mit einer besonders einfachen Randstruktur, denn sie haben nur endlich viele Seiten, welche ebenfalls Polytope sind.

Satz 3.4 *Es seien $P, P_1, P_2 \in \mathcal{P}^n$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Jede Seite von P ist ein Polytop.

(b) $\mathcal{F}_i(P)$ ist endlich für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

(c) $P_1 + P_2 \in \mathcal{P}^n$.

Beweis: Es sei $H_{u,\alpha}$ Stützebene von $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$. Wir wollen zeigen, dass

$$H_{u,\alpha} \cap P = \operatorname{conv}(H_{u,\alpha} \cap \{x_1, \dots, x_k\}). \tag{3.1}$$

Sei $K \in \mathcal{P}^n$ das Polytop auf der rechten Seite von (3.1). Offenbar ist $K \subseteq H_{u,\alpha} \cap P$. Sei nun $x \in H_{u,\alpha} \cap P$. Da $H_{u,\alpha}$ Stützebene von P ist, gilt $H_{u,\alpha} \cap \{x_1, \dots, x_k\} \neq \emptyset$. Wir können daher $\{x_1, \dots, x_j\} \subseteq H_{u,\alpha}$ für geeignetes $j \in \{1, \dots, k\}$ annehmen. Da $x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$, gibt es Zahlen $\lambda_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq k$, mit $\sum_i \lambda_i = 1$, sodass

$$\alpha = x \cdot u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \cdot u = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \alpha + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i x_i \cdot u.$$

Da $P \subseteq H^-_{u,\alpha}$ ist $x_i \cdot u < \alpha$ für alle $i > j$ und damit $\lambda_i = 0$ für $i > j$, also $x \in K$. Es folgt (3.1) und damit Behauptungen (a) und (b).

Um zu zeigen, dass $P_1 + P_2$ ein Polytop ist, sei $P_1 = \operatorname{conv} A$ und $P_2 = \operatorname{conv} B$ mit $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $B = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Es sei $x \in \operatorname{conv}(A + B)$. Dann gibt es $a_i \in A, b_i \in B$ und $\lambda_i \in [0,1]$, $1 \leq i \leq l$, mit $\sum_i \lambda_i = 1$, sodass

$$x = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i b_i \in P_1 + P_2.$$

Ist umgekehrt $x \in P_1 + P_2$, dann gibt es $\lambda_i, \mu_j \in [0,1]$ mit $\sum_i \lambda_i = \sum_j \mu_j = 1$, sodass

$$x = \sum_i \lambda_i a_i + \sum_j \mu_j b_j = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j) \in \operatorname{conv}(A + B).$$

Also gilt insgesamt $P_1 + P_2 = \operatorname{conv}(A + B) \in \mathcal{P}^n$. ■

Bemerkung.

(a) Es sei $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$ ein Polytop im $\mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ minimal gewählt. Dann folgt aus (3.1), dass $x_1, \ldots, x_k$ genau die Ecken von P sind.

Polytope können nicht nur als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten, sondern auch als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen dargestellt werden.

Satz 3.5 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Jedes Polytop ist Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen.

(b) Jeder nichtleere, beschränkte Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen ist ein Polytop.

Beweis: (a) Es sei $P \in \mathcal{P}^n$ ein Polytop und $F_1, \ldots, F_k$ seien die Facetten von P. Wir können $\dim P = n$ annehmen, da Ebenen als Durchschnitte von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen dargestellt werden können. Es seien H_i, $1 \leq i \leq k$, die Stützebenen von P, sodass $H_i \cap P = F_i$ und $P \subseteq H_i^-$. Wir behaupten, dass

$$P = H_1^- \cap \cdots \cap H_k^-.$$

Die Inklusion $P \subseteq H_1^- \cap \cdots \cap H_k^-$ ist klar. Es sei nun $x \in \mathbb{R}^n \backslash P$ und A sei die Vereinigung aller affinen Hüllen von x und je $n-1$ Ecken von P. Wir wählen einen Punkt $y \in \operatorname{int} P \backslash A$. Dann gibt es einen Punkt $z \in \operatorname{bd} P \cap [x, y]$ und z liegt in einer Stützebene an P also in einer Seite F von P. Angenommen, $\dim F \leq n-2$. Nach dem Satz von Carathéodory liegt z dann in der konvexen Hülle von höchstens $n-1$ Ecken von P und daher in A. Aber daraus folgt $y \in A$, ein Widerspruch. Also ist $F = F_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$. Aus $y \in \operatorname{int} P \subseteq \operatorname{int} H_i^-$ folgt $x \notin H_i^-$.

(b) Es sei $P = \bigcap_{i=1}^k H_i^-$ nichtleer und beschränkt, wobei $H_1^-, \ldots, H_k^- \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Halbräume sind. Wir können $\dim P = n$ annehmen (andernfalls ersetzen wir $\mathbb{R}^n$ durch die affine Hülle von P) und nach einer Translation dann $o \in \operatorname{int} P$. Damit gilt $o \in \operatorname{int} H_i^-$, und wir können $H_i^- = H_{u_i,1}^-$ annehmen. Wir behaupten, dass

$$P^* = \operatorname{conv}\{u_1, \ldots, u_k\}. \tag{3.2}$$

Da $x \cdot u_i \leq 1$ für alle $x \in P$, ist $u_i \in P^*$, $1 \leq i \leq k$, also $K := \operatorname{conv}\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq P^*$.

Es sei nun $v \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Dann gibt es nach Satz 1.22 eine Hyperebene $H_{z,\alpha}$ die K und $\{v\}$ stark trennt. Wir können annehmen, dass $z \cdot u_i < \alpha$ für $i = 1, \ldots, k$ und $z \cdot v > \alpha$ gilt. Da P beschränkt ist, gilt

$$\text{pos}\,\{u_1, \ldots, u_k\} := \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq k\} = \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Andernfalls hätte der abgeschlossene konvexe Kegel pos $\{u_1, \ldots, u_k\}$ Randpunkte und damit eine Stützebene durch o, jeder ihrer äußeren Normalenvektoren gehört aber zu P. Nach (3.3) gibt es also $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$, mit $\sum_i \lambda_i > 0$, sodass $o = \sum_i \lambda_i u_i$. Aus $z \cdot u_i < \alpha$ folgt nun $0 < \alpha \sum_i \lambda_i$ also $\alpha > 0$. Wir können daher $\alpha = 1$ annehmen. Dann gilt $z \in P$ und folglich $v \notin P^*$, also ist $P^* = K$.

Nach (3.2) ist P^* ein Polytop. Nach (a) ist P^* daher ein Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen mit $o \in \text{int}\, P^*$. Dieselbe Schlussweise liefert nun, dass auch P^{**} ein Polytop ist und nach Satz 1.17 ist $P^{**} = P$. ■

Bemerkung und Definition.

(a) Aus Satz 3.5 folgt, dass der Durchschnitt von endlich vielen Polytopen und der Durchschnitt eines Polytops mit einer Ebene ebenfalls Polytope sind.

(b) Es sei $P \in \mathcal{P}^n$ mit nichleerem Inneren und F_i, $1 \leq i \leq m$, seien die Facetten von P. Dann gilt $F_i = P \cap H_{u_i,\alpha_i}$ und $P \subseteq H^-_{u_i,\alpha_i}$ für geeignete $u_i \in S^{n-1}$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Der Vektor u_i heißt der *äußere Normalenvektor* der Facette F_i und $u_1, \ldots, u_m$ werden als *Normalenvektoren* von P bezeichnet. Es gilt

$$P = \bigcap_{i=1}^{m} H^-_{u_i,h(P,u_i)}.$$

Wir haben im letzten Abschnitt das Volumen eines konvexen Körpers über das Lebesgue Maß definiert. Für Polytope lässt sich das Volumen auch auf elementarem Weg rekursiv definieren. Die Grundlage dafür bildet das folgende Resultat, welches die Bestimmung des Volumens eines Polytops auf die $(n-1)$-dimensionalen Lebesgue Maße, symbolisch vol_{n-1}, seiner Facetten zurückführt:

Satz 3.6 *Es sei $P \in \mathcal{P}^n$ mit nichtleerem Inneren. Sind $F_1, \ldots, F_m$ die Facetten von P und $u_1, \ldots, u_m$ die zugehörigen Normaleneinheitsvektoren, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \text{vol}_{n-1}(F_i)\, u_i = o \tag{3.4}$$

und

$$V(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} h(P, u_i) \text{vol}_{n-1}(F_i). \tag{3.5}$$

Beweis: Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $v \in S^{n-1}$ bezeichnen wir mit $K|v^\perp$ die Orthogonalprojektion von K auf den zu v orthogonalen Unterraum $v^\perp$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini zeigt man induktiv, dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\text{vol}_{n-1}(F_i|v^\perp) = |u_i \cdot v| \text{vol}_{n-1}(F_i).$$

Da durch die Projektion auf $v^\perp$ der „obere Rand“ $\bigcup_{u_i \cdot v > 0} F_i$ und der „untere Rand“ $\bigcup_{u_i \cdot v < 0} F_i$ jeweils bijektiv auf $P|v^\perp$ abgebildet werden, gilt

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P|v^\perp) = \sum_{u_i \cdot v > 0} \mathrm{vol}_{n-1}(F_i)\, u_i \cdot v = - \sum_{u_i \cdot v < 0} \mathrm{vol}_{n-1}(F_i)\, u_i \cdot v.$$

Da dies für alle $v \in S^{n-1}$ gilt, ergibt sich die Relation (3.4).

Wegen (3.4) ändert sich die rechte Seite von (3.5) nicht unter Translationen von P. Wir können daher $o \in \mathrm{int}\, P$ annehmen. Dann ist P die Vereinigung der Pyramiden $\mathrm{conv}\,(F_i \cup \{o\})$, $1 \le i \le m$, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Die Volumsformel (3.5) ergibt sich damit aus

$$V(\mathrm{conv}\,(F_i \cup \{o\})) = \frac{1}{n} \mathrm{vol}_{n-1}(F_i) h(P, u_i).$$ ■

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun gemischte Volumina von Polytopen definieren. Für Polytope $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}^n$ bezeichnen wir dabei im folgenden mit $N(P_1, \dots, P_m)$ die Menge der Normalenvektoren von $P_1 + \dots + P_m$.

Satz 3.7 *Es seien $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \ge 0$. Dann gibt es Koeffizienten $V(P_{i_1}, \dots, P_{i_n})$, $1 \le i_1, \dots, i_n \le m$, die symmetrisch in ihren Argumenten und invariant unter individuellen Translationen ihrer Argumente sind, sodass $V(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}) = 0$, wenn $\dim(P_{i_1} + \dots + P_{i_n}) \le n - 1$, und*

$$V(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} V(P_{i_1}, \dots, P_{i_n}). \tag{3.6}$$

Beweis: Wir definieren das gemischte Volumen $V(Q_1, \dots, Q_n)$ von $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}^n$ rekursiv: In Dimension $n = 1$ sei $V^{(1)}(Q_1) := V(Q_1)$ und für $n \ge 2$ sei

$$V^{(n)}(Q_1, \dots, Q_n) := \frac{1}{n} \sum_{u \in N(Q_1, \dots, Q_{n-1})} h(Q_n, u) V^{(n-1)}(F(Q_1, u), \dots, F(Q_{n-1}, u)),$$

dabei verwenden wir die Erweiterung des k-dimensionalen gemischten Volumens auf Polytope $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}^n$ mit $\dim(Q_1 + \dots + Q_k) \le k$ gegeben durch

$$V^{(k)}(Q_1, \dots, Q_k) := V^{(k)}(Q_1|E, \dots, Q_k|E),$$

wobei E ein k-dimensionaler Unterraum parallel zu $Q_1 + \dots + Q_k$ ist. Die (noch zu zeigende) Invarianz gegenüber Translationen sowie die Bedingung an die Dimension der auftretenden Polytope sichert, dass diese Erweiterung konsistent ist.

Wir zeigen die Behauptungen des Satzes nun durch Induktion nach der Dimension n. Für $n = 1$ sind Polytope Intervalle in $\mathbb{R}$ und das 1-dimensionale Volumen linear. Damit folgen für $n = 1$ alle angegebenen Aussagen.

Nun sei $n \ge 2$ und die Behauptungen des Satzes in der Dimension $n - 1$ bewiesen. Um im folgenden die Notation zu vereinfachen, verwenden wir die Abkürzungen $V(Q_1, \dots, Q_n) := V^{(n)}(Q_1, \dots, Q_n)$ und $v(Q_1, \dots, Q_{n-1}) := V^{(n-1)}(Q_1, \dots, Q_{n-1})$. Ist $\dim(Q_1 + \dots + Q_n) \le n - 1$, dann ist entweder $N(Q_1, \dots, Q_{n-1}) = \emptyset$, also $V(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ nach Definition, oder $N(Q_1, \dots, Q_{n-1}) = \{-u, u\}$, wobei u Normalvektor der affinen Hülle von $Q_1 + \dots + Q_n$ ist. Es folgt $h(Q_n, -u) = -h(Q_n, u)$ und $F(Q_i, u) = F(Q_i, -u)$ für $1 \le i \le n-1$. Daher gilt auch hier $V(Q_1, \dots, Q_n) = 0$.

Wir wollen als nächstes (3.6) zeigen. Dazu können wir $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ annehmen. Nach Satz 3.6, Satz 1.15 und Satz 3.3 sowie der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} V(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m) &= \frac{1}{n} \sum_{u \in N(P_1,\ldots,P_m)} h\left(\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i, u\right) \mathrm{vol}_{n-1}(F\left(\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i P_i, u\right)) \\ &= \sum_{i_n=1}^m \lambda_{i_n} \frac{1}{n} \sum_{u \in N(P_1,\ldots,P_m)} h(P_{i_n}, u) \mathrm{vol}_{n-1} \left(\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i \, F(P_i, u)|u^\perp\right) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^m \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} \frac{1}{n} \sum_{u \in N(P_1,\ldots,P_m)} h(P_{i_n}, u) v(F(P_{i_1}, u), \ldots, F(P_{i_{n-1}}, u)). \end{aligned}$$

Offenbar ist $N(P_{i_1}, \ldots, P_{i_{n-1}}) \subseteq N(P_1, \ldots, P_m)$. Ist $u \notin N(P_{i_1}, \ldots, P_{i_{n-1}})$, dann gilt $\dim(F(P_{i_1}, u) + \cdots + F(P_{i_{n-1}}, u)) \leq n-2$ und daher nach Induktionsvorraussetzung $v(F(P_{i_1}, u), \ldots, F(P_{i_{n-1}}, u)) = 0$. Wir können die Summation über $N(P_1, \ldots, P_m)$ daher durch die Summation über $N(P_{i_1}, \ldots, P_{i_{n-1}})$ ersetzen und erhalten (3.6).

Es bleibt die Symmetrie und die Invarianz gegenüber Translationen zu zeigen. Da $v(F(Q_1, u), \ldots, F(Q_{n-1}, u))$ nach Induktionsvoraussetzung symmetrisch ist, genügt es nachzuweisen, dass gilt

$$V(Q_1, \ldots, Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n) = V(Q_1, \ldots, Q_{n-2}, Q_n, Q_{n-1}).$$

Wir können außerdem annehmnen, dass $Q := Q_1 + \cdots + Q_n$ nichtleeres Inneres besitzt. Bezeichnet $N(Q(u))$ die Normalenvektoren von $F(Q, u)$ in $u^\perp$, dann gilt

$$\begin{aligned} &v(Q_1(u), \ldots, Q_{n-1}(u)) \\ &\quad = \frac{1}{n-1} \sum_{w' \in N(Q(u))} h(Q_{n-1}(u), w') V^{(n-2)}((Q_1(u))(w'), \ldots, (Q_{n-2}(u))(w')), \end{aligned}$$

wobei wir für Polytope $Q \in \mathcal{P}^n$ die Abkürzung $F(Q, u) = Q(u)$ sowie die Relation $h(Q(u)|u^\perp, w') = h(Q(u), w')$ für alle $w' \in u^\perp$ verwendet haben. Die Facetten von $Q(u)$ in $u^\perp$ sind $(n-2)$-dimensionale Seiten von Q. Da $\dim Q = n$, treten diese Seiten als Durchschnitt $Q(u) \cap Q(w)$ zweier Facetten $Q(u)$ und $Q(w)$ von Q auf, wobei hier $w \neq -u$. Mit Hilfe von Satz 3.3 zeigt man leicht, dass gilt

$$Q(u) \cap Q(w) = (Q_1(u) \cap Q_1(w)) + \cdots + (Q_n(u) \cap Q_n(w)).$$

Ist $Q(u) \cap Q(w)$ eine $(n-2)$-dimensionale Seite von Q, also eine Facette von $Q(u)$ in $u^\perp$, dann ist der zugehörige Normalenvektor von $Q(u)$ in $u^\perp$ gegeben durch

$$w' = \frac{w|u^\perp}{\|w|u^\perp\|}$$

und es gilt für $i = 1, \ldots, n-2$,

$$(Q_i(u))(w') = Q_i(u) \cap Q_i(w).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &(n-1)v(Q_1(u), \ldots, Q_{n-1}(u)) \\ &\quad = \sum_{\substack{w \in N(Q_1,\ldots,Q_n), \\ Q(u) \cap Q(w) \neq \emptyset}} h\left(Q_{n-1}(u), \tfrac{w|u^\perp}{\|w|u^\perp\|}\right) V^{(n-2)}(Q_1(u) \cap Q_1(w), \ldots, Q_{n-2}(u) \cap Q_{n-2}(w)), \end{aligned}$$

wobei wir hier über alle $w \in N(Q_1, \dots, Q_n)$ mit $Q(u) \cap Q(w) \neq \emptyset$ summieren können, da für jene w für die $Q(u) \cap Q(w) \neq \emptyset$ keine $(n-2)$-dimensionale Seite von Q ist, das gemischte Volumen $V^{(n-2)}(Q_1(u) \cap Q_1(w), \dots, Q_{n-2}(u) \cap Q_{n-2}(w))$ nach der Induktionsvoraussetzung verschwindet. Im Falle $n = 2$, setzen wir das gemischte Volumen $V^{(n-2)}(Q_1(u) \cap Q_1(w), \dots, Q_{n-2}(u) \cap Q_{n-2}(w)) = 1$.

Bezeichnet $\gamma(u, w)$ den Winkel zwischen u und w, so gilt $\cos \gamma(u, w) = u \cdot w$ und $\|w|u^\perp\| = \sin \gamma(u, w)$ und daher

$$w' = \frac{w|u^\perp}{\|w|u^\perp\|} = \frac{1}{\sin \gamma(u, w)} w - \frac{1}{\tan \gamma(u, w)} u.$$

Für $x \in Q_{n-1}(u) \cap Q_{n-1}(w)$, erhalten wir daher

$$h(Q_{n-1}(u), w') = x \cdot w' = \frac{x \cdot w}{\sin \gamma(u, w)} - \frac{x \cdot u}{\tan \gamma(u, w)} = \frac{h(Q_{n-1}, w)}{\sin \gamma(u, w)} - \frac{h(Q_{n-1}, u)}{\tan \gamma(u, w)}.$$

Schreiben wir noch $N(Q)$ für die Menge $N(Q_1, \dots, Q_n)$, so ergibt sich also insgesamt

$$n(n-1)V(Q_1, \dots, Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n) = (n-1) \sum_{u \in N(Q)} h(Q_n, u) v(Q_1(u), \dots, Q_{n-1}(u))$$

$$= \sum_{\substack{u,w \in N(Q), \\ Q(u) \cap Q(w) \neq \emptyset}} h(Q_n, u) \left(\tfrac{h(Q_{n-1}, w)}{\sin \gamma(u,w)} - \tfrac{h(Q_{n-1}, u)}{\tan \gamma(u,w)} \right) V^{(n-2)}(Q_1(u) \cap Q_1(w), \dots, Q_{n-2}(u) \cap Q_{n-2}(w))$$

$$= n(n-1)V(Q_1, \dots, Q_{n-2}, Q_n, Q_{n-1}).$$

Die Invarianz gemischter Volumina gegenüber individuellen Translationen in den Argumenten folgt nun schließlich aus (3.6) mit $m = n$ und dem Umstand, dass die Koeffizienten eines Polynoms in mehreren Variablen dieses eindeutig bestimmen, wenn die Koeffizienten symmetrisch sind. ■

Korollar 3.8 *Für $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}^n$ gilt*

$$V(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n} \sum_{u \in N(P_1, \dots, P_{n-1})} h(P_n, u) v(F(P_1, u), \dots, F(P_{n-1}, u)).$$

Durch die gemischten Volumina kann das Volumen einer Minkowski Summe von Polytopen ausgedrückt werden. Das folgende Resultat zeigt, dass diese Darstellung umgekehrt werden kann:

Satz 3.9 *Für $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}^n$ gilt*

$$V(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} V(P_{i_1} + \dots + P_{i_m}). \tag{3.7}$$

Beweis: Wir bezeichnen die rechte Seite von (3.7) mit $q(P_1, \dots, P_n)$. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ folgt aus Satz 3.7, dass $q(\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n)$ ein homogenes Polynom vom Grad n in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist. Setzen wir nun $P_1 = \{o\}$, so gilt

$$(-1)^{n+1} n! \, q(\{o\}, P_2, \dots, P_n) = \sum_{2 \leq i \leq n} V(P_i) - \left(\sum_{2 \leq j \leq n} V(\{o\} + P_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq n} V(P_i + P_j) \right)$$

$$+\left(\sum_{2\le j<k\le n} V(\{o\}+P_j+P_k)+\sum_{2\le i<j<k\le n} V(P_i+P_j+P_k)\right)-\ldots=0.$$

Damit ist $q(0P_1, \lambda_2 P_2, \ldots, \lambda_n P_n) \equiv 0$ für alle $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Daraus folgt, dass in dem Polynom $q(\lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_n P_n)$ alle Monome $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}$ mit $1 \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$ mit dem Koeffizienten 0 vorkommen. Da 1 sukzessive durch jede der Zahlen $2, \ldots, n$ ersetzt werden kann, kommt allein $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ mit nicht verschwindendem Koeffizienten vor. Aus (3.6) und (3.7) folgt, dass dieser Koeffizient gerade $V(P_1, \ldots, P_n)$ ist. ■

Satz 3.9 bildet die Grundlage für die Definition gemischter Volumina allgemeiner konvexer Körper.

Definition. Für $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}^n$ ist das *gemischte Volumen* definiert durch

$$V(K_1, \ldots, K_n) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+n} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} V(K_{i_1} + \cdots + K_{i_m}).$$

Da Polytope dicht liegen im Raum der konvexen Körper, erhalten wir aus der Stetigkeit des Volumens auf $\mathcal{K}^n$ das folgende Gegenstück zu Satz 3.1:

Satz 3.10 *Das gemischte Volumen von $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}^n$ ist symmetrisch in seinen Argumenten und invariant unter individuellen Translationen seiner Argumente. Sind $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$, dann gilt*

$$V(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}). \tag{3.8}$$

Beweis: Symmetrie und Invarianz gegenüber Tranlsationen folgen aus der Definition. Formel (3.8) erhält man durch Approximation der K_i, $1 \le i \le m$, mit Polytopen aus den Sätzen 3.7 und 3.9 sowie der Stetigkeit des Volumens auf $\mathcal{K}^n$. ■

Korollar 3.8 und die Definition gemischter Volumina implizieren unmittelbar die folgenden Eigenschaften gemischter Volumina:

Proposition 3.11 *Es seien $K, L, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}^n$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) $V : \mathcal{K}^n \times \cdots \times \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

(b) $V(K_1, \ldots, K_n) \ge 0$.

(c) V *ist multilinear, d.h. für alle* $\alpha, \beta \ge 0$ *gilt*

$$V(\alpha K + \beta L, K_2, \ldots, K_n) = \alpha V(K, K_2, \ldots, K_n) + \beta V(L, K_2, \ldots, K_n).$$

(d) V *ist monoton, d.h. für* $K \subseteq L$ *gilt* $V(K, L_2, \ldots, L_n) \le V(L, L_2, \ldots, L_n)$.

(e) $V(K, \ldots, K) = V(K)$.

(f) Für alle $\phi \in \mathrm{GL}(n)$ *gilt* $V(\phi K_1, \ldots, \phi K_n) = |\det \phi| V(K_1, \ldots, K_n)$.

4 Brunn–Minkowski Ungleichungen

Wir setzen in diesem Abschnitt die Untersuchungen des Verhaltens des Volumens bei der Addition konvexer Körper und Sternkörper fort. Insbesondere beweisen wir die Ungleichung von Brunn–Minkowski, welche das Herzstück der Brunn–Minkowski Theorie konvexer Körper darstellt. Als ein Beispiel der vielen Anwendungen dieser Ungleichung geben wir einen Beweis der Isoperimetrischen Ungleichung, derzufolge Kugeln unter allen konvexen Körpern gegebener Oberfläche größtes Volumen haben.

Zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen *homothetisch*, wenn $A = \lambda B + t$ oder $B = \lambda A + t$ für ein $\lambda \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}^n$ gilt. Insbesondere sind A und B homothetisch, wenn eine der beiden Mengen einpunktig ist.

Die Brunn–Minkowski Ungleichung erlaubt es das Volumen der Minkowski Summe zweier konvexer Körper durch das Volumen der einzelnen Körper abzuschätzen.

Ungleichung von Brunn–Minkowski. *Für konvexe Körper $K, L \in \mathcal{K}^n$ gilt*

$$V(K+L)^{1/n} \geq V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}. \tag{4.1}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn entweder K und L in parallelen Hyperebenen liegen oder homothetisch sind.

Beweis: Liegen K und L in parallelen Hyperebenen, so liegt auch $K + L$ in einer Hyperebene, also gilt $V(K+L) = 0$ und damit Gleichheit in (4.1). Die Homogenität des Volumens impliziert Gleichheit in (4.1) für homothetische Körper.

Zunächst nehmen wir $\dim K < n$ und $\dim L < n$ an. Dann gilt (4.1) trivialerweise, da die rechte Seite verschwindet. Gilt Gleichheit, so ist $V(K + L) = 0$, also liegt $K + L$ in einer Hyperebene. Dann liegen aber K und L in parallelen Hyperebenen. Gilt nun etwa $\dim K < n$ und $\dim L = n$, dann erhalten wir wegen $x + L \subseteq K + L$ für beliebiges $x \in K$,

$$V(K+L) \geq V(x+L) = V(L),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $K = \{x\}$ ist. In diesem Fall sind K und L nach Definition homothetisch.

Von jetzt an können wir $\dim K = \dim L = n$ annehmen. Der Beweis wird nun durch Induktion nach der Dimension geführt. Der Fall $n = 1$ ist dabei trivial. Wir nehmen daher an, dass $n \geq 2$ und die Behauptung in Dimension $n - 1$ schon bewiesen ist. Wir wählen einen Vektor $u \in S^{n-1}$ und setzen für $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = t\}, \qquad H^-(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq t\}.$$

Für $K' \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren, wählen wir $\alpha(K') < \beta(K')$ so, dass $H(\alpha(K'))$ und $H(\beta(K'))$ Stützebenen von K' sind. Für $t \in [\alpha(K'), \beta(K')]$ definieren wir weiters

$$v(K', t) = \mathrm{vol}_{n-1}(K' \cap H(t)) \qquad \text{und} \qquad V(K', t) = \frac{V(K' \cap H^-(t))}{V(K')}.$$

Offenbar ist $V(K',\alpha(K')) = 0$ und $V(K',\beta(K')) = 1$. Nach dem Satz von Fubini gilt für $\xi \in [\alpha(K'),\beta(K')]$,

$$V(K',\xi) = \frac{1}{V(K')}\int_{\alpha(K')}^{\xi} v(K',t)\,dt.$$

Da $K' \cap H(t_n) \to K' \cap H(t)$ für $t_n \to t \in (\alpha(K'),\beta(K'))$, ist die Funktion $v(K',\cdot)$ nach Satz 2.13 stetig auf $(\alpha(K'),\beta(K'))$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daher, dass die monoton steigende Funktion $V(K',\cdot)$ stetig differenzierbar ist auf $(\alpha(K'),\beta(K'))$ mit

$$V'(K',t) = \frac{v(K',t)}{V(K')} > 0.$$

Es zei $z(K',\cdot) : [0,1] \to [\alpha(K'),\beta(K')]$ die Umkehrfunktion von $V(K',\cdot)$. Dann gilt $z(K',0) = \alpha(K')$ und $z(K',1) = \beta(K')$. Die Funktion $z(K',\cdot)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar auf $(0,1)$ und es gilt

$$z'(K',s) = \frac{V(K')}{v(K',z(K',s))} > 0. \tag{4.2}$$

Nach Satz 1.15 (b) sind $H(\alpha(K)+\alpha(L))$ und $H(\beta(K)+\beta(L))$ Stützebenen an $K+L$, daher gilt nach dem Satz von Fubini,

$$V(K+L) = \int\limits_{\alpha(K)+\alpha(L)}^{\beta(K)+\beta(L)} v(K+L,t)\,dt.$$

Die Substitution $t = z(K,s) + z(L,s)$ führt dieses Integral über in

$$V(K+L) = \int_0^1 v(K+L, z(K,s)+z(L,s))(z'(K,s)+z'(L,s))\,ds.$$

Da nach Definition $H(a+b) = H(a) + H(b)$, gilt für $s \in [0,1]$,

$$(K+L) \cap H(z(K,s)+z(L,s)) \supseteq K \cap H(z(K,s)) + L \cap H(z(L,s)). \tag{4.3}$$

Die Inklusion (4.3), Formel (4.2) sowie die Induktionsvoraussetzung liefern daher

$$\begin{aligned}
V(K+L) &\geq \int_0^1 \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap H(z(K,s)) + L \cap H(z(L,s))(z'(K,s)+z'(L,s))\,ds \\
&\geq \int_0^1 \left(v(K,z(K,s))^{\frac{1}{n-1}} + v(L,z(L,s))^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\left(\frac{V(K)}{v(K,z(K,s))} + \frac{V(L)}{v(L,z(L,s))}\right) ds \\
&\geq \int_0^1 \left(V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}\right)^n ds = \left(V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}\right)^n.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dabei haben wir im letzen Schritt verwendet, dass für beliebige $v, w, V, W > 0$ gilt

$$\left(v^{\frac{1}{n-1}} + w^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\left(\frac{V}{v} + \frac{W}{w}\right) \geq \left(V^{1/n} + W^{1/n}\right)^n, \tag{4.5}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$\frac{v^n}{V^{n-1}} = \frac{w^n}{W^{n-1}}. \tag{4.6}$$

Um dies zu zeigen, beachte man, dass für festes $V, W > 0$ die Funktion

$$q(v,w) = \left(v^{\frac{1}{n-1}} + w^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \left(\frac{V}{v} + \frac{W}{w}\right)$$

im positiven Quadranten $q(\lambda v, \lambda w) = q(v,w)$ für $\lambda > 0$ erfüllt. Daher kann das Minimum von q auf dem offenen Segment $\{(v, 1-v) : v \in (0,1)\}$ bestimmt werden. So ergibt sich elementar (4.5) inklusive dem Gleichheitsfall.

Es bleibt der Gleichheitsfall von (4.1) für $\dim K = \dim L = n$ zu klären. Wir können dabei annehmen, dass K und L den Schwerpunkt im Ursprung haben. Es sei $u \in S^{n-1}$ beliebig gewählt. Da Gleichheit in (4.1) gilt, muss auch Gleichheit in (4.4) gelten. Aus (4.6) und (4.2) folgt damit für $0 < s < 1$,

$$\frac{z'(K,s)}{V(K)^{1/n}} = \frac{z'(L,s)}{V(L)^{1/n}}$$

und daher, aufgrund der Stetigkeit von $z(K,\cdot)$ und $z(L,\cdot)$ auf $[0,1]$,

$$\frac{z(K,s)}{V(K)^{1/n}} = \frac{z(L,s)}{V(L)^{1/n}} + \text{const.} \tag{4.7}$$

Da der Schwerpunkt von K im Ursprung liegt, erhalten wir

$$0 = \int_K u \cdot x \, dx = \int_{\alpha(K)}^{\beta(K)} t v(K,t) \, dt = V(K) \int_0^1 z(K,s) \, ds.$$

Analoges gilt für L. Die Konstante in (4.7) ist daher Null. Daraus folgt für $u \in S^{n-1}$,

$$h(K,u) = \beta(K) = z(K,1) = \left(\frac{V(K)}{V(L)}\right)^{1/n} z(L,1) = \left(\frac{V(K)}{V(L)}\right)^{1/n} h(L,u).$$

■

Die Brunn–Minkowski Ungleichung wird oft auch in folgender Weise formuliert:

Korollar 4.1 *Für konvexe Körper $K, L \in \mathcal{K}^n$ ist die Funktion*

$$\lambda \mapsto V((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n}, \qquad \lambda \in [0,1],$$

konkav. Sie ist genau dann linear, wenn K und L in parallelen Hyperebenen liegen oder homothetisch sind.

Bemerkung.

(a) Die Brunn–Minkowski Ungleichung kann für konvexe Körper mit nichtleerem Inneren in den folgenden äquivalenten Formulierungen ausgedrückt werden:

(i) Für $K, L \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$V((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \min\{V(K), V(L)\}.$$

(ii) Für $K, L \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$V((1-\lambda)K + \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} V(L)^{\lambda}.$$

(b) Für die Gültigkeit der Brunn–Minkowski Ungleichung spielt die Konvexität der beteiligten Mengen keine Rolle. In der Tat gilt für beschränkte Lebesgue messbare Mengen A, B und $A + B$ die Ungleichung

$$V(A + B)^{1/n} \geq V(A)^{1/n} + V(B)^{1/n}.$$

Diese Ungleichung lässt sich für geeignete Klassen nichtkonvexer Mengen sogar recht einfach beweisen. Eine vollständige Diskussion der Gleichheitsfälle ist hier aber mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden.

(c) Die Brunn–Minkowski Ungleichung für beschränkte messbare Mengen kann noch weiter verallgemeinert werden zu einer analytischen Ungleichung für nichtnegative integrierbare Funktionen:

Prékopa–Leindler Ungleichung. *Es seien $0 < \lambda < 1$ und $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nichtnegative integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, sodass für $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}.$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \right)^{\lambda}.$$

Zu den wichtigsten Anwendungen der Ungleichung von Brunn–Minkowski gehört die folgende Ungleichung von Minkowski für gemischte Volumina:

Ungleichung von Minkowski. *Für konvexe Körper $K, L \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren gilt*

$$V(K, \ldots, K, L)^n \geq V(K)^{n-1} V(L),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K und L homothetisch sind.

Beweis: Nach Korollar 4.1 ist die Funktion

$$f(\lambda) := V((1 - \lambda)K + \lambda L)^{1/n} - (1 - \lambda)V(K)^{1/n} - \lambda V(L)^{1/n}$$

für $0 \leq \lambda \leq 1$ nichtnegativ, konkav und erfüllt $f(0) = f(1) = 0$. Außerdem gilt $f \equiv 0$ genau dann, wenn K und L homothetisch sind. Nach Satz 3.10 ist

$$V((1 - \lambda)K + \lambda L) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1 - \lambda)^{n-i} \lambda^i V(\underbrace{K, \ldots, K}_{n-i}, \underbrace{L, \ldots, L}_{i}).$$

Damit ist die Funktion f differenzierbar und es gilt

$$f'(0) = V(K)^{(1-n)/n} V(K, \ldots, K, L) - V(L)^{1/n}.$$

Da f konkav ist auf $[0, 1]$ gilt $f'(0) \geq 0$ mit $f'(0) = 0$ genau dann, wenn $f \equiv 0$. ■

Ein Spezialfall der Ungleichung von Minkowski ist die klassische Isoperimetrische Ungleichung für konvexe Körper. Bevor wir diese formulieren können, benötigen wir noch einen Oberflächenbegriff.

Die Oberfläche eines Polytops P ist definiert durch

$$S(P) := \sum_{F \in \mathcal{F}_{n-1}(P)} \operatorname{vol}_{n-1}(F).$$

Nach Korollar 3.8 ist damit $S(P) = nV(P, \ldots, P, B^n)$. Dies motiviert die folgende Definition der Oberfläche eines allgemeinen konvexen Körpers:

Definition. Die *Oberfläche* eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ ist definiert durch

$$S(K) := nV(K, \ldots, K, B^n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(K + \varepsilon B^n) - V(K)}{\varepsilon}.$$

Da $S(B^n) = nV(B^n)$, liefert die Ungleichung von Minkowski nun direkt:

Isoperimetrische Ungleichung. *Für konvexe Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren gilt*

$$\left(\frac{S(K)}{S(B^n)}\right)^n \geq \left(\frac{V(K)}{V(B^n)}\right)^{n-1},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K eine Kugel ist.

Wir untersuchen nun noch das Verhalten des Volumens bei der Radial Addition von Sternkörpern. Dazu notieren wir zunächst folgenden Spezialfall der Ungleichung von Hölder:

Satz 4.2 *Es seien $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sind $f, g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ nichtnegative stetige Funktionen, die nicht identisch Null sind, dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} f(u)g(u)\, d\sigma(u) \leq \left(\int_{S^{n-1}} f(u)^p\, d\sigma(u)\right)^{1/p} \left(\int_{S^{n-1}} g(u)^q\, d\sigma(u)\right)^{1/q},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f^p = \lambda g^q$ für eine positive Konstante $\lambda > 0$.

Beweis: Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gilt für $u \in S^{n-1}$,

$$\frac{f(u)}{\left(\int_{S^{n-1}} f^p\, d\sigma\right)^{1/p}} \frac{g(u)}{\left(\int_{S^{n-1}} g^q\, d\sigma\right)^{1/q}} \leq \frac{f(u)^p}{p \int_{S^{n-1}} f^p\, d\sigma} + \frac{g(u)^q}{q \int_{S^{n-1}} g^q\, d\sigma}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$\frac{f(u)^p}{\int_{S^{n-1}} f^p\, d\sigma} = \frac{g(u)^q}{\int_{S^{n-1}} g^q\, d\sigma}.$$

Integration dieser Ungleichung liefert die Behauptung inklusive Gleichheitsfall. ■

Wir bezeichnen im folgenden die einpunktige Menge $\{o\}$ als *trivial*. Die Ungleichung von Hölder liefert sofort eine *duale Minkowski Ungleichung*:

Satz 4.3 *Für nichttriviale Sternkörper $K, L \in \mathcal{S}^n$ gilt*

$$\tilde{V}(K, \ldots, K, L)^n \leq V(K)^{n-1} V(L),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K durch Streckung aus L hervorgeht.

Beweis: Nach Definition ist

$$\tilde{V}(K, \ldots, K, L) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho(K, u)^{n-1} \rho(L, u) \, d\sigma(u).$$

Setzen wir daher $f = \rho(K, \cdot)^{n-1}$, $g = \rho(L, \cdot)$ und $p = \frac{n}{n-1}$, $q = n$ in Satz 4.2, so folgt die Behauptung aus Satz 2.14. ■

Eine *duale Brunn–Minkowski Ungleichung* erhält man auf einfachem Weg aus der dualen Minkowski Ungleichung:

Satz 4.4 *Für nichttriviale Sternkörper $K, L \in \mathcal{S}^n$ gilt*

$$V(K \tilde{+} L)^{1/n} \leq V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K durch Streckung aus L hervorgeht.

Beweis: Nach Definition gilt für $M \in \mathcal{S}^n$,

$$\tilde{V}(M, \ldots, M, K \tilde{+} L) = \tilde{V}(M, \ldots, M, K) + \tilde{V}(M, \ldots, M, L).$$

Nach Satz 4.3 erhalten wir daher

$$\tilde{V}(M, \ldots, M, K \tilde{+} L) \leq V(M)^{(n-1)/n} (V(K)^{1/n} + V(L)^{1/n}),$$

mit Gleichheit für nichttriviales M genau dann, wenn K und L durch Streckung aus M hervorgehen. Setzen wir nun $M = K \tilde{+} L$ so folgt die Behauptung. ■

Bemerkung.

(a) Die Ungleichung von Brunn–Minkowski für konvexe Körper mit nichtleerem Inneren erhält man ebenfalls, analog zum Beweis von Satz 4.4, auf einfache Weise aus der Ungleichung von Minkowski für gemischte Volumina.

5 Oberflächenmaße und das Minkowski Problem

In Abschnitt 3 haben wir für das duale gemischte Volumen von $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{S}^n$ die folgende Integraldarstellung erhalten:

$$\tilde{V}(L_1, \dots, L_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho(L_1, u) \cdots \rho(L_n, u) \, d\sigma(u). \tag{5.1}$$

In diesem Kapitel beweisen wir eine analoge Darstellung für gemischte Volumina konvexer Körper, die Korollar 3.8 verallgemeinert.

Definition. Für $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ist die homogene Fortsetzung $\check{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\check{f}(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wir sagen f ist *k-mal (stetig) differenzierbar*, wenn $\check{f}$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ k-mal (stetig) differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit $\mathbf{C}^k(S^{n-1})$ den Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf S^{n-1}.

Das folgende Resultat zeigt, dass jede zweimal stetig differenzierbare Funktion auf S^{n-1} durch Addition einer geeigneten Konstante zu einer Stützfunktion wird.

Satz 5.1 *Ist $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gibt es einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ und ein $s > 0$, sodass*

$$f = h(K, \cdot) - h(sB^n, \cdot).$$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $s > 0$ setzen wir $h(x) = \check{f}(x) + s\|x\|$. Dann ist h positiv homogen vom Grad 1 und zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Wir wollen zeigen, dass h für hinreichend großes s konvex und damit die Stützfunktion eines konvexen Körpers ist. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$g(\eta) := h(x + \eta(y - x)), \qquad \eta \in [0, 1]. \tag{5.2}$$

Offenbar ist die Funktion h genau dann konvex, wenn alle so definierten Funktionen g auf $[0, 1]$ konvex sind. Wir zeigen nun, dass g konvex ist, wenn g' monoton steigend bzw. äquivalent dazu $g'' \geq 0$ ist. Dazu seien $0 < \eta < \zeta < 1$ und $\lambda \in (0, 1)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es Zahlen $\theta_1 \in [\eta, (1 - \lambda)\eta + \lambda\zeta]$ und $\theta_2 \in [(1 - \lambda)\eta + \lambda\zeta, \zeta]$ mit

$$g'(\theta_1) = \frac{g((1 - \lambda)\eta + \lambda\zeta) - g(\eta)}{\lambda(\zeta - \eta)} \qquad \text{und} \qquad g'(\theta_2) = \frac{g(\zeta) - g((1 - \lambda)\eta + \lambda\zeta)}{(1 - \lambda)(\zeta - \eta)}.$$

Ist nun g' monoton steigend, so gilt $g'(\theta_1) \leq g'(\theta_2)$ und damit

$$g((1 - \lambda)\eta + \lambda\zeta) \leq (1 - \lambda)g(\eta) + \lambda g(\zeta).$$

Als nächstes zeigen wir, dass $g'' \geq 0$ für alle Funktionen der Form (5.2) genau dann gilt, wenn die Hessische Matrix von h

$$\operatorname{Hess} h(x) = (\partial_i \partial_j h(x))_{i,j=1}^n$$

positiv semidefinit ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass es genügt zu überprüfen, ob $g''(0) \geq 0$ erfüllt ist für alle Funktionen der Form (5.2), denn für $\eta_1 \in (0,1)$ gilt mit $x_1 := x + \eta_1(y - x)$,

$$g(\eta_1 + \eta) = h\left(x_1 + \tfrac{\eta}{1-\eta_1}(y - x_1)\right) = \bar{g}\left(\tfrac{\eta}{1-\eta_1}\right)$$

also $g''(\eta_1) \geq 0$ genau dann, wenn $\bar{g}''(0) \geq 0$. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} g''(0) &= \lim_{\eta \to 0} \frac{g'(\eta) - g'(0)}{\eta} = \lim_{\eta \to 0} \frac{(\nabla h(x + \eta(y - x)) - \nabla h(x)) \cdot (y - x)}{\eta} \\ &= (y - x)^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} h(x)\, (y - x). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{Hess} h(x) = \operatorname{Hess}(\check{f} + s\|\cdot\|)(x)$ positiv semidefinit ist für hinreichend großes s. Aus der Homogenität von h folgt für $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} h(x)\, y = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(x \cdot \nabla(\partial_j h)(x)\right) = 0,$$

da $\partial_j h$ homogen vom Grad 0 ist. Andererseits gilt für orthogonale $u, v \in S^{n-1}$,

$$v^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} h(u)\, v = v^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} \check{f}(u)\, v + s.$$

Da $\check{f}$ zweimal stetig differenzierbar ist, nimmt die Funktion $v \mapsto v^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} \check{f}(u)\, v$ ein Minimum auf S^{n-1} an. Wir können daher $s > 0$ so wählen, dass $y^{\mathrm{T}} \operatorname{Hess} h(x)\, y \geq 0$ für $x \in S^{n-1}$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Verwenden wir nun noch, dass $\operatorname{Hess} h$ positiv homogen vom Grad -1 ist, so folgt, dass $\operatorname{Hess} h(x)$ positiv semidefinit ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Wir bezeichnen mit $\mathcal{I}^n$ den Vektorraum der Differenzen von Stützfunktionen:

$$\mathcal{I}^n := \{f \in \mathbf{C}(S^{n-1}) : f = h(K, \cdot) - h(L, \cdot),\ K, L \in \mathcal{K}^n\}.$$

Unter Verwendung einer geeigneten Version des Satzes von Stone–Weierstrass, zeigt man, dass $\mathbf{C}^2(S^{n-1})$ dicht liegt in $\mathbf{C}(S^{n-1})$ mit der Maximumsnorm. (Wir beweisen in Kapitel 7 eine stärkere Aussage.) Aus Satz 5.1 folgt damit unmittelbar:

Korollar 5.2 *Der Vektorraum $\mathcal{I}^n$ liegt dicht in $\mathbf{C}(S^{n-1})$ mit der Maximumsnorm.*

Das nächste Resultat liefert eine zu (5.1) analoge Integraldarstellung für gemischte Volumina.

Satz 5.3 *Für $K_1, \ldots, K_{n-1} \in \mathcal{K}^n$, gibt es ein eindeutig bestimmtes endliches (Borel) Maß $S(K_1, \ldots, K_{n-1}, \cdot)$ auf S^{n-1}, das* gemischte Oberfächenmaß *von $K_1, \ldots, K_{n-1}$, sodass für alle $K \in \mathcal{K}^n$,*

$$V(K_1, \ldots, K_{n-1}, K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h(K, u)\, dS(K_1, \ldots, K_{n-1}, u).$$

Beweis: Es seien $K_1, \ldots, K_{n-1} \in \mathcal{K}^n$ gegeben. Wir definieren $\mathrm{T} : \mathcal{I}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathrm{T}(f) := nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, K) - nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, L),$$

wobei $f = h(K, \cdot) - h(L, \cdot)$. Beachte, dass diese Definition aufgrund der Additivität von Stützfunktionen unabhängig ist von der speziellen Darstellung von f.

Aus der Multilinearität gemischter Volumina folgt, dass T linear ist. Darüber hinaus ist T ein positives Funktional, denn $f = h(K, \cdot) - h(L, \cdot) \geq 0$ impliziert $L \subseteq K$ und damit

$$\mathrm{T}(f) = nV(K_1 \ldots, K_{n-1}, K) - nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, L) \geq 0$$

aufgrund der Monotonie gemischter Volumina.

Korollar 3.8 und die Stetigkeit gemischter Volumina liefern für $f = h(K, \cdot) - h(L, \cdot)$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{T}(f)| &= |nV(K_1 \ldots, K_{n-1}, K) - nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, L)| \\ &\leq nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, B^n) \|h(K, \cdot) - h(L, \cdot)\|_\infty \\ &= nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, B^n) \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Funktional T stetig auf $\mathcal{I}^n$ bezüglich der Maximumsnorm. Nach dem Satz von Hahn–Banach und Korollar 5.2 kann T daher eindeutig zu einem positiven stetigen linearen Funktional auf $\mathbf{C}(S^{n-1})$ fortgesetzt werden. Nach dem Darstellungssatz von Riesz gibt es daher ein eindeutig bestimmtes nichtnegatives endliches Borel Maß $S(K_1, \ldots, K_{n-1}, \cdot)$, sodass für $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$,

$$\mathrm{T}(f) = \int_{S^{n-1}} f(u) \, dS(K_1, \ldots, K_{n-1}, u).$$

Setzen wir nun $f = h(K, \cdot)$, so folgt die Behauptung. ■

Bemerkung.

(a) Für Polytope $P_1, \ldots, P_{n-1} \in \mathcal{P}^n$ ist das gemischte Oberflächenmaß $S(P_1, \ldots, P_{n-1}, \cdot)$ nach Satz 3.7 und Korollar 3.8 gegeben durch

$$S(P_1, \ldots, P_{n-1}, \cdot) = \sum_{u \in S^{n-1}} v(F(P_1, u), \ldots, F(P_{n-1}, u)) \delta_u,$$

wobei δ_u das Dirac Maß konzentriert in $u \in S^{n-1}$ bezeichnet.

Aus den Eigenschaften gemischter Volumina, formuliert in Proposition 3.11, und Satz 5.3 folgen die wesentlichen Eigenschaften gemischter Oberflächenmaße. Zur Formulierung eines Stetigkeitsresultats benötigen wir folgenden Konvergenzbegriff.

Definition. Eine Folge von endlichen Maßen μ_i, $i \in \mathbb{N}$, auf S^{n-1}, heißt *schwach konvergent* gegen das endliche Maß μ auf S^{n-1}, wenn für alle $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$,

$$\lim_{i \to \infty} \int_{S^{n-1}} f(u) \, d\mu_i(u) = \int_{S^{n-1}} f(u) \, d\mu(u).$$

Satz 5.4 *Die Abbildung* $S : (K_1, \dots, K_{n-1}) \mapsto S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot)$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) *S ist symmetrisch in ihren Argumenten und invariant unter individuellen Translationen ihrer Argumente.*

(b) *S ist multilinear, d.h. für alle $\alpha, \beta \geq 0$ und $K, L \in \mathcal{K}^n$ gilt*

$$S(\alpha K + \beta L, K_2, \dots, K_{n-1}, \cdot) = \alpha S(K, K_2, \dots, K_{n-1}, \cdot) + \beta S(L, K_2, \dots, K_{n-1}, \cdot).$$

(c) *$S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot)$ hat den Schwerpunkt im Ursprung, d.h.*

$$\int_{S^{n-1}} u \, dS(K_1, \dots, K_{n-1}, u) = o. \tag{5.3}$$

(d) *S ist stetig, d.h. für Folgen $K_i^{(m)} \in \mathcal{K}^n$, $m \in \mathbb{N}$, mit $K_i^{(m)} \to K_i$ konvergieren die Maße $S(K_1^{(m)}, \dots, K_{n-1}^{(m)}, \cdot)$ schwach gegen $S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot)$.*

Beweis: Die Eigenschaften (a) und (b) sind direkte Folgerungen der entsprechenden Eigenschaften gemischter Volumina.

Aus Korollar 3.8 und der Invarianz gemischter Volumina gegenüber Translationen, folgt für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$,

$$0 = V(K_1, \dots, K_{n-1}, \{x\}) = \int_{S^{n-1}} x \cdot u \, dS(K_1, \dots, K_{n-1}, u)$$

und damit (5.3).

Es bleibt die Stetigkeit von S zu zeigen. Dazu seien $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ gegeben. Wir wählen $K, L \in \mathcal{K}^n$ so, dass

$$\|f - (h(K, \cdot) - h(L, \cdot))\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Weiters sei $m_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $m \geq m_0$ einerseits $K_i^{(m)} \subseteq K_i + B^n$, $1 \leq i \leq n-1$, gilt und andererseits

$$|V(K_1^{(m)}, \dots, K_{n-1}^{(m)}, K) - V(K_1, \dots, K_{n-1}, K)| \leq \varepsilon,$$

$$|V(K_1^{(m)}, \dots, K_{n-1}^{(m)}, L) - V(K_1, \dots, K_{n-1}, L)| \leq \varepsilon.$$

Mit den Abkürzungen $S^{(m)} := S(K_1^{(m)}, \dots, K_{n-1}^{(m)}, \cdot)$, $S := S(K_1, \dots, K_{n-1}, \cdot)$ und $h_K := h(K, \cdot)$, $h_L := h(L, \cdot)$ folgt, wie im Beweis von Satz 5.3, für alle $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S^{n-1}} f \, dS^{(m)} - \int_{S^{n-1}} f \, dS \right| &\leq \left| \int_{S^{n-1}} f - (h_K - h_L) \, dS^{(m)} \right| + \left| \int_{S^{n-1}} f - (h_K - h_L) \, dS \right| \\
&\quad + \left| \int_{S^{n-1}} h_K - h_L \, dS^{(m)} - \int_{S^{n-1}} h_K - h_L \, dS \right| \\
&\leq \|f - (h_K - h_L)\|_\infty n V(K_1 + B^n, \dots, K_{n-1} + B^n, B^n) \\
&\quad + \|f - (h_K - h_L)\|_\infty n V(K_1, \dots, K_{n-1}, B^n) + 2n\varepsilon \\
&\leq c(K_1, \dots, K_{n-1}) \, \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Eine besonders wichtige Rolle spielt die Diagonalform gemischter Oberflächenmaße:

Definition. Das *Oberflächenmaß* $S_{n-1}(K,\cdot)$ eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ ist das Maß auf S^{n-1} definiert durch

$$S_{n-1}(K,\cdot) := S(K,\ldots,K,\cdot).$$

Bemerkung.

(a) Das Oberflächenmaß eines Polytops $P \in \mathcal{P}^n$ lässt sich auf einfache Art beschreiben: Für eine Borel Menge $\omega \subseteq S^{n-1}$, ist $S_{n-1}(P,\omega)$ gerade die Summe der Flächen jener Facetten von P deren äußerer Normalenvektor in ω liegt.

Durch Approximation kann diese Interpretation auf allgemeine konvexe Körper übertragen werden: $S_{n-1}(K,\omega)$ ist die Fläche der Randpunkte von K, deren äußerer Normalvektor in ω liegt. Insbesondere ist $S_{n-1}(K,S^{n-1}) = S(K)$.

(b) Aus Satz 3.7 folgt, dass $S_{n-1}(K,\cdot) = 0$ für $\dim K \leq n-2$. Ist $\dim K = n-1$ und $K \subseteq u^{\perp}$, $u \in S^{n-1}$, dann gilt $S_{n-1}(K,\cdot) = \mathrm{vol}_{n-1}(K)(\delta_u + \delta_{-u})$.

(c) Sind $K_1,\ldots,K_m \in \mathcal{K}^n$ und $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0$, dann gilt

$$S_{n-1}(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m,\cdot) = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}=1}^{m} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_{n-1}} S(K_{i_1},\ldots,K_{i_{n-1}},\cdot).$$

Unser nächstes Resultat gibt Aufschluß darüber inwieweit ein konvexer Körper mit nichtleerem Inneren durch sein Oberflächenmaß bestimmt ist.

Satz 5.5 *Es seien $K, L \in \mathcal{K}^n$ konvexe Körper mit nichtleerem Inneren. Dann gilt*

$$S_{n-1}(K,\cdot) = S_{n-1}(L,\cdot)$$

genau dann, wenn K ein Translat von L ist.

Beweis: Ist K ein Translat von L so gilt $S_{n-1}(K,\cdot) = S_{n-1}(L,\cdot)$ nach Satz 5.4. Es gelte daher nun $S_{n-1}(K,\cdot) = S_{n-1}(L,\cdot)$. Dann folgt

$$V(K,\ldots,K,L) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h(L,u)\,dS_{n-1}(K,u) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h(L,u)\,dS_{n-1}(L,u) = V(L).$$

Analog erhält man $V(L,\ldots,L,K) = V(K)$. Die Ungleichung von Minkowski liefert daher

$$V(L)^n \geq V(K)^{n-1}V(L) \qquad \text{und} \qquad V(K)^n \geq V(L)^{n-1}V(K) \tag{5.4}$$

also $V(K) = V(L)$. Damit gilt aber Gleichheit in (5.4), womit K und L homothetisch sind. Da K und L gleiches Volumen haben, muss K ein Translat von L sein. ■

Definition. Wir nennen eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *zentralsymmetrisch*, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $A - x = -(A - x)$. A heißt *symmetrisch*, wenn $A = -A$. Wir nennen ein Maß μ auf S^{n-1} gerade, wenn $\mu(B) = \mu(-B)$ für jede Borel Menge $B \subseteq S^{n-1}$.

Als Konsequenz von Satz 5.5 notieren wir:

Korollar 5.6 *Ein konvexer Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren ist genau dann zentralsymmetrisch, wenn $S_{n-1}(K,\cdot)$ gerade ist.*

Wir untersuchen nun die Frage, die als das *Minkowski Problem* bekannt ist, welche Maße auf S^{n-1} als Oberflächenmaße konvexer Körper mit nichtleerem Inneren auftreten. Notwendige Bedingung für ein solches Maß ist, dass es den Schwerpunkt im Ursprung hat. Wie der folgende *Existenzsatz von Minkowski* zeigt, ist diese triviale notwendige Bedingung zusammen mit einer einfachen Dimensionsanforderung an ein vorgelegtes Maß bereits auch hinreichend, um ein Oberflächenmaß zu sein.

Bevor wir den Existenzsatz von Minkowski formulieren, erklären wir kurz die Idee des Beweises: Gibt es zu einem Borel Maß μ auf S^{n-1} einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren und $S_{n-1}(K, \cdot) = \mu$, so gilt für alle $L \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren nach der Ungleichung von Minkowski

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h(L, u)\, d\mu(u) = V(K, \dots, K, L) \geq V(L)^{1/n} V(K)^{(n-1)/n},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K und L homothetisch sind. Damit ist K bis auf eine Homothetie dadurch charakterisiert, dass K das Funktional

$$L \mapsto \int_{S^{n-1}} h(L, u)\, d\mu(u)$$

unter der Nebenbedingung $V(L) = 1$ minimiert.

Satz 5.7 *Es sei μ ein Borel Maß auf S^{n-1}. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\mu(S^{n-1} \backslash v^\perp) > 0$ *für alle* $v \in S^{n-1}$ *und*

$$\int_{S^{n-1}} u\, d\mu(u) = o. \tag{5.5}$$

(b) Es gibt einen bis auf Translationen eindeutig bestimmten konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren, sodass $S_{n-1}(K, \cdot) = \mu$.

Beweis: Es sei zunächst $\mu = S_{n-1}(K, \cdot)$ für ein $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren. Nach Satz 5.5 ist K bis auf Translation eindeutig bestimmt und es gilt (5.5) nach Satz 5.4. Ist $P^{(i)} \in \mathcal{P}^n$, $i \in \mathbb{N}$, eine Folge von Polytopen mit nichtleerem Inneren, die gegen K konvergiert, so erhalten wir, wie im Beweis von Satz 3.6, für $v \in S^{n-1}$,

$$2\mathrm{vol}_{n-1}(P^{(i)}|v^\perp) = \sum_{F_j^{(i)} \in \mathcal{F}(P^{(i)})} |u_j^{(i)} \cdot v| \mathrm{vol}_{n-1}(F_j^{(i)}) = nV(P^{(i)}, \dots, P^{(i)}, [-v, v]),$$

wobei $u_j^{(i)}$ den äußeren Normalenvektor der Facette $F_j^{(i)}$ bezeichnet und wir $h([-v, v], u) = |u \cdot v|$ verwendet haben. Da beide Seiten dieser Gleichung stetig sind, erhalten wir für alle $v \in S^{n-1}$,

$$0 < \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|\, dS_{n-1}(K, u)$$

und damit $S_{n-1}(K, S^{n-1} \backslash v^\perp) > 0$ für alle $v \in S^{n-1}$.

Es sei nun μ ein Borel Maß auf S^{n-1} mit den Eigenschaften aus (a). Wir wollen zeigen, dass es ein $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren und $S_{n-1}(K,\cdot) = \mu$ gibt. Die Eindeutigkeit folgt dann aus Satz 5.5. Dazu nehmen wir zunächst an, das Maß μ ist diskret. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ und $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$, sodass

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \delta_{u_i}.$$

Wir müssen zeigen, dass es ein Polytop P gibt mit Normalenvektoren $u_1, \dots, u_m$ und Facettenflächen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Dazu setzen wir für positive Zahlen $s_1, \dots, s_m > 0$,

$$P[s] = \{x \in \mathbb{R}^n : u_i \cdot x \leq s_i, i = 1, \dots, m\} = \bigcap_{i=1}^{m} H^-_{u_i,s_i}.$$

Die Menge $P[s]$ enthält den Ursprung und ist ein Durchschnitt abgeschlossener Halbräume. Angenommen $P[s]$ wäre nicht beschränkt, dann gibt es einen Vektor $v \in S^{n-1}$ mit $\{\lambda v : \lambda \geq 0\} \subseteq P[s]$. Daraus folgt aber für alle $\lambda > 0$ und $1 \leq i \leq m$, $u_i \cdot v \leq \frac{s_i}{\lambda}$, also $u_i \cdot v \leq 0$ im Widerspruch zu (a). Daher ist $P[s]$ beschränkt und damit nach Satz 3.5 ein Polytop.

Da die Normalenvektoren der Halbräume $H^-_{u_i,s_i}$ fest sind und nur deren Abstand vom Ursprung s_i variiert, hängt $V(P[s])$ stetig von $s := (s_1, \dots, s_m)$ ab. Damit ist die Menge

$$\mathcal{M} := \{s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m_+ : V(P[s]) = 1\}$$

nichtleer und abgeschlossen. Das lineare Funktional definiert durch

$$\Phi(s) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} s_i \alpha_i, \qquad s = (s_1, \dots, s_m),$$

ist stetig auf $\mathcal{M}$ und, wegen $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, nichtnegativ. Daher gibt es einen Vektor $s^* = (s_1^*, \dots, s_m^*) \in \mathcal{M}$, sodass $\Phi(s^*) = \eta^{n-1} \geq 0$ das Minimum von Φ auf $\mathcal{M}$ ist. Wir behaupten, dass das Polytop $Q = \eta P[s^*]$ das gesuchte Polytop mit äußeren Normalenvektoren $u_1, \dots, u_m$ und Facettenflächen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ist.

Da $V(P[s^*]) = 1$, besitzt $P[s^*]$ innere Punkte. Weiters folgt aus (5.5) für $t \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{s}_i^* = s_i^* + t \cdot u_i$,

$$\Phi(\bar{s}^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} s_i^* \alpha_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, u_i \cdot t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} s_i^* \alpha_i = \Phi(s^*) = \eta^{n-1}.$$

Nun ist aber $P[\bar{s}^*] = P[s^*] + t$. Wir können also annehmen, dass $o \in \operatorname{int} P[s^*]$ und damit $s_1^*, \dots, s_m^*, \eta > 0$, womit auch $o \in \operatorname{int} Q$. Wir definieren $\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^* \geq 0$ durch

$$\alpha_i^* := \operatorname{vol}_{n-1}(F(P[s^*], u_i)).$$

Dann gilt $h(P[s^*], u_i) = s_i^*$, wenn $\alpha_i^* \neq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $\eta^{n-1} \alpha_i^* = \alpha_i$. Nach Satz 3.5 gilt

$$1 = V(P[s^*]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} s_i^* \alpha_i^* = \frac{\Phi(s^*)}{\eta^{n-1}} = \frac{1}{n\eta^{n-1}} \sum_{i=1}^{m} s_i^* \alpha_i. \tag{5.6}$$

Wir betrachten die beiden Hyperebenen

$$H_1 := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = n\eta^{n-1}\},$$
$$H_2 := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1\alpha_1^* + \cdots + x_m\alpha_m^* = n\}.$$

Aus (5.6) folgt, dass $s^* \in H_1 \cap H_2$. Da s^* positive Komponenten besitzt, gibt es eine Umgebung U von s^*, sodass die Komponenten von s positiv sind für alle $s \in U$ und jeder Normalvektor von $P[s^*]$ auch ein Normalvektor von $P[s]$ ist. Es sei nun $s \in H_1 \cap U$. Angenommen $V(P[s]) > 1$, dann gibt es ein positives $\beta < 1$ mit $V(P[\beta s]) = 1$. Da $s \in H_1$, gilt dann $\Phi(\beta s) = \beta\Phi(s) = \beta\eta^{n-1} < \eta^{n-1}$, ein Widerspruch. Daher ist $V(P[s]) \leq 1$. Für jedes $\lambda \in [0, 1]$ ist $(1-\lambda)s^* + \lambda s \in H_1 \cap U$ und es gilt

$$(1-\lambda)P[s^*] + \lambda P[s] \subseteq P[(1-\lambda)s^* + \lambda s].$$

Wir erhalten also für alle $\lambda \in [0, 1]$,

$$V((1-\lambda)P[s^*] + \lambda P[s]) \leq V(P[(1-\lambda)s^* + \lambda s]) \leq 1$$

und damit wegen $V(P[s^*]) = 1$,

$$V(P[s^*], \dots, P[s^*], P[s]) = \frac{1}{n} \lim_{\lambda \to 0} \frac{V((1-\lambda)P[s^*] + \lambda P[s]) - (1-\lambda)^n}{\lambda} \leq 1.$$

Da jeder Normalvektor von $P[s^*]$ ein Normalvektor von $P[s]$ für $s \in U$ ist, gilt $h(P[s], u_i) = s_i$, wenn $\alpha_i^* > 0$. Daraus folgt für alle $s \in H_1 \cap U$,

$$1 \geq V(P[s^*], \dots, P[s^*], P[s]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} s_i \alpha_i^*,$$

womit $H_1 \cap U \subseteq H_2^-$ und damit $H_1 = H_2$, da $s^* \in H_1 \cap H_2$. Dies liefert wiederum $\alpha_i = \eta^{n-1}\alpha_i^* = \mathrm{vol}_{n-1}(F(\eta P[s^*], u_i))$, womit $Q = \eta P[s^*]$ das gesuchte Polytop ist.

Es sei nun μ ein allgemeines Borel Maß auf S^{n-1} mit den Eigenschaften aus (a). Zum Beweis der Existenz eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ mit $S_{n-1}(K, \cdot) = \mu$ approximieren wir μ zunächst durch diskrete Maße. Wir nennen eine Teilmenge von S^{n-1} sphärisch konvex, wenn sie der Schnitt von S^{n-1} mit einem konvexen Kegel ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$, zerlegen wir S^{n-1} in endlich viele paarweise disjunkte Borel Mengen mit Durchmesser höchstens $\frac{1}{k}$, deren Abschluss sphärisch konvex ist. Für festes k seien $S_1, \dots, S_m$ jene Teilmengen der Zerlegung mit $\mu(S_i) > 0$, $1 \leq i \leq m$. Es sei

$$c(S_i) := \frac{1}{\mu(S_i)} \int_{S_i} u \, d\mu(u),$$

der Schwerpunkt von S_i bezüglich μ. Da der Durchmesser von S_i höchstens $\frac{1}{k}$ ist, gilt $c(S_i) \neq o$. Daher gibt es einen Vektor $u_i \in S^{n-1}$ mit $c(S_i) = \eta_i u_i$, wobei $\eta_i := \|c(S_i)\|$. Da $c(S_i) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\, S_i$ und der Durchmesser von S_i durch $\frac{1}{k}$ beschränkt ist, zeigt man leicht, dass

$$1 - \frac{1}{2k^2} \leq \eta_i \leq 1. \tag{5.7}$$

Wir definieren nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein diskretes Borel Maß μ_k durch

$$\mu_k := \sum_{i(k)} \mu(S_i)\eta_i\delta_{u_i}.$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{S^{n-1}} u \, d\mu_k(u) = \sum_{i(k)} \mu(S_i)\eta_i u_i = \int_{S^{n-1}} u \, d\mu(u) = o.$$

Weiters gilt für $g \in \mathbf{C}(S^{n-1})$,

$$\int_{S^{n-1}} g(u) \, d\mu_k(u) - \int_{S^{n-1}} g(u) \, d\mu(u) = \sum_{i(k)} \int_{S_i} \eta_i g(u_i) - g(u) \, d\mu(u).$$

Die Abschätzung (5.7) liefert

$$|\eta_i g(u_i) - g(u)| \leq |g(u_i) - g(u)| + \frac{\|g\|_\infty}{2k^2}.$$

Ist $u \in S_i$, so gilt $\|u_i - u\| \leq \frac{1}{k}$. Daher folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von g die schwache Konvergenz von μ_k gegen μ:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{S^{n-1}} g(u) \, d\mu_k(u) = \int_{S^{n-1}} g(u) \, d\mu(u).$$

Da $\mu(S^{n-1} \backslash v^\perp) > 0$ für alle $v \in S^{n-1}$, gibt es ein $a > 0$, sodass für alle $v \in S^{n-1}$,

$$h(v) := \int_{S^{n-1}} (u \cdot v)_+ \, d\mu(u) \geq a,$$

wobei $(u \cdot v)_+ = \max\{u \cdot v, 0\} = h([o,v],u)$. Offenbar ist die homogene Fortsetzung $\check{h}$ von h eine sublineare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und damit h Stützfunktion eines konvexen Körpers. Analog definiert

$$h_k(v) := \int_{S^{n-1}} (u \cdot v)_+ \, d\mu_k(u)$$

eine Stützfunktion für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da μ_k schwach gegen μ konvergiert, sind die Stützfunktionen h_k punktweise und damit nach Satz 2.9 gleichmässig konvergent gegen h. Es gibt also ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$,

$$\int_{S^{n-1}} (u \cdot v)_+ \, d\mu_k(u) \geq \frac{a}{2},$$

womit $\mu_k(S^{n-1} \backslash v^\perp) > 0$ für alle $k \geq k_0$. Nach dem ersten Teil des Beweises, gibt es zu jedem $k \geq k_0$ ein Polytop $P_k \in \mathcal{P}^n$ mit nichtleerem Inneren und $o \in P_k$, sodass $S_{n-1}(P_k, \cdot) = \mu_k$. Da $S(P_k) = \mu_k(S^{n-1}) \leq \mu(S^{n-1})$, folgt auch $V(P_k) \leq b$ für ein $b > 0$ aus der Isoperimetrischen Ungleichung. Ist nun $x \in P_k$, dann gilt für $u \in S^{n-1}$,

$$h(P_k, u) \geq h([o,x],u) = \|x\|(u \cdot v)_+,$$

wobei $x = \|x\| v$ mit $v \in S^{n-1}$. Daraus folgt nach Satz 3.5

$$b \geq V(P_k) = \frac{1}{n} \sum_{i(k)} h(P_k, u_i) \mathrm{vol}_{n-1}(F(P_k, u_i)) \geq \frac{\|x\|}{n} \int_{S^{n-1}} (u \cdot v)_+ \, d\mu_k(u) \geq \frac{\|x\| a}{2n},$$

womit $P_k \subseteq \frac{2nb}{a} B^n$. Nach dem Auswahlsatz von Blaschke besitzt P_k, $k \geq k_0$, eine Teilfolge P_{k_j}, die gegen einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ konvergiert. Nach Satz 5.4 konvergiert dann $S_{n-1}(P_{k_j}, \cdot) = \mu_{k_j}$ schwach gegen $S_{n-1}(K, \cdot)$. Da μ_k aber auch schwach gegen μ konvergiert, muss $\mu = S_{n-1}(K, \cdot)$ gelten. ∎

6 Projektionen- und Schnittkörper

In diesem Abschnitt untersuchen wir Projektions- und Schnittfunktionen konvexer Körper bzw. Sternkörper. Von besonderem Interesse ist dabei die Frage, welche Informationen über den Körper aus seiner Projektions- bzw. Schnittfunktion wiedergewonnen werden können. Dieses Kapitel leitet den Übergang zur harmonischen Analysis ein, deren Methoden unentbehrlich bei diesen Untersuchungen sind.

Definition. Für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^n$ heißt die Abbildung

$$u \mapsto \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^{\perp}), \qquad u \in S^{n-1},$$

die *Projektionsfunktion* von K.

Die folgende Integraldarstellung der Projektionsfunktion eines konvexen Körpers bildet die Grundlage für weiterführende Untersuchungen:

Satz 6.1 *Für $K \in \mathcal{K}^n$ und $u \in S^{n-1}$ gilt*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^{\perp}) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, dS_{n-1}(K, v).$$

Beweis: Nach dem Satz von Fubini gilt für jedes $\lambda > 0$ einerseits,

$$V(K + \lambda[-u, u]) = V(K) + 2\lambda \, \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^{\perp}).$$

Andererseits ist für jedes $\lambda > 0$ nach Satz 3.10

$$V(K + \lambda[-u, u]) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^i V(\underbrace{K, \dots, K}_{n-i}, \underbrace{[-u, u], \dots, [-u, u]}_{i}).$$

Koeffizientenvergleich und Satz 5.3 liefern daher

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^{\perp}) = \frac{n}{2} V(K, \dots, K, [-u, u]) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, dS_{n-1}(K, v).$$

■

Nach Satz 6.1 ist die homogene Fortsetzung der Projektionsfunktion eines konvexen Körpers sublinear und damit wieder die Stützfunktion eines konvexen Körpers.

Definition. Für $K \in \mathcal{K}^n$ ist der *Projektionenkörper* ΠK von K der konvexe Körper definiert durch

$$h(\Pi K, u) = \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^{\perp}), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Aus den Eigenschaften von Oberflächenmaßen erhalten wir unmittelbar:

Proposition 6.2 *Die Abbildung $\Pi : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) Π *ist stetig und invariant unter Translationen.*

(b) Für jedes $K \in \mathcal{K}^n$ ist ΠK symmetrisch.

(c) Es gilt $\Pi K = o$ genau dann, wenn $\dim K \leq n - 2$. Ist $\dim K = n - 1$ und $K \subseteq u^{\perp}$ für $u \in S^{n-1}$, dann gilt $\Pi K = \mathrm{vol}_{n-1}(K)[-u, u]$.

Bemerkung.

(a) Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ ein konvexer Körper mit nichtleerem Inneren. Ist K nicht zentralsymmetrisch, so definiert nach Satz 5.7

$$S_{n-1}(K_\lambda, \cdot) = (1-\lambda)S_{n-1}(K, \cdot) + \lambda S_{n-1}(-K, \cdot), \qquad \lambda \in [0,1],$$

eine Familie konvexer Körper mit nichleerem Inneren, für die nach Satz 6.1

$$\Pi(K_\lambda) = (1-\lambda)\Pi K + \lambda \Pi(-K) = \Pi K.$$

Der Projektionenkörper bzw. die Projektionsfunktion eines konvexen Körpers bestimmt diesen also nicht notwendig eindeutig (bis auf Translationen). Wir werden in Abschnitt 7 zeigen, dass symmetrische konvexe Körper jedoch durch ihren Projektionenkörper eindeutig bestimmt sind.

Wir wollen nun eine geometrische Beschreibung der Klasse von Projektionenkörpern konvexer Körper geben.

Definition. Ein Polytop $Z \in \mathcal{P}^n$ heißt *Zonotop*, wenn Z eine endliche Summe von Strecken ist. Ein konvexer Körper heißt *Zonoid*, wenn er Grenzwert einer Folge von Zonotopen ist.

Wie das folgende Resultat zeigt besteht eine enge Verbindung zwischen Zonoiden und Projektionenkörpern konvexer Körper.

Satz 6.3 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Der Projektionenkörper ΠK eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ ist ein Zonoid.

(b) Ist Z ein symmetrisches Zonoid mit nichtleerem Inneren, dann gibt es ein symmetrisches $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren, sodass $\Pi K = Z$.

Beweis: Es genügt nach Satz 5.7 und Satz 6.1 zu zeigen, dass $Z \in \mathcal{K}^n$ genau dann ein symmetrisches Zonoid ist, wenn es ein gerades Maß μ auf S^{n-1} gibt mit

$$h(Z,u) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, d\mu(v), \qquad u \in S^{n-1}. \tag{6.1}$$

Angenommen es gilt (6.1). Wie im Beweis von Satz 5.7 konstruieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ diskrete gerade Maße

$$\mu_k := \frac{1}{2} \sum_{i(k)} \eta_i (\delta_{u_i} + \delta_{-u_i}),$$

sodass die Folge μ_k, $k \in \mathbb{N}$, schwach gegen μ konvergiert. Dann konvergiert die Folge von Zonotopen, definiert durch

$$Z_k := \sum_{i(k)} [-\eta_i u_i, \eta_i u_i],$$

wegen

$$h(Z_k, u) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, d\mu_k(v) \to \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, d\mu(v) = h(Z,u), \quad u \in S^{n-1},$$

und Satz 2.9 gegen Z, d.h. Z ist ein Zonoid.

Es sei nun umgekehrt $Z \in \mathcal{K}^n$ ein symmetrisches Zonoid und

$$Z_k := \sum_{i(k)} [-\alpha_i u_i, \alpha_i u_i],$$

mit $u_i \in S^{n-1}$, eine Folge von Zonotopen die gegen Z konvergiert. Dann gilt für $u \in S^{n-1}$,

$$h(Z_k, u) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, d\mu_k(v), \tag{6.2}$$

wobei

$$\mu_k := \frac{1}{2} \sum_{i(k)} \alpha_i (\delta_{u_i} + \delta_{-u_i}).$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge μ_k, $k \in \mathbb{N}$, schwach konvergiert. Aus (6.2) und dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{S^{n-1}} h(Z_k, u) \, d\sigma(u) = 2\kappa_{n-1} \mu_k(S^{n-1}). \tag{6.3}$$

Da die Stützfunktionen $h(Z_k, \cdot)$ gleichmäßig gegen $h(Z, \cdot)$ konvergieren, konvergiert auch die linke Seite von (6.3), daher ist die Folge $\mu_k(S^{n-1})$ beschränkt. Nun sind im Raum der signierten Maße auf S^{n-1} versehen mit der Totalvariation beschränkte Mengen relativ schwach kompakt. Die Folge gerader Maße $\mu_k, k \in \mathbb{N}$, besitzt daher eine Teilfolge μ_{k_j} die schwach gegen ein gerades Maß μ auf S^{n-1} konvergiert. Es folgt für $u \in S^{n-1}$,

$$h(Z, u) = \lim_{j \to \infty} h(Z_{k_j}, u) = \lim_{j \to \infty} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, d\mu_{k_j}(v) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, d\mu(v).$$

■

Sind $K, L \in \mathcal{K}^n$ konvexe Körper mit nichleerem Inneren, so gilt offenbar

$$K \subseteq L \qquad \Longrightarrow \qquad \Pi K \subseteq \Pi L.$$

Es stellt sich die Frage, welche Informationen über die Körper K und L aus der umgekehrten Inklusion $\Pi K \subseteq \Pi L$ wiedergewonnen werden können.

Satz 6.4 *Es seien $K, L \in \mathcal{K}^n$ konvexe Körper mit nichtleerem Inneren. Ist L ein Zonoid, dann gilt*

$$\Pi K \subseteq \Pi L \qquad \Longrightarrow \qquad V(K) \leq V(L),$$

und $V(K) = V(L)$ genau dann, wenn K ein Translat von L ist.

Beweis: Wir können o.B.d.A. annehmen, dass L symmetrisch ist. Dann gibt es nach Satz 6.3 einen symmetrischen konvexen Körper $M \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren, sodass $L = \Pi M$. Damit gilt nach Satz 5.3, Satz 6.1 und dem Satz von Fubini

$$V(K, \ldots, K, L) = \frac{1}{2n} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, dS_{n-1}(K, u) dS_{n-1}(M, v) = V(M, \ldots, M, \Pi K).$$

Die Monotonie gemischter Volumina liefert daher

$$V(K, \ldots, K, L) \leq V(M, \ldots, M, \Pi L) = V(L).$$

Eine Anwendung der Minkowski Ungleichung zeigt nun

$$V(K) \leq V(L),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K ein Translat von L ist. ■

Die Definition des Projektionenkörpers eines konvexen Körpers zeigt, dass Satz 6.4 äquivalent ist zu

Korollar 6.5 *Es seien $K, L \in \mathcal{K}^n$ konvexe Körper mit nichtleerem Inneren. Ist L ein Zonoid, dann gilt*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^\perp) \quad \forall\, u \in S^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad V(K) \leq V(L), \tag{6.4}$$

und $V(K) = V(L)$ genau dann, wenn K ein Translat von L ist.

Wir werden in Abschnitt 8 sehen, dass für die Gültigkeit von (6.4) im Allgemeinen auf die Voraussetzung, dass L ein Zonoid ist, nicht verzichtet werden kann.

Definition. Für einen Sternkörper $L \in \mathcal{S}^n$ heißt die Abbildung

$$u \mapsto \mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp), \qquad u \in S^{n-1},$$

die *Schnittfunktion* von L.

Die folgende Integraldarstellung bildet die Grundlage für Untersuchungen der Schnittfunktion eines Sternkörpers. Wir bezeichnen dabei mit σ_{n-2} das sphärische Lebesgue Maß auf $S^{n-2}(u) := S^{n-1} \cap u^\perp$, $u \in S^{n-1}$.

Satz 6.6 *Für $L \in \mathcal{S}^n$ und $u \in S^{n-1}$ gilt*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp) = \frac{1}{n-1} \int_{S^{n-1} \cap u^\perp} \rho(L, v)^{n-1} \, d\sigma_{n-2}(v). \tag{6.5}$$

Beweis: Für $u \in S^{n-1}$ ist $L \cap u^\perp$ offenbar ein Sternkörper in $u^\perp$. Nach Satz 2.14 ist sein $n-1$-dimensionales Volumen gegeben durch (6.5). ■

Das zu Projektionenkörpern duale Konzept sind Schnittkörper:

Definition. Für $L \in \mathcal{S}^n$ ist der *Schnittkörper* $\mathrm{I}L$ von L der Sternkörper definiert durch

$$\rho(\mathrm{I}L, u) = \mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Die gleichmäßige Stetigkeit von Radialfunktionen auf S^{n-1} zeigt, dass $\mathrm{I} : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ wohldefiniert ist. Die folgenden Eigenschaften von I erhalten wir unmittelbar aus der Definition:

Proposition 6.7 *Die Abbildung $\mathrm{I} : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) I *ist stetig.*

(b) Für jedes $L \in \mathcal{S}^n$ ist $\mathrm{I}L$ symmetrisch.

(c) Es gilt $\mathrm{I}L = o$ genau dann, wenn L trivial ist.

Bemerkung.

(a) Es sei $L \in \mathcal{S}^n$ ein nichttrivialer Sternkörper. Ist L nicht symmetrisch, so definiert

$$\rho(L_\lambda, \cdot)^{n-1} = (1-\lambda)\rho(L, \cdot)^{n-1} + \lambda\rho(-L, \cdot)^{n-1}, \qquad \lambda \in [0,1],$$

eine Familie von nichttrivialen Sternkörpern, für die nach Satz 6.6

$$\mathrm{I}(L_\lambda) = (1-\lambda)\mathrm{I}L \,\tilde{+}\, \lambda\mathrm{I}(-L) = \mathrm{I}L.$$

Der Schnittkörper bzw. die Schnittfunktion eines Sternkörpers bestimmt diesen also nicht notwendig eindeutig. Wir werden in Abschnitt 7 zeigen, dass für symmetrische Sternkörper dies jedoch sehr wohl der Fall ist.

Eine einfache geometrische Beschreibung von Schnittkörpern analog zu Satz 6.3 ist leider nicht möglich. Wir werden jedoch in Abschitt 10 eine fourieranalytische Charakterisierung der Klasse von Schnittkörpern erhalten.

Sind $K, L \in \mathcal{S}^n$ nichttrivial, so gilt offenbar

$$K \subseteq L \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{I}K \subseteq \mathrm{I}L.$$

Das duale Gegenstück zu Satz 6.4 ist unser nächstes Resultat.

Satz 6.8 *Es seien $K, L \in \mathcal{S}^n$ nichttrivial. Ist K ein Schnittkörper, dann gilt*

$$\mathrm{I}K \subseteq \mathrm{I}L \qquad \Longrightarrow \qquad V(K) \le V(L),$$

und $V(K) = V(L)$ genau dann, wenn $K = L$.

Beweis: Da K ein nichtrivialer Schnittkörper ist, gibt es einen nichttrivialen Sternkörper $M \in \mathcal{S}^n$, sodass $K = \mathrm{I}M$. Damit erhalten wir aus der Definition dualer gemischter Volumina, Satz 6.6, (7.16) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\tilde{V}(L, \ldots, L, K) &= \frac{(n-2)!}{n!} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{S^{n-2}(u)} \rho(L, v)^{n-1} d\sigma_{n-2}(v) \rho(M, u)^{n-1} d\sigma(u) \\ &= \tilde{V}(M, \ldots, M, \mathrm{I}L).\end{aligned}$$

Die Monotonie dualer gemischter Volumina liefert daher

$$V(K) = \tilde{V}(M, \ldots, M, \mathrm{I}K) \le \tilde{V}(L, \ldots, L, K).$$

Eine Anwendung der dualen Minkowski Ungleichung zeigt nun

$$V(K) \le V(L),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $K = L$. ■

Eine zu Satz 6.8 äquivalente Formulierung ist offenbar:

Korollar 6.9 *Es seien $K, L \in \mathcal{S}^n$ nichttrivial. Ist K ein Schnittkörper, dann gilt*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^\perp) \le \mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp) \quad \forall\, u \in S^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad V(K) \le V(L), \tag{6.6}$$

und $V(K) = V(L)$ genau dann, wenn $K = L$.

Wir werden in Abschnitt 10 sehen, dass für die Gültigkeit von (6.6) im Allgemeinen auf die Voraussetzung, dass K ein Schnittkörper ist, nicht verzichtet werden kann.

7 Kugelfunktionen

Wir geben im folgenden eine Einführung in die Theorie der Kugelfunktionen und benutzen dabei den engen Zusammenhang mit dem Laplace Operator. Diese sehr umfangreiche Theorie entwickeln wir dabei nur soweit es für unsere geometrischen Anwendungen erforderlich ist.

Der Laplace Operator im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2},$$

wobei f eine zweimal differenzierbare Funktion bezeichnet.

Definition. Eine Funktion $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta f = 0$ heißt *harmonisch*.

Die Entwicklung nach Kugelfunktionen stellt eine natürliche Verallgemeinerung der klassischen Fourierreihen auf S^1 dar. Wir wollen diesen Gesichtspunkt zunächst genauer motivieren, indem wir die in klassischen Fourierreihen auftretenden Terme

$$a\cos(k\varphi) + b\sin(k\varphi), \qquad k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R},$$

auf neue Weise interpretieren. Setzen wir

$$x_1 = \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad x_2 = \sin\varphi,$$

so erhalten wir aus

$$\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi) = e^{ik\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (i\sin\varphi)^j (\cos\varphi)^{k-j}$$

die Darstellungen

$$\cos(k\varphi) = \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \binom{k}{2j} x_1^{k-2j} x_2^{2j}, \quad \sin(k\varphi) = \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^j \binom{k}{2j+1} x_1^{k-2j-1} x_2^{2j+1}.$$

Die Funktion

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto a\cos(k\varphi) + b\sin(k\varphi), \qquad k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R},$$

ist damit (wie man nun leicht überprüft) die Einschränkung eines harmonischen homogenen Polynoms im $\mathbb{R}^2$ vom Grad k auf S^1. Ist umgekehrt

$$p(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{k} c_j x_1^{k-j} x_2^j$$

ein harmonisches Polynom vom Grad k, so folgt aus $\Delta p = 0$ die Rekursionsformel

$$c_{j+2} = -\frac{(k-j)(k-j-1)}{(j+1)(j+2)} c_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-2.$$

Die Anfangsbedingungen $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ ergeben

$$c_{2j} = (-1)^j \binom{k}{2j}, \qquad c_{2j+1} = 0,$$

und die Anfangsbedingungen $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ liefern

$$c_{2j+1} = (-1)^j \binom{k}{2j+1}, \qquad c_{2j} = 0.$$

Damit ist p eine Linearkombination der oben erhaltenen Polynome. Es gilt also:

Satz 7.1 *Die Funktionen*

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto a\cos(k\varphi) + b\sin(k\varphi), \qquad k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R},$$

sind genau die Einschränkungen auf S^1 von homogenen harmonischen Polynomen im $\mathbb{R}^2$ vom Grad k.

Satz 7.1 legt die Möglichkeit nahe, dass eine Theorie von Fourierreihen auf S^{n-1} in Analogie zu klassischen Fourierreihen auf S^1 entwickelt werden kann, und motiviert die folgende Definition:

Definition. Eine *Kugelfunktion* der Dimension n vom Grad k ist die Einschränkung auf S^{n-1} eines homogenen harmonischen Polynoms im $\mathbb{R}^n$ vom Grad k. Mit $\mathcal{H}_k^n$ bezeichnen wir den Vektorraum der Kugelfunktionen der Dimension n vom Grad k. Den Vektorraum aller endlichen Summen von Kugelfunktionen der Dimension n bezeichnen wir mit $\mathcal{H}^n$.

Bemerkung.

(a) Sind p und q homogene harmonische Polynome im $\mathbb{R}^n$, deren Einschränkungen auf S^{n-1} übereinstimmen, so gilt $p = q$.

Beweis: Es sei p homogen vom Grad k und q homogen vom Grad l. Dann gilt $p(x) = \|x\|^m q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $m = k - l$, wobei wir annehmen können, dass $m \geq 0$. Eine einfache Rechnung zeigt nun

$$\Delta p(x) = \Delta(\|x\|^m q(x)) = m(m + 2l + n - 2)\|x\|^{m-2} q(x) = 0,$$

womit $m = 0$ und damit $p = q$ gilt. ■

(b) Nach (a) ist der Grad einer Kugelfunktion der Dimension n wohldefiniert.

Der Laplace Operator induziert auf S^{n-1} den sphärischen Laplace Operator. Ohne Verwendung von Parametrisierungen der Sphäre kann man ihn wie folgt einführen: Für $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ist die radiale Fortsetzung $\bar{f} : \mathbb{R}^n \backslash \{o\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\bar{f}(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}.$$

Für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichne $\widehat{g}$ die Einschränkung von g auf S^{n-1}.

Definition. Der *sphärische Laplace Operator* ist definiert durch

$$\Delta_{\mathrm{o}} f := \widehat{\Delta \bar{f}}\,,$$

wobei f eine zweimal differenzierbare Funktion auf S^{n-1} bezeichnet.

Die folgende Eigenschaft des sphärischen Laplace Operators wird im weiteren Verlauf ein wesentliches Hilfsmittel sein.

Satz 7.2 *Es seien $f, g \in \mathbf{C}^2(S^{n-1})$, dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} f \Delta_{\mathrm{o}} g \, d\sigma = \int_{S^{n-1}} g \Delta_{\mathrm{o}} f \, d\sigma.$$

Beweis: Für $0 < s < 1$ und $t > 1$ sei $B(s,t) := \{x \in \mathbb{R}^n : s \leq \|x\| \leq t\}$. Sind $F, G \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^n)$, so folgt aus

$$\operatorname{div}(F\,\nabla G) = \nabla F \cdot \nabla G + F \Delta G$$

und einer Anwendung des Integralsatzes von Gauß die Greensche Formel

$$\int_{B(s,t)} F\Delta G - G\Delta F \, dx = \int_{tS^{n-1}} F\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} \, d\sigma - \int_{sS^{n-1}} F\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} - G\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} \, d\sigma,$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}(u) = \nabla F(u) \cdot u$ für $u \in S^{n-1}$. Setzen wir nun $F = \bar{f}$ und $G = \bar{g}$, dann sind F und G homogen vom Grad 0, also $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$. Integration in Polarkoordinaten liefert daher

$$\int_s^t \int_{S^{n-1}} f\Delta_{\mathrm{o}} g - g\Delta_{\mathrm{o}} f \, d\sigma \, r^{n-3} \, dr = 0,$$

wobei wir noch verwendet haben, dass $\Delta \bar{f}$ und $\Delta \bar{g}$ homogen vom Grad -2 sind. Differentiation und Auswertung an $t = 1$ liefert schließlich die Behauptung. ■

Das nächste Resultat zeigt, dass Kugelfunktionen Eigenfunktionen des sphärischen Laplace Operators sind und gibt damit Aufschluß über deren enge Beziehung.

Satz 7.3 *Für $H \in \mathcal{H}_k^n$ gilt*

$$\Delta_{\mathrm{o}} H = -k(k+n-2)H.$$

Beweis: Es sei $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grad k. Dann gilt mit $\bar{f}(x) = f(\frac{x}{\|x\|})$,

$$\Delta f(x) = \Delta(\|x\|^k \bar{f}(x)) = \|x\|^k \Delta \bar{f}(x) + 2\nabla\|x\|^k \cdot \nabla \bar{f}(x) + \bar{f}(x)\Delta\|x\|^k.$$

Da $\nabla\|x\|^k$ senkrecht zur Sphäre $\|x\| = \text{const.}$ ist und $\nabla \bar{f}$ tangential dazu, gilt

$$\nabla\|x\|^k \cdot \nabla \bar{f}(x) = 0.$$

Da $\Delta \bar{f}$ homogen vom Grad -2 ist, folgt damit

$$\Delta f(x) = \|x\|^{k-2} \Delta_{\mathrm{o}} \widehat{f}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + k(k+n-2)\|x\|^{k-2} \bar{f}(x). \tag{7.1}$$

Da $H \in \mathcal{H}_k^n$ gibt es ein homogenes harmonisches Polynom p mit $\widehat{p} = H$. Setzen wir nun $f = p$ und $\|x\| = 1$ in (7.1), so folgt die Behauptung. ■

Auf dem Vektorraum $\mathbf{C}(S^{n-1})$ der stetigen Funktionen auf S^{n-1} definieren wir nun ein inneres Produkt durch

$$\langle f,g\rangle := \int_{S^{n-1}} f(u)g(u)\,d\sigma(u), \qquad f,g\in\mathbf{C}(S^{n-1}). \tag{7.2}$$

Die Grundlage für die Fourierentwicklung bezüglich Kugelfunktionen bildet:

Satz 7.4 *Sind $G\in\mathcal{H}_k^n$ und $H\in\mathcal{H}_m^n$ mit $k\neq m$, dann sind G und H orthogonal.*

Beweis: Nach Satz 7.2 und Satz 7.3 gilt

$$0=\langle\Delta_{\mathrm{o}}G,H\rangle-\langle G,\Delta_{\mathrm{o}}H\rangle=(m(m+n-2)-k(k+n-2))\langle G,H\rangle.$$

■

Bemerkung.

(a) Ist $H\in\mathcal{H}_k^n$ mit $k\neq 0$, dann ist H orthogonal zur Kugelfunktion $G\equiv 1$, d.h.

$$\int_{S^{n-1}} H(u)\,d\sigma(u)=0.$$

Das folgende algebraische Resultat bildet die Basis für Approximationsaussagen bezüglich Kugelfunktionen.

Satz 7.5 *Es sei p ein homogenes Polynom im $\mathbb{R}^n$ vom Grad k. Dann gibt es harmonische homogene Polynome h_i, $i\in\{k,k-2,k-4,\dots\}$, vom Grad i mit*

$$p(x)=h_k(x)+\|x\|^2h_{k-2}(x)+\|x\|^4h_{k-4}(x)+\cdots$$

Beweis: Es bezeichne $\mathcal{V}_k^n$ den Vektorraum der homogenen Polynome im $\mathbb{R}^n$ vom Grad k. Weiters setzen wir $\widehat{\mathcal{V}}_k^n:=\{\widehat{q}:q\in\mathcal{V}_k^n\}$. Da $\widehat{p}\in\widehat{\mathcal{V}}_k^n\subseteq\mathbf{C}(S^{n-1})$ können wir $\widehat{p}$ orthogonal zerlegen in der Form $\widehat{p}=\widehat{h}_k+\widehat{p}_{k-2}$, wobei $\widehat{p}_{k-2}\in\widehat{\mathcal{V}}_{k-2}^n$ und $\langle\widehat{h}_k,\widehat{q}\rangle=0$ für alle $\widehat{q}\in\widehat{\mathcal{V}}_{k-2}^n$. Wir können daher auch p zerlegen in der Form

$$p(x)=h_k(x)+\|x\|^2p_{k-2}(x),$$

wobei $h_k\in\mathcal{V}_k^n$. Für $q\in\mathcal{V}_{k-2}^n$ gilt nach (7.1) und Satz 7.2,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} q\Delta h_k\,d\sigma &= \int_{S^{n-1}} q(k(k+n-2)h_k+\Delta_{\mathrm{o}}\widehat{h}_k)\,d\sigma=\int_{S^{n-1}} h_k\Delta_{\mathrm{o}}\widehat{q}\,d\sigma\\ &= \int_{S^{n-1}} h_k(\Delta q-(k-2)(k+n-4)q)\,d\sigma=0,\end{aligned}$$

dabei haben wir im letzen Schritt verwendet, dass $\Delta q(x)$ und $\|x\|^2\Delta q(x)$ auf S^{n-1} übereinstimmen. Setzen wir nun $q=\Delta h_k$, so folgt $\Delta h_k=0$ auf S^{n-1} und damit, dass h_k harmonisch ist wegen der Homogenität. Fortsetzung dieses Verfahrens liefert

$$p(x)=h_k(x)+\|x\|^2h_{k-2}(x)+\|x\|^4h_{k-4}(x)+\cdots+\begin{cases}h_0(x)\|x\|^k & k \text{ gerade}\\ h_1(x)\|x\|^{k-1} & k \text{ ungerade}\end{cases}$$

mit harmonischen Polynomen $h_i\in\mathcal{V}_i^n$. ■

Als erste Konsequenz von Satz 7.5 können wir nun auf einfache Weise die Dimension des Vektorraumes $\mathcal{H}_k^n$ bestimmen.

Korollar 7.6 *Es gilt für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$,*

$$\dim \mathcal{H}_k^n =: N(n,k) = \binom{k+n-1}{k} - \binom{k+n-3}{k-2}.$$

Beweis: Es sei $\mathcal{Q}_k^n$ der Vektorraum der Polynome im $\mathbb{R}^n$ vom Grad höchstens k. Da jedes Polynom Summe homogener Polynome ist, gilt nach Satz 7.5 einerseits

$$\widehat{\mathcal{Q}}_k^n := \{\widehat{q} : q \in \mathcal{Q}_k^n\} = \mathcal{H}_0^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_k^n \tag{7.3}$$

und andererseits ist aber

$$\widehat{\mathcal{Q}}_k^n = \widehat{\mathcal{V}}_k^n \oplus \widehat{\mathcal{V}}_{k-1}^n,$$

denn für gerades (ungerades) k sind in $\widehat{\mathcal{V}}_k^n$ nur gerade (ungerade) und in $\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}^n$ nur ungerade (gerade) Funktionen und die Einschränkung des homogenen Polynoms $\|x\|^{2j} q(x)$ stimmt mit der Einschränkung von $q \in \mathcal{V}_{k-2j}^n$ überein. Es ist damit also wegen $\dim \widehat{\mathcal{V}}_k^n = \dim \mathcal{V}_k^n$,

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{H}_k^n &= \dim(\mathcal{H}_0^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_k^n) - \dim(\mathcal{H}_0^n \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{k-1}^n) \\
&= \dim \widehat{\mathcal{Q}}_k^n - \dim \widehat{\mathcal{Q}}_{k-1}^n = \dim \mathcal{V}_k^n - \dim \mathcal{V}_{k-2}^n.
\end{aligned}$$

Es sei $d(k,n) := \dim \mathcal{V}_k^n$. Da es in n Veränderlichen genau $d(k, n-1)$ Monome vom Grad k gibt, die x_n nicht enthalten, und $d(k-1, n)$ Monome, die x_n mindestens einmal enthalten, folgt $d(k,n) = d(k-1,n) + d(k,n-1)$. Da $d(k,1) = 1$ und $d(0,n) = 1$ ist, erhalten wir

$$d(k,n) = \binom{k+n-1}{k}.$$

■

Beispiele.

(a) Es gilt $\dim \mathcal{H}_0^n = 1$ und $\mathcal{H}_0^n$ besteht genau aus den konstanten Funktionen.

(b) Es gilt $\dim \mathcal{H}_1^n = n$ und $\mathcal{H}_1^n$ besteht genau aus den linearen Funktionen

$$u \mapsto x \cdot u, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Die Koordinatenfunktionen $u \mapsto u_i$, $1 \leq i \leq n$, bilden eine orthogonale Basis von $\mathcal{H}_1^n$, denn für $i \neq j$ haben die Mengen $\{u \in S^{n-1} : u_i u_j < 0\}$ und $\{u \in S^{n-1} : u_i u_j > 0\}$ gleiches Maß, womit

$$\int_{S^{n-1}} u_i u_j \, d\sigma = 0.$$

■

Bemerkung.

(a) Ist $H \in \mathcal{H}_k^n$ mit $k \neq 1$, dann ist H orthogonal zu $\mathcal{H}_1^n$, d.h.

$$\int_{S^{n-1}} uH(u) \, d\sigma(u) = o.$$

Aus Satz 7.5 bzw. (7.3) folgt unmittelbar:

Korollar 7.7 *Die Einschränkung auf S^{n-1} jedes Polynoms im $\mathbb{R}^n$ liegt in $\mathcal{H}^n$.*

Nach dem Satz von Stone–Weierstraß kann die radiale Erweiterung jeder stetigen Funktion auf einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (die S^{n-1} enthält) gleichmäßig durch Polynome approximiert werden. Korollar 7.7 liefert daher:

Korollar 7.8 *Es sei $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $H \in \mathcal{H}^n$ mit*

$$\|f - H\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Nach Korollar 7.8 kann jede stetige Funktion auf S^{n-1} gleichmäßig durch endliche Summen von Kugelfunktionen approximiert werden. Wir wollen dieses Resultat nun verwenden, um dichte Teilmengen glatter konvexer bzw. Sternkörper auszuzeichnen.

Definition. Wir nennen einen Sternkörper $L \in \mathcal{S}^n$ *polynomiell*, wenn $\rho(L, \cdot) \in \mathcal{H}^n$. Ein konvexer Körper $K \in \mathcal{K}^n$ heißt *polynomiell*, wenn $h(K, \cdot) \in \mathcal{H}^n$.

Als unmittelbare Folge von Korollar 7.8 notieren wir:

Proposition 7.9 *Es sei $L \in \mathcal{S}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen polynomiellen Sternkörper $K \in \mathcal{S}^n$ mit $r(K, L) \leq \varepsilon$.*

Die zu Proposition 7.9 duale Aussage für konvexe Körper ist

Satz 7.10 *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen polynomiellen konvexen Körper $L \in \mathcal{K}^n$ mit $d(K, L) \leq \varepsilon$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass K durch konvexe Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ Stützfunktionen approximiert werden kann. Dazu sei $\varphi_\varepsilon : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine $\mathbf{C}^\infty$ Funktion mit Träger in $[0, \varepsilon]$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(\|z\|)\, dz = 1.$$

Wir definieren nun für $x \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion h_ε durch

$$h_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} h(K, x + \|x\|z)\varphi_\varepsilon(\|z\|)\, dz.$$

Für festes $z \in \mathbb{R}^n$ sei

$$g_z(x) := h(K, x + \|x\|z) + h(K, x - \|x\|z), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} g_z(x + y) \leq\ & h(K, x + \alpha\|x + y\|z) + h(K, y + (1 - \alpha)\|x + y\|z) \\ & + h(K, x - \alpha\|x + y\|z) + h(K, y - (1 - \alpha)\|x + y\|z). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\alpha := \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} h(K, x+\alpha\|x+y\|z)+h(K, x-\alpha\|x+y\|z) &\leq g_z(x), \\ h(K, y+(1-\alpha)\|x+y\|z)+h(K, y-(1-\alpha)\|x+y\|z) &\leq g_z(y). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$g_z(x+y) \leq g_z(x)+g_z(y).$$

Da $\varphi_\varepsilon \geq 0$ und

$$h_\varepsilon(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} g_z(x)\varphi_\varepsilon(\|z\|)\, dz,$$

folgt daher, dass h_ε sublinear und damit Stützfunktion eines konvexen Körpers K_ε ist. Für $u \in S^{n-1}$ gilt

$$h(K_\varepsilon, u)=\int_{\mathbb{R}^n} h(K, u+z)\varphi_\varepsilon(\|z\|)\, dz=\int_{\mathbb{R}^n} h(K, y)\varphi_\varepsilon(\|y-u\|)\, dy$$

und damit für $x \in \mathbb{R}^n \backslash\{o\}$,

$$h(K_\varepsilon, x)=\|x\| \int_{\mathbb{R}^n} h(K, y)\varphi_\varepsilon\left(\left\|y-\tfrac{x}{\|x\|}\right\|\right)\, dy,$$

womit $h(K_\varepsilon, \cdot)$ eine $\mathbf{C}^\infty$ Funktion auf $\mathbb{R}^n \backslash\{o\}$ ist. Schließlich gilt noch für $K \subseteq RB^n$ und $u \in S^{n-1}$, wegen $|h(K, u+z)-h(K, u)| \leq R\|z\|$,

$$|h(K, u)-h(K_\varepsilon, u)| \leq \int_{\mathbb{R}^n}|h(K, u+z)-h(K, u)|\varphi_\varepsilon(\|z\|)\, dz \leq R\varepsilon,$$

wobei wir $\varphi_\varepsilon(\|z\|)=0$ für $\|z\|>\varepsilon$ verwendent haben. Also ist $d(K, K_\varepsilon) \leq R\varepsilon$.

Zum Beweis, dass $h(K, \cdot)$ durch Stützfunktionen in $\mathcal{H}^n$ approximiert werden kann, verwenden wir nun das im Beweis von Satz 5.1 gezeigte Kriterium für Sublinearität der homogenen Fortsetzung einer Funktion $f \in \mathbf{C}^2(S^{n-1})$: $\check{f}$ ist (genau) dann eine sublineare Funktion, wenn $\operatorname{Hess}\check{f}(x)$ positiv semidefinit ist für jedes $x \in S^{n-1}$. Wir haben weiters im Beweis von Satz 5.1 gesehen, dass 0 stets ein Eigenwert von $\operatorname{Hess}\check{f}(x)$ ist, mit zugehörigem Eigenvektor x. Wir bezeichnen nun mit $\xi(f, x)$ den kleinsten der verbleibenden $n-1$ Eigenwerte von $\operatorname{Hess}\check{f}(x)$ und setzen

$$\xi(f):=\min\{\xi(f, x): x \in S^{n-1}\}.$$

Es ist also $\check{f}$ (genau) dann sublinear, wenn $\xi(f) \geq 0$. Weiters haben wir im Beweis von Satz 5.1 gezeigt, dass für $s>0$ gilt

$$\xi(f+s)=\xi(f)+s. \tag{7.4}$$

Es sei nun $L_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$ ein konvexer Körper mit $h(L_\varepsilon, \cdot) \in \mathbf{C}^2(S^{n-1})$ und $d(K, L_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Wegen (7.4) können wir weiters annehmen, dass $\xi(h(L_\varepsilon, \cdot))>0$. Nach einer verschärften Version des Approximationssatzes von Weierstrass kann die Funktion $h(L_\varepsilon, \cdot)$ zusammen mit ihren Ableitungen bis zur 2. Ordnung gleichmäßig auf, etwa, $B(\frac{1}{2}, 2):=\{x \in \mathbb{R}^n: \frac{1}{2} \leq\|x\| \leq 2\}$ durch Polynome p_k, $k \in \mathbb{N}$, und deren Ableitungen approximiert werden. Dann wird aber $h(L_\varepsilon, \cdot)$ und ihre Ableitungen auch durch $q_k(x):=\|x\| p_k(\frac{x}{\|x\|})$ und deren Ableitungen gleichmäßig approximiert. Die Einschränkung $\widehat{q}_k=\widehat{p}_k$ dieser Funktionen auf S^{n-1} ist aber nach Korollar 7.7 in $\mathcal{H}^n$ und es gilt $\xi(\widehat{q}_k)>0$ für $k \geq k_0$, womit q_k sublinear und damit Stützfunktion eines konvexen Körpers ist für $k \geq k_0$. ∎

Wir sind jetzt in der Situation die Fourierentwicklung bezüglich Kugelfunktionen im Hilbertraum $\mathbf{L}_2(S^{n-1})$ zu behandeln. Dabei bezeichnen wir die durch das innere Produkt (7.2) induzierte Norm auf $\mathbf{L}_2(S^{n-1})$ mit

$$\|f\|_2^2 = \int_{S^{n-1}} |f(u)|^2 \, d\sigma(u), \qquad f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1}).$$

Die allgemeine Theorie von Fourierreihen in Hilberträumen sei im Folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Definition. Ist $\{H_1^{(k)}, \ldots, H_{N(n,k)}^{(k)}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_k^n$, dann heißt

$$\{H_j^{(k)} : j = 1, \ldots, N(n,k); k \in \mathbb{N}\}$$

ein *Orthonormalsystem von Kugelfunktionen.* Mit $\pi_k : \mathbf{L}_2(S^{n-1}) \to \mathcal{H}_k^n$ bezeichnen wir die Orthogonalprojektion auf den Raum $\mathcal{H}_k^n$:

$$\pi_k f = \sum_{j=1}^{N(n,k)} \langle f, H_j^{(k)} \rangle H_j^{(k)}, \qquad f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1}). \tag{7.5}$$

Die *Fourierreihe* von $f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1})$ ist gegeben durch

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k f.$$

Das folgende Resultat zeigt, dass die Fourierreihe einer Funktion $f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1})$ im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

Satz 7.11 *Jedes Orthonormalsystem von Kugelfunktionen ist vollständig, d.h. für jedes $f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1})$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f - \sum_{i=0}^{k} \pi_i f \right\|_2 = 0.$$

Beweis: Es sei $f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1})$ und $\varepsilon > 0$. Da stetige Funktionen dicht liegen in $\mathbf{L}_2(S^{n-1})$, gibt es nach Korollar 7.8 eine Funktion $H \in \mathcal{H}^n$ mit

$$\|f - H\|_2 \le \varepsilon.$$

Es sei k der höchste auftretende Grad von Kugelfunktionen in H. Dann folgt

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{k} \pi_i f \right\|_2 \le \|f - H\|_2 \le \varepsilon,$$

da die Partialsummen der Fourierreihe von f die Bestapproximation bezüglich der $\mathbf{L}_2$-Norm ergeben. ■

Bemerkung.

(a) Eine Funktion $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Fourierreihe:

$$\pi_k f = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad f = 0.$$

Zum weiteren Studium von Fourierreihen bzw. der Orthogonalprojektion π_k nutzen wir die Beziehung von Kugelfunktionen zur Gruppe der Rotationen $\mathrm{SO}(n)$ des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Für eine Funktion $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) und eine Drehung $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$ ist die Funktion $\vartheta f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\vartheta f)(u) := f(\vartheta^{-1}u), \qquad u \in S^{n-1}.$$

$U \subseteq \mathbf{C}(S^{n-1})$ heißt $\mathrm{SO}(n)$ *invariant*, wenn $\vartheta f \in U$ für alle $f \in U$ und $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$. Wir bezeichnen den Stabilisator des kanonischen Einheitsvektors e_n mit

$$\mathrm{SO}(n-1) := \{\vartheta \in \mathrm{SO}(n) : \vartheta e_n = e_n\}.$$

Eine Funktion $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ heißt *zonal*, wenn $\vartheta f = f$ für alle $\vartheta \in \mathrm{SO}(n-1)$. Es bezeichne $\mathbf{C}(S^{n-1}, e_n)$ den Vektorraum der zonalen stetigen Funktionen auf S^{n-1}.

Es besteht eine enge Verbindung zwischen irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathrm{SO}(n)$ und Kugelfunktionen:

Satz 7.12 *Die einzigen* $\mathrm{SO}(n)$ *invarianten Unterräume von* $\mathcal{H}_k^n$ *sind* $\{0\}$ *und* $\mathcal{H}_k^n$.

Beweis: Für $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$ rechnet man leicht nach, dass

$$\Delta(\vartheta f) = \vartheta(\Delta f),$$

d.h. der Laplace Operator kommutiert mit Rotationen. Ist daher p ein homogenes harmonisches Polynom vom Grad k im $\mathbb{R}^n$, so ist auch ϑp für jedes $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$ ein homogenes harmonisches Polynom vom Grad k. Durch Einschränkung auf S^{n-1} folgt die Invarianz von $\mathcal{H}_k^n$ gegenüber Rotationen.
Es sei nun $U \subseteq \mathbf{C}(S^{n-1})$ ein $\mathrm{SO}(n)$ invarianter Unterraum mit $1 \leq \dim U < \infty$. Wir zeigen zunächst, dass

$$\dim \mathbf{C}(S^{n-1}, e_n) \cap U \geq 1. \tag{7.6}$$

Dazu seien $\{g_1, \ldots, g_m\}$ und $\{g_1^*, \ldots, g_m^*\}$ zwei bezüglich dem Skalarprodukt (7.2) orthonormale Basen von U. Für $u, v \in S^{n-1}$ setzen wir,

$$F(u,v) := \sum_{i=1}^m g_i(u)g_i(v) \qquad \text{und} \qquad F^*(u,v) := \sum_{i=1}^m g_i^*(u)g_i^*(v).$$

Offenbar gilt für jedes $H \in U$,

$$H = \sum_{i=1}^m a_i g_i = \sum_{i=1}^m b_i g_i^*,$$

wobei $a_i = \langle H, g_i\rangle$ und $b_i = \langle H, g_i^*\rangle$ für $1 \leq i \leq m$. Es folgt für festes $v \in S^{n-1}$,

$$\langle H, F(\cdot, v) - F^*(\cdot, v)\rangle = \sum_{i=1}^m a_i g_i(v) - \sum_{i=1}^m b_i g_i^*(v) = 0.$$

Setzen wir $H(u) = F(u,v) - F^*(u,v)$, so folgt $F(u,v) = F^*(u,v)$ für alle $u, v \in S^{n-1}$. Wählen wir nun $g_i^* = \vartheta g_i$, $1 \leq i \leq m$, für ein $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$, so erhalten wir

$$F(u,v) = \sum_{i=1}^m g_i(u)g_i(v) = \sum_{i=1}^m g_i(\vartheta^{-1}u)g_i(\vartheta^{-1}v) = F(\vartheta^{-1}u, \vartheta^{-1}v).$$

Insbesondere ist die Funktion $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f := F(e_n, \cdot) = \sum_{i=1}^{m} g_i(e_n) g_i,$$

eine SO$(n-1)$ invariante Funktion in U. Angenommen, es wäre $f = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $g_1, \ldots, g_m$ folgt $g_i(e_n) = 0$ für $1 \leq i \leq m$ und damit $H(e_n) = 0$ für alle $H \in U$. Da es zu jedem $x \in S^{n-1}$ ein $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$ gibt mit $\vartheta x = e_n$, folgt für eine beliebige Funktion $H \in U$,

$$H(x) = H(\vartheta^{-1} e_n) = (\vartheta H)(e_n) = 0,$$

im Widerspruch zu $\dim U \geq 1$. Es ist also $f \neq 0$ und damit $\dim \mathbf{C}(S^{n-1}, e_n) \cap U \geq 1$.

Als nächstes beweisen wir, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$\dim \mathbf{C}(S^{n-1}, e_n) \cap \mathcal{H}_k^n = 1. \tag{7.7}$$

Dazu sei $H \in \mathcal{H}_k^n$ zonal. H ist die Einschränkung auf S^{n-1} eines homogenen harmonischen Polynoms p vom Grad k im $\mathbb{R}^n$. Verwenden wir nun die Notation $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, so besitzt p offenbar eine Darstellung der Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} x_n^{k-j} p_j(\bar{x}), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.8}$$

wobei $p_j : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ein homogenes Polynom vom Grad j in $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ist. Da H zonal ist, gilt für alle $\vartheta \in \mathrm{SO}(n-1)$,

$$\sum_{j=0}^{k} x_n^{k-j} p_j(\bar{x}) = p(x) = p(\vartheta x) = \sum_{j=0}^{k} x_n^{k-j} p_j(\vartheta \bar{x}).$$

Da dies für alle reellen x_n gilt, folgt $p_j(\bar{x}) = p_j(\vartheta \bar{x})$. Da SO$(n-1)$ auf jeder Sphäre $\|\bar{x}\| = $ const. transitiv wirkt, hängt p_j also nur von $\|\bar{x}\|$ ab. Da p_j ein homogenes Polynom vom Grad j ist, erhalten wir für $1 \leq j \leq [\frac{k}{2}]$,

$$p_{2j}(\bar{x}) = c_{2j}(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^j \qquad \text{und} \qquad p_{2j+1} = 0, \tag{7.9}$$

wobei $c_{2j} \in \mathbb{R}$. Einsetzen von (7.9) in (7.8) zusammen mit der Bedingung $\Delta p = 0$ ergibt eine Rekursionsformel für die Koeffizienten c_{2j} mit der bis auf eine reelle Konstante c_0 eindeutig bestimmten Lösung

$$c_{2j} = (-1)^j \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-2j+1)}{2^j j!(n-1)(n+1)(n+3)\cdots(n+2j-3)} c_0. \tag{7.10}$$

Das Polynom p ist also bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, daher gilt (7.7).

Angenommen es gibt einen nicht trivialen SO(n) invarianten Unterraum U von $\mathcal{H}_k^n$. Es bezeichne $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in $\mathcal{H}_k^n$. Aufgrund der SO(n) Invarianz des Skalarprodukts (7.2) ist dann auch $U^\perp$ ein nicht trivialer und SO(n) invarianter Unterraum von $\mathcal{H}_k^n$. Nach (7.6) gilt daher

$$\dim \mathbf{C}(S^{n-1}, e_n) \cap U \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \dim \mathbf{C}(S^{n-1}, e_n) \cap U^\perp \geq 1,$$

im Widerspruch zu $\dim \mathbf{C}(S^{n-1}, e_n) \cap \mathcal{H}_k^n = 1$ und $\dim U \cap U^\perp = 0$. ■

Wir haben im Beweis von Satz 7.12 gesehen, dass es in $\mathcal{H}_k^n$ bis auf eine multiplikative Konstante genau eine zonale Funktion gibt. Diese spielt eine besonders wichtige Rolle in der Theorie der Kugelfunktionen.

Satz 7.13 *Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom P_k^n auf $[-1,1]$ vom Grad k mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) Ist $H_1, \dots, H_{N(n,k)}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}_k^n$, dann gilt für $u, v \in S^{n-1}$,

$$\sum_{i=1}^{N(n,k)} H_i(u)H_i(v) = \frac{N(n,k)}{\omega_n} P_k^n(u \cdot v).$$

(b) Für jedes feste $v \in S^{n-1}$ ist $P_k^n(v \cdot .) \in \mathcal{H}_k^n$.

(c) $P_k^n(e_n \cdot .)$ ist die bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmte zonale Funktion in $\mathcal{H}_k^n$.

Beweis: Es genügt Aussage (a) zu beweisen, (b) und (c) folgen dann unmittelbar. Der Fall $k = 0$ ist trivial, wir können daher $k \geq 1$ annehmen. Es sei zunächst $n = 2$. Verwenden wir die Parametrisierung $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ von S^1, dann ist eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}_k^2$ gegeben durch

$$H_1(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\varphi) \qquad \text{und} \qquad H_2(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\varphi).$$

Wir erhalten daher mit $v = (\cos\psi, \sin\psi)$,

$$H_1(u)H_1(v) + H_2(u)H_2(v) = \frac{1}{\pi}\cos(k(\varphi - \psi)) = \frac{1}{\pi}\cos(k \arccos(u \cdot v)).$$

Setzen wir also $P_k^2(t) = \cos(k \arccos t)$, so folgt die Behauptung.

Es sei nun $n \geq 3$. Im Beweis von Satz 7.12 haben wir gesehen, dass die Funktion

$$F(u,v) = H_1(u)H_1(v) + \cdots + H_{N(n,k)}(u)H_{N(n,k)}(v)$$

nicht von der gewählten orthonormalen Basis abhängt und, dass $F(u,v) = F(\vartheta u, \vartheta v)$ für alle $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$ gilt. Da es offenbar zu gegebenen $u, v \in S^{n-1}$ stets ein $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$ gibt mit

$$\vartheta u = e_n \qquad \text{und} \qquad \vartheta v = \left(0, \dots, 0, \sqrt{1 - (u \cdot v)^2}, u \cdot v\right),$$

können wir P_k^n definieren durch

$$P_k^n(t) := \frac{\omega_n}{N(n,k)} F\left(e_n, \left(0, \dots, 0, \sqrt{1-t^2}, t\right)\right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass P_k^n ein Polynom vom Grad k ist. Im Beweis von Satz 7.12 haben wir gezeigt, dass $P_k^n(e_n \cdot .) \neq 0$ die bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte zonale Funktion in $\mathcal{H}_k^n$ ist. Mit $u = \left(0, \dots, 0, \sqrt{1-t^2}, t\right)$ folgt daher

$$P_k^n(t) = P_k^n(e_n \cdot u) = c\,p(u) = c(t^k + c_2 t^{k-2}(1-t^2) + \cdots),$$

wobei p das Polynom (7.8) bezeichnet und wir (7.9) und (7.10) verwendet haben. Benutzen wir noch einmal (7.9) und $P_k^n \neq 0$, so folgt, dass der Koeffizient von t^k, gegeben durch $c(1 - c_2 + c_4 - \cdots)$, von Null verschieden ist. ■

Definition. Das Polynom P_k^n heißt *Legendre Polynom* der Dimension n vom Grad k.

Mit Hilfe von Legendre Polynomen können wir nun eine einfache Integraldarstellung für die Orthogonalprojektion $\pi_k : \mathbf{L}_2(S^{n-1}) \to \mathcal{H}_k^n$ angeben. Aus Satz 7.13 (a) und (7.5) folgt unmittelbar:

Proposition 7.14 *Es sei $f \in \mathbf{L}_2(S^{n-1})$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(\pi_k f)(u) = \frac{N(n,k)}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} f(v) P_k^n(u \cdot v)\, d\sigma(v), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Für viele Anwendungen benötigt man oft auch eine formale Fourierentwicklung von Maßen. Proposition 7.14 motiviert die folgende Definition:

Definition. Für ein endliches Borel Maß μ auf S^{n-1} definieren wir $\pi_k \mu \in \mathcal{H}_k^n$ durch

$$(\pi_k \mu)(u) = \frac{N(n,k)}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} P_k^n(u \cdot v)\, d\mu(v), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Wie das folgende Resultat zeigt, ist ein Maß auf S^{n-1} durch seine Fourierentwicklung eindeutig bestimmt:

Satz 7.15 *Es sei μ ein endliches Borel Maß auf S^{n-1}. Ist $\pi_k \mu = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $\mu = 0$.*

Beweis: Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $H \in \mathcal{H}_k^n$. Dann gilt nach dem Satz von Fubini

$$0 = \langle \pi_k \mu, H \rangle = \frac{N(n,k)}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} H(u) P_k^n(u \cdot v)\, d\sigma(u)\, d\mu(v) = \int_{S^{n-1}} H(v)\, d\mu(v).$$

Nach Satz 7.8 verschwindet damit aber auch das Integral jeder stetigen Funktion bezüglich μ, womit $\mu = 0$ folgt. ■

Wir geben nun eine explizite Formel zur Berechnung von Legendre Polynomen an:

Formel von Rodrigues. *Es sei $\nu := (n-3)/2$. Dann gilt für $t \in [-1,1]$,*

$$P_k^n(t) = \frac{(-1)^k}{2^k(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} (1-t^2)^{-\nu} \frac{d^k}{dt^k} (1-t^2)^{\nu+k}. \tag{7.11}$$

Beweis: Setzen wir $u = v$ in Satz 7.13 (a) und integrieren über S^{n-1}, so folgt

$$N(n,k) = \sum_{i=1}^{N(n,k)} \int_{S^{n-1}} H_i(u)^2\, d\sigma(u) = N(n,k) P_k^n(1),$$

also gilt $P_k^n(1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und daher nach Satz 7.13 (a) einerseits

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} P_k^n(e_n \cdot u)^2\, d\sigma(u) &= \frac{\omega_n^2}{N(n,k)^2} \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{N(n,k)} H_i(e_n) H_i(u) \right)^2 d\sigma(u) \\
&= \frac{\omega_n^2}{N(n,k)^2} \sum_{i=1}^{N(n,k)} H_i(e_n)^2 = \frac{\omega_n}{N(n,k)} P_k^n(1) = \frac{\omega_n}{N(n,k)}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach Satz 7.13 (c) und Satz 7.4 für $k \neq m$,

$$\int_{S^{n-1}} P_k^n(e_n \cdot u) P_m^n(e_n \cdot u)\, d\sigma(u) = 0.$$

Parametrisierung der Sphäre durch

$$u = te_n + \sqrt{1-t^2}u_0, \qquad u \in S^{n-1},$$

mit $u_0 \in e_n^\perp$, ergibt damit

$$\int_{-1}^{1} P_k^n(t)P_m^n(t)(1-t^2)^\nu\, dt = \frac{1}{\omega_{n-1}}\langle P_k^n(e_n\cdot\,.), P_m^n(e_n\cdot\,.)\rangle = \delta_k^m \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}N(n,k)}, \quad (7.12)$$

wobei $\delta_k^m = 1$ für $k = m$ und $\delta_k^m = 0$ sonst. Ist umgekehrt Q_j, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge von Polynomen auf $[-1,1]$, sodass Q_k Grad k besitzt und

$$\int_{-1}^{1} Q_k(t)Q_m(t)(1-t^2)^\nu\, dt = \delta_k^m, \quad (7.13)$$

so folgt durch Induktion die Existenz reeller Konstanten $c_k^n \in \mathbb{R}$ mit $Q_k = c_k^n P_k^n$. Die Behauptung ist trivial für $k = 0$. Es sei nun $Q_0 = c_0^n P_0^n, \ldots, Q_{k-1} = c_{k-1}^n P_{k-1}^n$ und Q_k dargestellt in der Form $Q_k = a_0 P_0^n + \cdots + a_{k-1}P_{k-1}^n + c_k^n P_k^n$. Die Induktionsvoraussetzung und (7.12) ergeben dann für $j \leq k-1$,

$$a_j \int_{-1}^{1} P_j^n(t)P_j^n(t)(1-t^2)^\nu\, dt = \frac{1}{c_j^n}\int_{-1}^{1} Q_k(t)Q_j(t)(1-t^2)^\nu\, dt = 0.$$

Es bezeichne nun $Q_k^n(t)$ die rechte Seite von (7.11). Offenbar ist Q_k^n ein Polynom vom Grad k auf $[-1,1]$. Es bleibt daher zu zeigen, dass $Q_k^n(1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Orthogonalitätsrelation (7.13) für $0 \leq k < m$ erfüllt ist. Partielle Integration ergibt wegen $k < m$,

$$\int_{-1}^{1} Q_k^n(t)Q_m^n(t)(1-t^2)^\nu\, dt = \text{const.} \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu+m}\frac{d^m}{dt^m}Q_k^n(t)\, dt = 0.$$

Wiederholtes Differenzieren von $(1-t^2)^{\nu+k}$ zeigt die Existenz von Polynomen $p_k(t)$, sodass

$$\frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^{\nu+k} = (-2)^k(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)(1-t^2)^\nu t^k + (1-t^2)^{\nu+1}p_k(t),$$

woraus $Q_k^n(1) = 1$ folgt. ■

Beispiele.

(a) Für $n = 2$ gilt

$$P_k^2(t) = \sum_{i=0}^{[k/2]}(-1)^i\binom{k}{2i}t^{k-2i}(1-t^2)^i.$$

Diese Polynome sind auch als *Chebyshev Polynome* bekannt.

(b) Es gilt für beliebiges $n \geq 2$,

$$P_0^n(t) = 1, \qquad P_1^n(t) = t, \qquad P_2^n(t) = \frac{1}{n-1}(nt^2-1).$$

Im letzten Teil dieses Abschnitts wollen wir Kugelfunktionen verwenden, um Integraltransformationen der folgenden Form zu untersuchen:

Definition. Ist $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und μ ein endliches Borel Maß auf S^{n-1}, so definieren wir die Funktion $\mathrm{T}_\varphi \mu \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ durch

$$(\mathrm{T}_\varphi \mu)(u) = \int_{S^{n-1}} \varphi(u \cdot v)\, d\mu(v), \qquad u \in S^{n-1}. \tag{7.14}$$

Das folgende Resultat bildet die Grundlage für das Studium der Transformation T_φ mit Hilfe von Kugelfunktionen.

Satz von Funk–Hecke. Ist $\varphi \in \mathbf{C}[-1,1]$, so gilt für jedes endliche Borel Maß μ auf S^{n-1} und jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$\pi_k \mathrm{T}_\varphi \mu = \omega_{n-1} \lambda_k^n[\mathrm{T}_\varphi]\, \pi_k \mu,$$

wobei

$$\lambda_k^n[\mathrm{T}_\varphi] = \int_{-1}^{1} \varphi(t) P_k^n(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt.$$

Beweis: Es sei zunächst φ ein Polynom vom Grad m. Dann kann φ dargestellt werden in der Form $\varphi(t) = a_0 P_0^n(t) + \cdots + a_m P_m^n(t)$. Für $k \leq m$ gilt nach Proposition 7.14 und Satz 7.13 einerseits

$$(\pi_k \varphi(w \cdot\, .))(u) = \frac{N(n,k) a_k}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} P_k^n(w \cdot v) P_k^n(u \cdot v)\, d\sigma(v) = a_k P_k^n(w \cdot u), \tag{7.15}$$

und wegen (7.12) andererseits

$$a_k = \frac{N(n,k)\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} \varphi(t) P_k^n(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt.$$

Da wir jede stetige Funktion auf $[-1,1]$ gleichmäßig durch Polynome approximieren können, gilt (7.15) für jedes $\varphi \in \mathbf{C}[-1,1]$. Aus dem Satz von Fubini folgt damit

$$(\pi_k \mathrm{T}_\varphi \mu)(u) = \frac{N(n,k)}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \varphi(w \cdot v) P_k^n(u \cdot v)\, d\sigma(v) d\mu(w) = \omega_{n-1} \lambda_k^n[\mathrm{T}_\varphi]\, (\pi_k \mu)(u).$$

■

Der Satz von Funk–Hecke motiviert die folgende Definition:

Definition. Eine lineare Abbildung T, die jedem endlichen Borel Maß μ (bzw. jeder stetigen Funktion) auf S^{n-1} eine stetige Funktion auf S^{n-1} zuordnet, heißt *Multiplikator Abbildung*, wenn es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $\lambda_k[\mathrm{T}] \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\pi_k \mathrm{T} \mu = \omega_{n-1} \lambda_k^n[\mathrm{T}]\, \pi_k \mu.$$

Die Zahlen $\lambda_k^n[\mathrm{T}]$ heißen die *Multiplikatoren* von T.

Aufgrund der Vollständigkeit jedes Orthonormalsystems von Kugelfunktionen bzw. Satz 7.15 und der Bemerkung nach Satz 7.11 können wir ein einfaches Kriterium für die Injektivität einer Multiplikator Abbildung angeben:

Proposition 7.16 *Eine Multiplikator Abbildung* T *ist genau dann injektiv, wenn alle Multiplikatoren* $\lambda_k^n[\mathrm{T}]$, $k \in \mathbb{N}$, *von Null verschieden sind.*

Für unsere geometrischen Anwendungen spielen zwei Integraltransformationen eine wesentliche Rolle:

Definition. Es sei μ ein endliches Borel Maß auf S^{n-1}. Die *Cosinus Transformation* $\mathrm{C}\mu \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ von μ ist definiert durch

$$(\mathrm{C}\mu)(u) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|\, d\mu(v), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Die Cosinus Transformation ist nach dem Satz von Funk–Hecke eine Multiplikator Abbildung. Ihre Multiplikatoren können wir mit Hilfe der Formel von Rodrigues bestimmen:

Satz 7.17 *Die Multiplikatoren der Cosinus Transformation sind gegeben durch*

$$\lambda_{2k+1}^n[\mathrm{C}] = 0, \qquad \lambda_0^n[\mathrm{C}] = \frac{2}{(n-1)}, \qquad \lambda_2^n[\mathrm{C}] = \frac{2}{(n-1)(n+1)}$$

und für $k \geq 2$ *durch*

$$\lambda_{2k}^n[\mathrm{C}] = (-1)^{k-1} 2 \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{(n-1)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}.$$

Beweis: Nach dem Satz von Funk–Hecke und der Formel von Rodrigues gilt

$$\lambda_k^n[\mathrm{C}] = \int_{-1}^{1} |t| P_k^n(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = \frac{(-1)^k}{2^k(\nu+1)\cdots(\nu+k)} \int_{-1}^{1} |t| \frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^{\nu+k} dt.$$

Da P_k^n ungerade ist, wenn k ungerade ist, folgt $\lambda_{2k+1}^n[\mathrm{C}] = 0$. Die Beispiele nach der Formel von Rodrigues führen auf die Ausdrücke für $\lambda_0^n[\mathrm{C}]$ und $\lambda_2^n[\mathrm{C}]$. Wir nehmen nun an, k ist gerade und $k \geq 4$. Dann ist

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 t \frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^{\nu+k} dt &= 2\, \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}(1-t^2)^{\nu+k}\Big|_{t=0} \\ &= 2(1-t^2)^{\nu+2}\, \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}(1-t^2)^{\frac{n+1}{2}+(k-2)}\Big|_{t=0} \\ &= 2^{k-1}(\nu+3)\cdots(\nu+k) P_{k-2}^{n+4}(0), \end{aligned}$$

wobei $\nu = (n-3)/2$. Mit Hilfe der Formel von Rodrigues berechnet man nun auf einfache Weise $P_{k-2}^{n+4}(0)$, woraus sich die Behauptung ergibt. ■

Die Cosinus Transformation ist wegen $\lambda_{2k+1}^n[\mathrm{C}] = 0$, $k \in \mathbb{N}$, nicht injektiv. Da ein Maß μ auf S^{n-1} jedoch genau dann gerade ist, wenn $\pi_{2k+1}\mu = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir:

Korollar 7.18 *Die Cosinus Transformation ist injektiv auf geraden Maßen.*

Wir definieren nun die zweite für uns wesentliche Integraltransformation:

Definition. Es sei $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die *sphärische Radon Transformation* $\mathrm{R}f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ von f ist definiert durch

$$(\mathrm{R}f)(u) = \int_{S^{n-1}\cap u^\perp} f(v)\, d\sigma_{n-2}(v), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Die sphärische Radon Transformation ist nicht von der Form (7.14). Sie kann jedoch als Grenzwert von Integraltransformationen der Form (7.14) dargestellt werden. Man rechnet leicht nach, dass die für $\varepsilon > 0$ definierte Funktion

$$(\mathrm{R}_\varepsilon f)(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{S^{n-1}} \mathbb{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(u \cdot v) f(v)\, d\sigma(v), \qquad u \in S^{n-1}, \tag{7.16}$$

für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen $\mathrm{R}f$ konvergiert.
Da es stetige Funktionen g_m, $m \in \mathbb{N}$, auf $[-1,1]$ gibt, die fast überall gegen $\mathbb{I}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ konvergieren und $|g_m(t)| \leq 1$ erfüllen, folgt aus dem Satz von Funk–Hecke und dem Satz über dominierte Konvergenz, dass auch die sphärische Radon Transformation eine Multiplikator Abbildung ist.

Satz 7.19 *Die Multiplikatoren der sphärischen Radon Transformation sind gegeben durch*

$$\lambda^n_{2k+1}[\mathrm{R}] = 0, \qquad \lambda^n_0[\mathrm{R}] = 1,$$

und für $k \geq 1$,

$$\lambda^n_{2k}[\mathrm{R}] = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(n-1)(n+1)\cdots(n+2k-3)}.$$

Beweis: Da $\mathrm{R}f$ für $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ gerade ist, folgt $\lambda^n_{2k+1}[\mathrm{R}] = 0$. Aus (7.16) und dem Satz von Funk–Hecke folgt für gerade $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^n_k[\mathrm{R}] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon P^n_k(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt = P^n_k(0) = \frac{(-1)^{k/2} k!}{2^k(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} \binom{\nu+k}{k/2},$$

wobei $\nu = (n-3)/2$ und wir verwendet haben, dass $(-1)^{k/2}\binom{\nu+k}{k/2}$ der Koeffizient von t^k in der Taylorreihe um $t = 0$ von $(1-t^2)^{\nu+k}$ ist. ■

Da eine Funktion $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ genau dann gerade ist, wenn $\pi_{2k+1} f = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir die folgende Injektivitätsaussage für die sphärische Radon Transformation:

Korollar 7.20 *Die sphärische Radon Transformation ist injektiv auf geraden Funktionen.*

8 Das Shephard Problem

In diesem Kapitel verwenden wir Kugelfunktionen, um die vollständige Lösung eines Problems von G.C. Shephard über die Projektionen konvexer Körper zu erhalten. Ausgangspunkt ist folgende anschaulich naheliegende Fragestellung: Seien K und L konvexe Körper mit nichtleerem Inneren. Ist der folgende Schluss zulässig:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^\perp) \quad \forall\, u \in S^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad V(K) \leq V(L)? \tag{8.1}$$

Nach Korollar 6.5 ist die Implikation (8.1) sicher richtig, wenn L ein Zonoid ist. Es stellt sich die Frage, ob die Menge der Zonoide durch eine größere Klasse konvexer Körper ersetzt werden kann. Das folgende Resultat zeigt, dass jede solche Klasse eine Teilmenge der symmetrischen konvexen Körper sein muss:

Satz 8.1 *Zu jedem nicht symmetrischen konvexen Körper $L \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren existiert ein symmetrischer Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^\perp) \qquad \forall\, u \in S^{n-1},$$

aber

$$V(K) > V(L).$$

Beweis: Wir definieren den symmetrischen konvexen Körper K durch

$$S_{n-1}(K,\cdot) := \frac{1}{2}\, S_{n-1}(L,\cdot) + \frac{1}{2}\, S_{n-1}(-L,\cdot).$$

Nach Satz 5.7 ist $S_{n-1}(K,\cdot)$ das Oberflächenmaß eines eindeutig bestimmten symmetrischen konvexen Körpers K mit nichtleerem Inneren. Nach Satz 6.1 gilt

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp) = \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^\perp) \qquad \forall\, u \in S^{n-1}.$$

Aus Satz 5.3 folgt weiters für jeden konvexen Körper $M \in \mathcal{K}^n$,

$$V(K,\ldots,K,M) = \frac{1}{2}\, V(L,\ldots,L,M) + \frac{1}{2}\, V(-L,\ldots,-L,M).$$

Setzen wir $M = K$, so folgt aus der Minkowski Ungleichung damit

$$V(K) > V(L). \qquad \blacksquare$$

Nach Satz 8.1 ist die Implikation (8.1) im Allgemeinen nicht richtig. Das im Beweis von Satz 8.1 konstruierte Gegenbeispiel beruht allerdings darauf, dass die Abbildung welche einem konvexen Körper seinen Projektionenkörper zuordnet nicht injektiv ist. Nach Satz 6.1 und der Definition der Cosinus Transformation gilt für $K \in \mathcal{K}^n$,

$$h(\Pi K,\cdot) = \frac{1}{2}\, \mathrm{C}\, S_{n-1}(K,\cdot).$$

Damit erhalten wir aus Proposition 7.18:

Proposition 8.2 *Die Abbildung $\Pi : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ ist injektiv auf symmetrischen konvexen Körpern mit nichtleerem Inneren.*

Proposition 8.2 und eine mit Satz 8.1 verwandte Beobachtung haben G.C. Shephard zur Formulierung des folgenden Problems geführt:

Problem von Shephard. Es seien $K, L \in \mathcal{K}^n$ symmetrische konvexe Körper mit nichtleerem Inneren. Ist der folgende Schluss zulässig:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^{\perp}) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^{\perp}) \quad \forall\, u \in S^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad V(K) \leq V(L)?$$

Wir notieren zunächst eine positive Antwort für den Fall $n = 2$:

Satz 8.3 *Das Problem von Shephard hat eine positive Antwort für* $n = 2$.

Beweis: Für einen beliebigen konvexen Körper $M \in \mathcal{K}^2$ gilt

$$\mathrm{vol}_1(M|v) = h(M, v) + h(-M, v), \qquad v \in S^{n-1},$$

wobei $M|v$ die Projektion von M auf den von v aufgespannten 1-dimensionalen Unterraum bezeichnet. Bezeichnet $\vartheta_{\frac{\pi}{2}} \in \mathrm{SO}(2)$ die Drehung um $\frac{\pi}{2}$, so folgt für einen symmetrischen Körper $K \in \mathcal{K}^2$,

$$\mathrm{vol}_1(K|u^{\perp}) = \mathrm{vol}_1(K|\vartheta_{\frac{\pi}{2}}u) = 2h(K, \vartheta_{\frac{\pi}{2}}u), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Die Voraussetzungen im Problem von Shephard implizieren damit $h(K, \cdot) \leq h(L, \cdot)$ bzw. $K \subseteq L$, womit insbesondere $V(K) \leq V(L)$ folgt. ■

Um die Lösung des Problems von Shephard für Dimensionen $n \geq 3$ zu erhalten, benötigen wir den Begriff der Krümmung für konvexe Körper.

Definition. Wir sagen ein konvexer Körper $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren besitzt eine *Krümmungsfunktion* $s_{n-1}(K, \cdot) \in \mathbf{C}(S^{n-1})$, wenn

$$dS_{n-1}(K, \cdot) = s_{n-1}(K, \cdot)d\sigma.$$

Wir sagen K besitzt *positive Krümmung*, wenn $s_{n-1}(K, \cdot)$ eine positive Funktion ist.

Bemerkung.

(a) Es sei K ein konvexer Körper mit positiver Krümmung, dessen Rand eine glatte Mannigfaltigkeit im Sinne der Differentialgeometrie ist. Dann ist die Krümmungsfunktion von K reziprok zur Gauß Krümmung als Funktion des äußeren Normaleneinheitsvektors.

Wie der folgende Satz zeigt, besitzen hinreichend glatte konvexe Körper eine Krümmungsfunktion. Der Beweis dieses Resultats verwendet Methoden aus der Differentialgeometrie und geometrischen Maßtheorie und übersteigt daher die Möglichkeiten dieser Vorlesung:

Satz 8.4 *Es sei* $K \in \mathcal{K}^n$ *mit nichtleerem Inneren und* $h(K, \cdot) \in \mathbf{C}^2(S^{n-1})$. *Dann besitzt* K *eine Krümmungsfunktion und* $s_{n-1}(K, u)$ *ist gegeben durch die Summe der Hauptminoren der Ordnung* $n - 1$ *der Hessischen Matrix von* $h(K, \cdot)$ *an* $u \in S^{n-1}$.

Nach Satz 7.10 sind polynomielle konvexe Körper dicht in $\mathcal{K}^n$. Satz 8.4 zeigt, dass der Beweis von Satz 7.10 sogar die folgende stärkere Aussage liefert:

Korollar 8.5 *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen polynomiellen konvexen Körper $L \in \mathcal{K}^n$ mit positiver Krümmung und $d(K, L) \leq \varepsilon$.*

Wir sind nun in der Lage eine äquivalente Formulierung für das Problem von Shephard zu geben.

Satz 8.6 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Das Problem von Shephard hat eine positive Antwort.

(b) Jeder polynomielle symmetrische konvexe Körper mit positiver Krümmung ist ein Zonoid.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, K und L seien symmetrische konvexe Körper mit nichtleerem Inneren für die Inklusion (8.1) nicht richtig ist. Dann gilt $\Pi K \subseteq \Pi L$, aber $V(K) > V(L)$. Da ΠK den Ursprung enthält und Π homogen ist, können wir K mit einem passenden Faktor $\lambda < 1$ strecken, sodass noch $V(\lambda K) > V(L)$ und die Inklusion $\Pi(\lambda K) \subseteq \Pi L$ strikt ist. Da die Abbildung Π und das Volumen stetig sind auf $\mathcal{K}^n$, können wir nach Korollar 8.5 einen polynomiellen konvexen Körper L' mit positiver Krümmung finden, sodass $\Pi(\lambda K) \subseteq \Pi L'$ aber $V(\lambda K) > V(L')$. Nach Satz 6.4 kann L' kein Zonoid sein.

Es sei nun K ein symmetrischer polynomieller konvexer Körper mit positiver Krümmung der kein Zonoid ist. Da K positive Krümmung besitzt, hat K nach Satz 5.7 innere Punkte. Da $h(K, \cdot) \in \mathcal{H}^n$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$h(K, \cdot) = \sum_{i=0}^{m} \pi_i h(K, \cdot),$$

wobei $\pi_i h(K, \cdot) = 0$ für ungerade i, da K symmetrisch ist. Wir definieren nun eine gerade Funktion $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ durch

$$f = \sum_{i=0}^{m/2} \frac{1}{\omega_{n-1} \lambda_{2i}^n[\mathrm{C}]} \pi_{2i} h(K, \cdot),$$

wobei $\lambda_{2i}^n[\mathrm{C}] \neq 0$ die geraden Multiplikatoren der Cosinus Transformation sind. Nach dem Satz von Funk–Hecke gilt dann $h(K, \cdot) = \mathrm{C} f$. Die Funktion f muss negative Werte annehmen, andernfalls ist K ein Zonoid nach der Charakterisierung von Zonoiden durch (6.1) . Es sei $F \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ eine stetige nichtkonstante gerade Funktion, sodass

$$F(u) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } f(u) < 0, \\ = 0 & \text{für } f(u) \geq 0. \end{cases}$$

Geeignete Approximation von F nach Satz 7.8, zeigt die Existenz einer geraden nichtnegativen Funktion $G \in \mathcal{H}^n$ mit

$$\int_{S^{n-1}} f(u) G(u) \, d\sigma(u) < 0.$$

Da $G \in \mathcal{H}^n$ gerade ist, können wir wie zuvor ein gerades $H \in \mathcal{H}^n$ finden, mit

$$G = \mathrm{C}\, H.$$

Da K positive Krümmung besitzt, hat K eine positive stetige Krümmungsfunktion $s_{n-1}(K, \cdot)$. Wir können daher ein $\alpha > 0$ finden, sodass auch

$$s_{n-1}(K, \cdot) + \alpha H > 0.$$

Nach Satz 5.7 gibt es einen symmetrischen konvexen Körper L mit nichtleerem Inneren und

$$dS_{n-1}(L, \cdot) = (s_{n-1}(K, \cdot) + \alpha H) d\sigma.$$

Es folgt

$$h(\Pi L, \cdot) = \frac{1}{2} \mathrm{C}\, S_{n-1}(L, \cdot) = h(\Pi K, \cdot) + \frac{\alpha}{2} G.$$

Da G nichtnegativ ist, gilt also $\Pi K \subseteq \Pi L$ bzw.

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L|u^\perp) \qquad \forall\, u \in S^{n-1}.$$

Satz 5.3, $h(K, \cdot) = \mathrm{C}\, f$ und der Satz von Fubini liefern aber

$$\begin{aligned} \frac{n}{\alpha}(V(L, \ldots, L, K) - V(K)) &= \int_{S^{n-1}} (\mathrm{C} f)(u) H(u)\, d\sigma(u) \\ &= \int_{S^{n-1}} f(u)(\mathrm{C} H)(u)\, d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} f(u) G(u)\, d\sigma(u) < 0, \end{aligned}$$

woraus mit der Ungleichung von Minkowski folgt

$$V(K) > V(L).$$

■

Da die Menge der Zonoide nach Definition abgeschlossen in der Hausdorff Metrik ist, besitzt das Problem von Shephard nach Korollar 8.5 und Satz 8.6 genau dann eine positive Antwort, wenn *jeder* symmetrische konvexe Körper ein Zonoid ist. Das folgende Resultat zeigt, dass dies für $n \geq 3$ nicht der Fall ist.

Satz 8.7 *Für $n \geq 3$ gibt es symmetrische konvexe Körper, die keine Zonoide sind.*

Beweis: Wir werden zeigen, dass jede Stützmenge eines Zonoids wieder ein Zonoid und damit zentralsymmetrisch ist. Da es für $n \geq 3$ symmetrische Polytope, wie etwa das Kreuzpolytop $\mathrm{conv}\, \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$, mit simplizialen Facetten gibt, ist die Behauptung damit bewiesen.

Es sei K ein Zonoid. Im Beweis von Satz 6.3 haben wir gezeigt, dass es ein gerades Maß μ auf S^{n-1} gibt mit

$$h(K, u) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v|\, d\mu(v), \qquad u \in S^{n-1}. \tag{8.2}$$

Es sei $e \in S^{n-1}$ beliebig. Wir werden zeigen, dass es ein $w(e) \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass

$$h(F(K, e), u) = \int_{S^{n-1} \cap e^\perp} |u \cdot v|\, d\mu(v) + w(e) \cdot u, \qquad u \in S^{n-1}. \tag{8.3}$$

Nach Satz 3.3 gilt

$$h(F(K,e),u) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{h(K, e+\lambda u) - h(K,e)}{\lambda}. \tag{8.4}$$

Wir setzen nun

$$w(e) := 2 \int_{e \cdot v > 0} v \, d\mu(v).$$

Da $h(F(K,e), \pm e) = \pm h(K,e)$ folgt die Gültigkeit von (8.3) für $u = \pm e$. Wir können daher annehmen, dass u und e linear unabhänig sind. Wir definieren

$$\begin{aligned} A(\lambda) &:= \{v \in S^{n-1} : e \cdot v > 0;\ (e+\lambda u) \cdot v > 0\}, \\ B(\lambda) &:= \{v \in S^{n-1} : e \cdot v \le 0;\ (e+\lambda u) \cdot v > 0\}, \\ C(\lambda) &:= \{v \in S^{n-1} : e \cdot v > 0;\ (e+\lambda u) \cdot v \le 0\}. \end{aligned}$$

Die Formeln (8.2) und (8.4) zeigen, dass

$$\begin{aligned} h(F(K,e),u) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{2}{\lambda} \left(\int_{A(\lambda) \cup B(\lambda)} (e+\lambda u) \cdot v \, d\mu(v) - \int_{A(\lambda) \cup C(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) \right) \\ &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{2}{\lambda} \left(\int_{B(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) - \int_{C(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) \right) + 2 \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{A(\lambda) \cup B(\lambda)} u \cdot v \, d\mu(v). \end{aligned}$$

Für $v \in B(\lambda)$ ist $|e \cdot v| \le c\lambda$ mit einer geeigneten Konstante $c \in \mathbb{R}$. Setzen wir

$$B'(\lambda) := \{v \in S^{n-1} : e \cdot v < 0;\ (e+\lambda u) \cdot v > 0\},$$

so folgt

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_{B(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \int_{B'(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) \right| \le c \|\mu\|_{\mathrm{TV}}(B'(\lambda)),$$

wobei $\|\mu\|_{\mathrm{TV}}$ die Totalvariation von μ bezeichnet. Da $\lim_{\lambda \downarrow 0} B'(\lambda) = \emptyset$ folgt

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{2}{\lambda} \int_{B(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) = 0.$$

Analog erhält man aus $\lim_{\lambda \downarrow 0} C(\lambda) = \emptyset$,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{2}{\lambda} \int_{C(\lambda)} e \cdot v \, d\mu(v) = 0.$$

Die Formel (8.3) ergibt sich nun aus $\lim_{\lambda \downarrow 0} A(\lambda) = \{v \in S^{n-1} : e \cdot v > 0\}$ und

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} B(\lambda) = \{v \in S^{n-1} : e \cdot v = 0; u \cdot v > 0\}.$$

■

Zusammenfassend ergibt sich daher folgende Lösung des Problems von Shephard:

Korollar 8.8 *Das Problem von Shephard hat eine positive Antwort für* $n = 2$ *und eine negative Antwort für* $n \ge 3$.

9 Fourier Transformation und Volumen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt das Volumen von Schnitten symmetrischer konvexer Körper mit Hilfe der Fourier Transformation. Obwohl erste Resultate in dieser Richtung bereits auf Laplace zurück gehen, konnte erst im Jahr 1998 der Zusammenhang zwischen Volumen von Schnitten und der Fourier Transformation von Radialfunktionen in voller Allgemeinheit bewiesen werden.

Definition. Die *Fourier Transformation* $\mathrm{F}f$ von $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$(\mathrm{F}f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\,x\cdot y}\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Fourier Transformation ist offenbar eine lineare Abbildung auf $\mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$, bildet integrierbare Funktionen im allgemeinen jedoch nicht in $\mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ ab. Es erweist sich daher als hilfreich die Einschränkung der Fourier Transformation auf einen Teilraum der glatten Funktionen im $\mathbb{R}^n$ zu betrachten, welcher in sich abgebildet wird.

Ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multi-Index, so nennen wir $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ die *Ordnung* von α und definieren den Differentialoperator D_α durch

$$\mathrm{D}_\alpha := \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Für ein Polynom p im $\mathbb{R}^n$ vom Grad k, gegeben durch

$$p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

seien die Differentialoperatoren $p(\mathrm{D})$ und $p(-\mathrm{D})$ definiert durch

$$p(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \mathrm{D}_\alpha \qquad \text{und} \qquad p(-\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{-|\alpha|} c_\alpha \mathrm{D}_\alpha.$$

Definition. Der *Schwartzraum* $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ *schnell fallender Funktionen* ist definiert durch

$$\mathbf{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^k |\mathrm{D}_\alpha f| < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bemerkung.

(a) Eine Funktion $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört genau dann zu $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn $p\mathrm{D}_\alpha f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ für jedes Polynom p im $\mathbb{R}^n$ und jeden Multi-Index α.

Beispiele.

(a) Die Funktion $\exp(-\|x\|^2)$ gehört zu $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Jede $\mathbf{C}^\infty$ Funktion im $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger liegt in $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Die folgenden einfachen Eigenschaften der Fourier Transformation werden im weiteren Verlauf dieses Abschnitts nützlich sein.

Satz 9.1 *Es sei $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Ist $g(z) = f(z-y)$ für $y, z \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $(\mathrm{F}g)(x) = (\mathrm{F}f)(x)e^{-i\,x\cdot y}$.

(b) Ist $\lambda > 0$ und $h(z) = f(z/\lambda)$, $z \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $(\mathrm{F}h)(x) = \lambda^n(\mathrm{F}f)(\lambda x)$.

(c) Ist $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ und p ein Polynom im $\mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\mathrm{F}(p(\mathrm{D})f) = p\,\mathrm{F}f \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{F}(pf) = p(-\mathrm{D})\mathrm{F}f.$$

(d) Ist $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist auch $\mathrm{F}f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Aussagen (a) und (b) ergeben sich direkt aus wohlbekannten Eigenschaften des Lebesgue Maßes. Es sei daher $f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $p(\mathrm{D})f$ und pf für jedes Polynom p im $\mathbb{R}^n$ in $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ und eine einfache Rechnung ergibt $\mathrm{F}(p(\mathrm{D})f) = p\,\mathrm{F}f$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, so gilt

$$\frac{(\mathrm{F}f)(x+\varepsilon e_1) - (\mathrm{F}f)(x)}{i\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} y_1 f(y) \frac{e^{-i\,y_1\varepsilon} - 1}{i\,y_1\varepsilon} e^{-i\,x\cdot y}\,dy,$$

wobei $e_1 \in \mathbb{R}^n$ den ersten kanonischen Basisvektor bezeichnet. Da $x_1 f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$, erhalten wir aus dem Satz über die dominierte Konvergenz,

$$-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{F}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} y_1 f(y) e^{-i\,x\cdot y}\,dy.$$

Iteration liefert die Formel $\mathrm{F}(pf) = p(-\mathrm{D})\mathrm{F}f$.
Zum Beweis von (d) setzen wir $g_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $g_\alpha \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ für jeden Multi-Index α und aus (c) folgt für ein beliebiges Polynom p,

$$p\,\mathrm{D}_\alpha \mathrm{F}f = p\,\mathrm{F}g_\alpha = \mathrm{F}(p(\mathrm{D})g_\alpha).$$

Da $p(\mathrm{D})g_\alpha \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$, ist $p\,\mathrm{D}_\alpha \mathrm{F}f$ beschränkt und damit $\mathrm{F}f \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Die besondere Nützlichkeit der Fourier Transformation basiert auf der Möglichkeit von der Transformierten zur Ausgangsfunktion zurückzukehren.

Satz 9.2 *Sind $f, \mathrm{F}f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$f_0(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{F}f)(y) e^{i\,x\cdot y}\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

dann gilt $f_0(x) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir verwenden das normierte Lebesgue Maß μ_n auf $\mathbb{R}^n$, definiert durch

$$d\mu_n(x) = (2\pi)^{-n/2}\,dx.$$

Für $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ sei

$$(\check{\mathrm{F}}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\,x\cdot y}\,d\mu_n(y), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

die normierte Fourier Transformation von f. Wir wollen zeigen, dass

$$(\check{\mathrm{F}}\check{\mathrm{F}}f)(x) = f(-x) \tag{9.1}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, wenn $\check{\mathrm{F}}f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Dazu definieren wir $\varphi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_n(x) := \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass sowohl φ_1 als auch $\check{\mathrm{F}}\varphi_1$ die Differentialgleichung $y' + xy = 0$ erfüllen. Da weiters $\varphi_1(0) = (\check{\mathrm{F}}\varphi_1)(0) = 1$ erhalten wir $\varphi_1 = \check{\mathrm{F}}\varphi_1$. Da $\varphi_n(x) = \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_1(x_n)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, ist $(\check{\mathrm{F}}\varphi_n)(x) = (\check{\mathrm{F}}\varphi_1)(x_1)\cdots(\check{\mathrm{F}}\varphi_1)(x_n)$, woraus $\varphi_n = \check{\mathrm{F}}\varphi_n$ folgt. Insbesondere gilt

$$\varphi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\mathrm{F}}\varphi_n)(x)\,d\mu_n(x). \tag{9.2}$$

Es sei nun $g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist nach Satz 9.1 (d) auch $\mathrm{F}g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen weiters $f(x) = \varphi_n(x/\lambda)$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\lambda > 0$. Nach Satz 9.1 (b) und dem Satz von Fubini gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g\big(\tfrac{x}{\lambda}\big)(\check{\mathrm{F}}\varphi_n)(x)\,d\mu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\lambda^n(\check{\mathrm{F}}\varphi_n)(\lambda x)\,d\mu_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\mathrm{F}}f)(x)g(x)\,d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n\big(\tfrac{x}{\lambda}\big)(\check{\mathrm{F}}g)(x)\,d\mu_n(x).
\end{aligned}$$

Da $g(x/\lambda) \to g(0)$ und $\varphi_n(x/\lambda) \to 1$ für $\lambda \to \infty$, folgt nun aus dem Satz über die dominierte Konvergenz und (9.2),

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\mathrm{F}}g)(x)\,d\mu_n(x).$$

Setzen wir $h(z) = g(z + x)$, so erhalten wir aus Satz 9.1 (a),

$$g(x) = h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\mathrm{F}}h)(y)\,d\mu_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\mathrm{F}}g)(y)e^{i\,x\cdot y}\,d\mu_n(y),$$

womit (9.1) für g bewiesen ist. Es sei nun $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ mit $\check{\mathrm{F}}f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt nach dem Satz von Fubini für jede Funktion $g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\check{\mathrm{F}}\check{\mathrm{F}}f(x))g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)g(x)\,dx.$$

Da jede stetige Funktion im $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger durch $\mathbf{C}^\infty$ Funktionen mit kompaktem Träger gleichmäßig approximiert werden kann, erhalten wir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\check{\mathrm{F}}\check{\mathrm{F}}f)(x) - f(-x)|g(x)\,dx = 0$$

für jede stetige Funktion g mit kompaktem Träger. ■

Korollar 9.3 *Die Fourier Transformation ist eine bijektive lineare Abbildung von* $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ *auf sich.*

Besonders wichtig für uns ist der Zusammenhang zwischen der sphärischen Radon Transformation und der Fourier Transformation $-n+1$ homogener Funktionen.

Satz 9.4 *Es sei ρ eine gerade -1 homogene stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n \backslash \{o\}$. Dann ist die Fourier Transformation von ρ^{n-1} wieder eine gerade -1 homogene stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ und für $u \in S^{n-1}$ gilt*

$$(\mathrm{F}\rho^{n-1})(u) = \pi \int_{S^{n-1} \cap u^\perp} \rho^{n-1}(v)\, d\sigma_{n-2}(v) = \pi(\mathrm{R}\rho^{n-1})(u).$$

Beweis: Es sei $g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine gerade Funktion mit kompaktem Träger. Nach dem Satz von Fubini und der Homogenität von ρ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{F}\rho^{n-1})(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)^{n-1} (\mathrm{F}g)(x)\, dx = \int_{S^{n-1}} \rho^{n-1}(u) \int_0^\infty (\mathrm{F}g)(ru)\, dr\, d\sigma(u).$$

Es sei $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_u(r) = (\mathrm{F}g)(ru)$. Die Substitution $y \cdot u = t$ zeigt

$$f_u(r) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-ir\, y \cdot u}\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\, rt} \int_{H_{u,t}} g(x)\, dx\, dt,$$

womit f_u mit der Fourier Transformation der Funktion $h_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h_u(t) = \int_{H_{u,t}} g(x)\, dx,$$

übereinstimmt. Da g gerade ist folgt aus Satz 9.2

$$(\mathrm{F}f_u)(t) = 2\pi h_u(t) = 2\pi \int_{H_{u,t}} g(x)\, dx \tag{9.3}$$

und damit

$$2\int_0^\infty (\mathrm{F}g)(ru)\, dr = \int_{-\infty}^\infty (\mathrm{F}g)(ru)\, dr = (\mathrm{F}f_u)(0) = 2\pi \int_{H_{u,0}} g(x)\, dx.$$

Verwendung von Polarkoordinaten in der Hyperebene $H_{u,t}$ zeigt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{F}\rho^{n-1})(x) g(x)\, dx = \pi \int_{S^{n-1}} \rho^{n-1}(u) \mathrm{R}\left(v \mapsto \int_0^\infty r^{n-2} g(rv)\, dr\right)(u)\, d\sigma(u).$$

Formel (7.16), der Satz von Fubini und eine Rücktransformation auf kartesische Koordinaten ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{F}\rho^{n-1})(x) g(x)\, dx &= \pi \int_{S^{n-1}} (\mathrm{R}\rho^{n-1})(u) \int_0^\infty r^{n-2} g(ru)\, dr\, d\sigma(u) \\ &= \pi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x\|} (\mathrm{R}\rho^{n-1}) \left(\tfrac{x}{\|x\|}\right) g(x)\, dx.\end{aligned}$$

Da ρ gerade und g eine beliebige gerade $\mathbf{C}^\infty$ Funktion mit kompaktem Träger ist, folgt, dass $\mathrm{F}\rho^{n-1}$ mit der -1 homogenen Fortsetzung von $\pi\mathrm{R}\rho^{n-1}$ übereinstimmt. ■

Bemerkung.

(a) Nach Satz 9.4 stimmt die Fourier Transformation einer $-n+1$ homogenen geraden stetigen Funktion f (bis auf den Faktor π) mit der -1 homogenen Fortsetzung der sphärischen Radon Transformation von f überein.

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass die Fourier Transformation einer $-n-1$ homogenen geraden stetigen Funktion g (bis auf den Faktor $-\frac{\pi}{2}$) mit der 1 homogenen Fortsetzung der Cosinus Transformation von g übereinstimmt.

Als Konsequenz von Satz 6.6 und Satz 9.4 notieren wir:

Korollar 9.5 *Ist $L \in \mathcal{S}^n$ ein symmetrischer Sternkörper, so gilt für $u \in S^{n-1}$,*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^{\perp}) = \frac{1}{\pi(n-1)}(\mathrm{F}\rho(L,\cdot)^{n-1})(u).$$

Wir werden im folgenden eine starke Verallgemeinerung von Korollar 9.5 erarbeiten. Dazu benötigen wir die parallele Schnittfunktion konvexer Körper.

Definition. Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ mit nichtleerem Inneren. Die *parallele Schnittfunktion* $A_u(K,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von K in Richtung $u \in S^{n-1}$ ist definiert durch

$$A_u(K,t) = \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap H_{u,t}).$$

Als unmittelbare Folge der Brunn–Minkowski Ungleichung notieren wir:

Satz 9.6 *Ist $K \in \mathcal{K}^n$ ein konvexer Körper mit nichtleerem Inneren, dann ist für jedes $u \in S^{n-1}$ die Funktion*

$$t \mapsto A_u(K,t)^{1/(n-1)}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

auf ihrem Träger konkav.

Beweis: Für $t \in \mathbb{R}$ sei $K(t) := K \cap H_{u,t}$. Die Konvexität von K impliziert für s,t im Träger von $A_u(K,\cdot)$ und jedes $\lambda \in [0,1]$ die Inklusion

$$\lambda K(s) + (1-\lambda)K(t) \subseteq K(\lambda s + (1-\lambda)t)$$

und damit auch

$$\lambda K(s)|u^{\perp} + (1-\lambda)K(t)|u^{\perp} \subseteq K(\lambda s + (1-\lambda)t)|u^{\perp}.$$

Da $A_u(K,t) = \mathrm{vol}_{n-1}(K(t)) = \mathrm{vol}_{n-1}(K(t)|u^{\perp})$, ergibt sich die Behauptung aus einer Anwendung der Brunn–Minkowski Ungleichung in $u^{\perp}$. ■

Unser nächstes Resultat zeigt, dass sich die Differenzierbarkeit der Radialfunktion symmetrischer konvexer Körper auf die parallele Schnittfunktion überträgt.

Satz 9.7 *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ ein symmetrischer konvexer Körper mit $\rho(K,\cdot) \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Umgebung U von $\{0\}$, sodass die parallelen Schnittfunktionen $A_u(K,\cdot)$, $u \in S^{n-1}$, m-mal (gleichmäßig in u) stetig differenzierbar sind auf U und für jedes feste $t \in U$ die Funktion $u \mapsto A_u^{(k)}(K,t)$, $0 \leq k \leq m$, stetig auf S^{n-1} ist.*

Beweis: Es sei $u \in S^{n-1}$ zunächst fest gewählt. Wir können $K \neq \{o\}$ annehmen. Da $\rho(K, \cdot)$ stetig ist, besitzt K nichtleeres Inneres und wir können $rB^n \subseteq K$ annehmen. Es sei nun $|t| < r$ und S^{n-2} die euklidische Einheitssphäre in $H_{u,t}$ mit Mittelpunkt in $o|H_{u,t} \in K \cap H_{u,t}$. Bezeichnet $\rho(K \cap H_{u,t}, \cdot)$ die Radialfunktion von $K \cap H_{u,t}$ in $H_{u,t}$ in Bezug auf $o|H_{u,t}$ so folgt aus Satz 2.14

$$A_u(K,t) = \frac{1}{n-1} \int_{S^{n-2}} \rho(K \cap H_{u,t}, v)^{n-1}\, dv.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass die Funktion $g(t) := \rho(K \cap H_{u,t}, v)$ in einer Umgebung von $\{0\}$ gleichmäßig in u und v differenzierbar ist.

Dazu sei $v \in S^{n-2}$ fest gewählt, $L = K \cap \operatorname{span}\{u, v\}$ und $\rho(L, \cdot)$ bezeichne die Radialfunktion von L in $\operatorname{span}\{u, v\}$. Da $\rho(K, \cdot) \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\rho(L, \cdot)$ eine m mal stetig differenzierbare Funktion auf $[0, 2\pi]$. Bezeichnet $w \in \operatorname{bd} K$ den Randpunkt von K welcher $\rho(K \cap H_{u,t}, v)$ entspricht, so ist der Winkel zwischen $u^\perp$ und der Strecke $[o, w]$ gegeben durch

$$\alpha := \arctan\left(\frac{t}{\rho(K \cap H_{u,t}, v)}\right) = \arctan\left(\frac{t}{g(t)}\right)$$

und die Länge der Strecke ist $\rho(L, \alpha)$. Der Satz von Pythagoras liefert daher die implizite Darstellung

$$g(t) = \sqrt{\rho\left(L, \arctan\left(\frac{t}{g(t)}\right)\right)^2 - t^2}.$$

Differentiation ergibt

$$g'(t) = \frac{g(t)\rho(L,\alpha)\rho'(L,\alpha)\frac{1}{g(t)^2+t^2} - t}{g(t) + t\rho(L,\alpha)\rho'(L,\alpha)\frac{1}{g(t)^2+t^2}}. \tag{9.4}$$

Da $rB^n \subseteq K$ gibt es eine von $u, v \in S^{n-1}$ unabhängige Konstante $c > 0$, sodass $g(t), \rho(L, \alpha) \geq c$ für hinreichend kleines t. Da $\rho(K, \cdot) \in \mathbf{C}^m(\mathbb{R}^n)$ ist die Radialfunktion $\rho(L, \cdot)$ und alle ihre Ableitungen bis zur Ordnung m nach oben gleichmäßig in $u, v \in S^{n-1}$ beschränkt. Dies zeigt, dass der Nenner in (9.4) positiv ist für alle hinreichend kleinen t, womit die Ableitung g' in einer Umgebung von $\{0\}$ gleichmäßig in u, v existiert. Die Berechnung höherer Ableitungen von g erfolgt analog, wobei der Nenner stets positiv ist für hinreichend kleine t. Damit ist $A_u(K, \cdot)$, $u \in S^{n-1}$, m-mal gleichmäßig stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\{0\}$.

Die Stetigkeit der Abbildung $u \mapsto A_u^{(k)}(K,t)$ auf S^{n-1} zeigt man durch Induktion nach k. Die Behauptung stimmt offenbar für $k = 0$. Nehmen wir nun die Stetigkeit für $k-1$ an, so ist für hinreichend kleines t die Funktion $u \mapsto A_u^{(k)}(K,t)$ gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen auf S^{n-1},

$$A_u^{(k)}(K,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A_u^{(k-1)}(K, t+\varepsilon) - A_u^{(k-1)}(K,t)}{\varepsilon}.$$

■

Für den Beweis des Hauptresultats dieses Abschnitts benötigen wir noch gebrochene Ableitungen glatter Funktionen an der Stelle Null. Wir geben hier zunächst eine kurze Motivation für die nachfolgende Definition:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige integrierbare Funktion, die in einer Umgebung von Null beliebig oft differenzierbar ist. Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} q \in (-1, 0)$, dann setzen wir

$$f^{(q)}(0) := \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^\infty z^{-1-q} f(z)\, dz. \tag{9.5}$$

Da z^{-1-q} lokal integrierbar ist, ist $f^{(q)}(0)$ wohldefiniert und es gilt

$$f^{(q)}(0) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \left(\int_0^1 z^{-q}\, \frac{f(z) - f(0)}{z}\, dz + \int_1^\infty z^{-1-q} f(z)\, dz + \frac{f(0)}{-q} \right). \tag{9.6}$$

Nach dem Zwischenwertsatz der Differentialrechnung ist (9.6) auch wohldefiniert für $q \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} q \in (0, 1)$. Auf diese Weise können wir $f^{(q)}(0)$ auf $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\operatorname{Re} q \in (-1, 1)$ fortsetzen. Iteration dieser Vorgehensweise führt auf folgende:

Definition. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige integrierbare Funktion, die in einer Umgebung von Null beliebig oft differenzierbar ist. Für $m \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ mit $-1 < \operatorname{Re} q < m$ definieren wir die *gebrochene Ableitung* $f^{(q)}(0)$ von f an der Stelle Null durch

$$\begin{aligned} f^{(q)}(0) \quad &:= \quad \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 z^{-1-q} \left(f(z) - f(0) - \cdots - \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(0) \right) dz \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_1^\infty z^{-1-q} f(z)\, dz + \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!(j-q)}. \end{aligned}$$

Bemerkung.

(a) Die Definition von $f^{(q)}(0)$ hängt für festes $q \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ nicht von der Wahl von $m > \operatorname{Re} q > -1$ ab.

(b) Ist $q \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ mit $\operatorname{Re} q \in (m-1, m)$, dann ist $f^{(q)}(0)$ gegeben durch

$$f^{(q)}(0) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^\infty z^{-1-q} \left(f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{z^j}{j!} f^{(j)}(0) \right) dz. \tag{9.7}$$

(c) Die Funktion $\Gamma(-q) f^{(q)}(0)$ ist für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ meromorph im Bereich $\{q \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} q < m\}$ mit einfachen Polen in den natürlichen Zahlen. Da $\Gamma(-q)$ ebenfalls eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen in den natürlichen Zahlen darstellt, besitzt $f^{(q)}(0)$ eine analytische Fortsetzung auf den gesamten Bereich $\{q \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} q > -1\}$.

(d) Nach (c) existiert für $k \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $\lim_{q \to k} f^{(q)}(0)$. Beachten wir, dass die ersten beiden Summanden in der Definition von $f^{(q)}(0)$ für $q \to k \in \mathbb{N}$ verschwinden, so folgt für $k \leq m-1$ aus $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für den letzten Summanden und damit für $\lim_{q \to k} f^{(q)}(0)$,

$$\lim_{q \to k} f^{(q)}(0) = (-1)^k f^{(k)}(0). \tag{9.8}$$

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts:

Satz 9.8 *Es seien $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq n-1$ und $K \in \mathcal{K}^n$ ein symmetrischer konvexer Körper mit $\rho(K, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $u \in S^{n-1}$ und k gerade,*

$$(\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-k-1})(u) = (-1)^{k/2}\pi(n-k-1)A_u^{(k)}(K,0). \tag{9.9}$$

Ist k ungerade, dann ist

$$(\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-k-1})(u) = (-1)^{(k+1)/2}2k!(n-k-1)\int_0^\infty \frac{A_u(K,z) - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{z^j}{j!}A_u^{(j)}(K,0)}{z^{k+1}}\,dz.$$

Bemerkung.

(a) Ist $\rho(K,\cdot)^{n-k-1}$ nicht integrierbar, so definieren wir $\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-k-1}$ durch das Integral mit schell fallenden Funktionen $g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ auf folgende Weise:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-k-1})(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\rho(K,x)^{n-k-1}(\mathrm{F}g)(x)\,dx.$$

Nach Korollar 9.3 definiert $\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-k-1}$ ein lineares Funktional auf $\mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Es sei $q \in (-1,\infty)$ mit $q \neq n-1$. Wir wollen zeigen, dass für $u \in S^{n-1}$,

$$A_u^{(q)}(K,0) = \frac{\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right)}{\pi(n-q-1)}(\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-q-1})(u). \tag{9.10}$$

Dazu sei zunächst $q \in (-1,0)$. Da K symmetrisch ist, gilt nach (9.5) und dem Satz von Fubini,

$$\begin{aligned}
A_u^{(q)}(K,0) &= \frac{1}{2\Gamma(-q)}\int_{-\infty}^{\infty}|z|^{-1-q}\int_{H_{u,z}}\mathbb{I}_{[0,1]}(\rho(K,x)^{-1})\,dx\,dz\\
&= \frac{1}{2\Gamma(-q)}\int_{\mathbb{R}^n}|x\cdot u|^{-1-q}\mathbb{I}_{[0,1]}(\rho(K,x)^{-1})\,dx\\
&= \frac{1}{2\Gamma(-q)}\int_{S^{n-1}}|u\cdot v|^{-1-q}\int_0^\infty r^{n-q-2}\mathbb{I}_{[0,1]}(r\rho(K,v)^{-1})\,dr\,d\sigma(v)\\
&= \frac{1}{2(n-q-1)\Gamma(-q)}\int_{S^{n-1}}|u\cdot v|^{-1-q}\rho(K,v)^{n-q-1}\,d\sigma(v).
\end{aligned}$$

Wir betrachten von nun an $A_u^{(q)}(K,0)$ als $-1-q$ homogene Funktion in $u \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Damit gilt für jede gerade Funktion $g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$, die Null nicht im Träger hat,

$$\int_{\mathbb{R}^n}A_u^{(q)}(K,0)g(u)du = \frac{1}{2(n-q-1)\Gamma(-q)}\int_{S^{n-1}}\rho(K,v)^{n-q-1}\int_{\mathbb{R}^n}|u\cdot v|^{-1-q}g(u)dud\sigma(v).$$

Nach dem Satz von Fubini, Satz 9.2 und (9.3) gilt weiters

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u\cdot v|^{-1-q}g(u)du = \int_{\mathbb{R}}|z|^{-1-q}\int_{H_{v,z}}g(u)\,du\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}|z|^{-1-q})(t)(\mathrm{F}g)(tv)\,dt.$$

Zur Berechnung von $(\mathrm{F}|z|^{-1-q})(t)$ verwenden wir die Darstellung

$$|z|^{-1-q} = \frac{2^{(1-q)/2}}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_0^\infty s^q e^{-(sz)^2/2}\, ds.$$

Damit gilt nach dem Satz von Fubini für gerades $h \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{F}|z|^{-1-q})(t) h(t)\, dt = \frac{2^{(1-q)/2}}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_0^\infty s^q \int_{\mathbb{R}} e^{-(sz)^2/2} (\mathrm{F}h)(z) dz\, ds.$$

Im Beweis von Satz 9.2 haben wir $(\mathrm{F}e^{-t^2/2})(z) = \sqrt{2\pi} e^{-z^2/2}$ gezeigt. Verwenden wir noch Satz 9.1 (b), so folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{F}|z|^{-1-q})(t) h(t)\, dt &= \frac{2^{(1-q)/2}}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_0^\infty s^q \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi} s^{-1} e^{-t^2/2s^2} h(t) dt\, ds. \\
&= \frac{2^{-q}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}} |t|^q h(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun noch die beiden Funktionalgleichungen

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{x}{\sin(\pi x)}$$

zur Vereinfachung der Konstante, so erhalten wir

$$(\mathrm{F}|z|^{-1-q})(t) = 2\Gamma(-q) \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) |t|^q.$$

Zusammenfassend ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A_u^{(q)}(K,0) g(u)\, du &= \frac{\cos\left(\frac{\pi q}{2}\right)}{\pi(n-q-1)} \int_{S^{n-1}} \rho(K,v)^{n-q-1} \int_0^\infty t^q (\mathrm{F}g)(tv)\, dt\, d\sigma(v) \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi q}{2}\right)}{\pi(n-q-1)} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-q-1})(u) g(u)\, du.
\end{aligned}$$

Da K symmetrisch und $\rho(K,\cdot)$ eine $\mathbf{C}^\infty$ Funktion ist, lässt sich zeigen, dass $\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-q-1}$ eine stetige Funktion auf S^{n-1} definiert (siehe [4, Lemma 3.16]). Aus Satz 9.7 folgt umgekehrt, dass auch $A_u^{(q)}(K,0)$ eine stetige Funktion auf S^{n-1} darstellt. Damit erhalten wir (9.10) für $q \in (-1,0)$. Da weiters $A_u^{(q)}(K,0)$ und $\mathrm{F}\rho(K,\cdot)^{n-q-1}$ analytische Funktionen für $\operatorname{Re} q > -1, q \neq n-1$ darstellen, folgt (9.10) für alle $q \in (-1,\infty), q \neq n-1$, durch analytische Fortsetzung.

Aus (9.8) und (9.10) folgt nun unmittelbar (9.9). Ist $q = k \in \mathbb{N}$ ungerade, so verschwinden nach (9.8) beide Seiten von (9.10), da $A_u(K,\cdot)$ eine gerade Funktion ist und daher alle ihre ungeraden Ableitungen an Null verschwinden. Division durch $\cos(\pi q/2)$ in (9.10) und die einfache Berechnung des Grenzwerts

$$\lim_{q\to k} \Gamma(-q) \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) = \lim_{q\to k} \frac{\Gamma(-q+k+1)}{-q(1-q)\cdots(k-q)} \sin\left(\frac{\pi(q-k)}{2}\right) (-1)^{(k+1)/2},$$

ergeben schließlich mit (9.7) die Aussage für ungerade $k \in \mathbb{N}$. ■

10 Das Busemann–Petty Problem

In diesem letzten Abschnitt verwenden wir die zuvor erhaltenen Formeln, die das Volumen von Schnitten eines symmetrischen konvexen Körpers durch die Fourier Transformation seiner Radialfunktion ausdrücken, um die Lösung eines Problems von H. Busemann und C. Petty zu präsentieren.

Das Problem von Busemann–Petty wurde zwar bereits im Jahr 1956 formuliert, die vollständige Lösung dieses berühmten Problems allerdings erst 1999 erzielt.

Problem von Busemann–Petty. Es seien $K, L \in \mathcal{K}^n$ symmetrische konvexe Körper mit nichtleerem Inneren. Ist der folgende Schluss zulässig:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^\perp) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp) \quad \forall\, u \in S^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad V(K) \leq V(L)? \tag{10.1}$$

Bemerkung.

(a) Da die sphärische Radon Transformation nicht injektiv ist, lässt sich eine zu Satz 8.1 analoge Aussage für Schnitte von Sternkörpern auf einfache Weise zeigen. Ist $L \in \mathcal{K}^n$ ein nicht symmetrischer *konvexer* Sternkörper, so kann ein ebenfalls konvexer symmetrischer Körper $K \in \mathcal{K}^n$ konstruiert werden, für den obiger Schluss falsch ist. Dies soll aber hier nicht näher ausgeführt werden.

Satz 6.6 und die Definition der sphärischen Radon Transformation zeigen, dass

$$\rho(\mathrm{I}L, \cdot) = \frac{1}{n-1}\, \mathrm{R}\rho(L, \cdot)^{n-1}$$

für $L \in \mathcal{S}^n$. Damit erhalten wir aus Proposition 7.20:

Proposition 10.1 *Die Abbildung* $\mathrm{I} : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ *ist injektiv auf symmetrischen Sternkörpern.*

Wie das Shephard Problem hat auch das Busemann–Petty Problem im Fall $n = 2$ eine positive Antwort:

Satz 10.2 *Das Problem von Busemann–Petty hat eine positive Antwort für* $n = 2$.

Beweis: Für einen symmetrischen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^2$ gilt

$$\mathrm{vol}_1(K \cap v) = 2\rho(K, v), \qquad v \in S^{n-1},$$

wobei $M \cap v$ den Schnitt von M mit dem von v aufgespannten 1-dimensionalen Unterraum bezeichnet. Es folgt daher

$$\mathrm{vol}_1(K \cap u^\perp) = \mathrm{vol}_1(K \cap \vartheta_{\frac{\pi}{2}} u) = 2\rho(K, \vartheta_{\frac{\pi}{2}} u), \qquad u \in S^{n-1}.$$

Die Voraussetzungen im Problem von Busemann–Petty implizieren damit $K \subseteq L$, womit insbesondere $V(K) \leq V(L)$ folgt. ■

Der nächste Schritt zur vollständigen Lösung des Busemann–Petty Problems ist der Beweis einer zu Satz 8.6 dualen Aussage:

Satz 10.3 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) Das Problem von Busemann–Petty hat eine positive Antwort.

(b) Jeder symmetrische konvexe Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ *Radialfunktion und positiver Krümmung ist ein Schnittkörper.*

Beweis: Wir nehmen zunächst an, K und L seien symmetrische konvexe Körper mit nichtleerem Inneren für die Implikation (10.1) nicht richtig ist. Dann gilt $\mathrm{I}K \subseteq \mathrm{I}L$, aber $V(K) > V(L)$. Da $\mathrm{I}K$ den Ursprung enthält und I homogen ist, können wir K mit einem passenden Faktor $\lambda < 1$ strecken, sodass noch $V(\lambda K) > V(L)$ und die Inklusion $\mathrm{I}(\lambda K) \subsetneq \mathrm{I}L$ strikt ist. Da die Abbildung I und das Volumen stetig sind, können wir nach Korollar 8.5 einen polynomiellen konvexen Körper K' mit positiver Krümmung finden, sodass $\mathrm{I}K' \subseteq \mathrm{I}L$ aber $V(K') > V(L)$. Da $h(K', \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(S^{n-1})$ und K' positive Krümmung besitzt, lässt sich zeigen, dass auch $\rho(K', \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(S^{n-1})$. Nach Satz 6.8 kann K' kein Schnittkörper sein.

Es sei nun L ein symmetrischer konvexer Körper mit einer $\mathbf{C}^\infty$ Radialfunktion und positiver Krümmung der kein Schnittkörper ist. Da L positive Krümmung besitzt, hat L nach Satz 5.7 innere Punkte. Es sei

$$\rho(L, \cdot) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \rho(L, \cdot)$$

die Fourierreihe von $\rho(L, \cdot)$. Wir zeigen zunächst, dass diese Reihe gleichmäßig gegen $\rho(L, \cdot)$ auf S^{n-1} konvergiert. Dazu genügt es offenbar zu zeigen, dass

$$\|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_\infty = \mathrm{O}(k^{-2}).$$

Ist $\pi_k \rho(L, \cdot) = a_1 H_1 + \cdots + a_{N(n,k)} H_{N(n,k)}$, wobei $H_1, \ldots, H_{N(n,k)}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_k^n$ ist, so folgt aus der Ungleichung von Cauchy–Schwarz, Satz 7.13 (a) und $P_k^n(1) = 1$ für alle $u \in S^{n-1}$,

$$|(\pi_k \rho(L, \cdot))(u)|^2 \leq \frac{N(n,k)}{\omega_n} P_k^n(1) \|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_2^2 = \frac{N(n,k)}{\omega_n} \|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_2^2,$$

also

$$\|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_\infty \leq \left(\frac{N(n,k)}{\omega_n}\right)^{1/2} \|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_2.$$

Aus Korollar 7.6 und der Formel von Stirling folgt

$$\left(\frac{N(n,k)}{\omega_n}\right)^{1/2} = \mathrm{O}(k^{(n-2)/2}).$$

Es bleibt also $\|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_2$ abzuschätzen. Dazu sei $m \geq 2$ eine beliebige gerade natürliche Zahl. Nach Satz 7.3 ist $\Delta_\mathrm{o} \pi_k \rho(L, \cdot) = -k(k+n-2)\pi_k \rho(L, \cdot)$. Anwendung dieser Relation $m/2$ mal und Satz 7.2 liefern daher

$$\|\pi_k \rho(L, \cdot)\|_2^2 = \langle \rho(L, \cdot), \pi_k \rho(L, \cdot) \rangle = \left(\frac{-1}{k(k+n-2)}\right)^{m/2} \langle \Delta_\mathrm{o}^{m/2} \rho(L, \cdot), \pi_k \rho(L, \cdot) \rangle.$$

Eine Anwendung der Ungleichung von Cauchy–Schwarz ergibt damit

$$\|\pi_k \rho(L,\cdot)\|_2 \leq \frac{1}{k^m} \|\pi_k \Delta_{\mathrm{o}}^{m/2} \rho(L,\cdot)\|_2.$$

Da außerdem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\pi_k \Delta_{\mathrm{o}}^{m/2} \rho(L,\cdot)\|_2^2 = \|\Delta_{\mathrm{o}}^{m/2} \rho(L,\cdot)\|_2^2 < \infty,$$

folgt schließlich

$$\|\pi_k \rho(L,\cdot)\|_2 = \mathrm{o}(k^{-m})$$

für beliebig große $m \in \mathbb{N}$, womit die Fourierreihe von $\rho(L,\cdot)$ gleichmäßig auf S^{n-1} gegen $\rho(L,\cdot)$ konvergiert.

Wir definieren nun

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n-1} \lambda_{2i}^n[\mathrm{R}]} \pi_{2i} \rho(L,\cdot),$$

wobei $\lambda_{2i}^n[\mathrm{R}] \neq 0$ die geraden Multiplikatoren der Radon Transformation sind. Da

$$|\lambda_k^n[\mathrm{R}]^{-1}| = \mathrm{O}(k^{(n-2)/2}),$$

folgt wie zuvor die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe auf S^{n-1} gegen eine stetige gerade Funktion $f \in \mathbf{C}(S^{n-1})$. Da $\rho(L,\cdot)$ gerade ist, folgt aus dem Satz von Funk–Hecke $\rho(L,\cdot) = \mathrm{R}f$. Die Funktion f muss dabei negative Werte annehmen, andernfalls ist L nach Satz 6.6 ein Schnittkörper. Es sei $F \in \mathbf{C}(S^{n-1})$ eine stetige nichtkonstante gerade Funktion, sodass

$$F(u) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } f(u) < 0, \\ = 0 & \text{für } f(u) \geq 0. \end{cases}$$

Geeignete Approximation von F nach Satz 7.8 zeigt die Existenz einer geraden nichtnegativen Funktion $G \in \mathcal{H}^n$ mit

$$\int_{S^{n-1}} f(u) G(u) \, d\sigma(u) < 0.$$

Da $G \in \mathcal{H}^n$ gerade ist, können wir ein gerades $H \in \mathcal{H}^n$ finden, mit

$$G = \frac{1}{n-1} \mathrm{R}\, H.$$

Da $\rho(L,\cdot)^{n-1} > 0$, können wir ein $\alpha > 0$ finden, sodass auch

$$\rho(L,\cdot)^{n-1} - \alpha H > 0.$$

Wir definieren nun einen symmetrischen Sternkörper $K \in \mathcal{S}^n$ durch

$$\rho(K,\cdot)^{n-1} = \rho(L,\cdot)^{n-1} - \alpha H.$$

Nach Definition konvergiert die Radialfunktion $\rho(K,\cdot)$ und alle ihre Ableitungen gleichmäßig gegen $\rho(L,\cdot)$, wenn α gegen Null geht. Es lässt sich nun zeigen, dass für hinreichend kleines $\alpha > 0$, der Körper K ebenfalls konvex ist.

Weiters gilt

$$\rho(\mathrm{I}K, \cdot) = \rho(\mathrm{I}L, \cdot) - \alpha G.$$

Da G nichtnegativ ist, gilt also $\mathrm{I}K \subseteq \mathrm{I}L$ bzw.

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^\perp) \leq \mathrm{vol}_{n-1}(L \cap u^\perp) \qquad \forall\, u \in S^{n-1}.$$

Die Definition dualer gemischter Volumina, $\rho(L, \cdot) = \mathrm{R}f$ und der Satz von Fubini liefern aber

$$\begin{aligned}\frac{n}{\alpha}(V(L) - \tilde{V}(K, \ldots, K, L)) &= \int_{S^{n-1}} (\mathrm{R}f)(u)H(u)\, d\sigma(u) = \int_{S^{n-1}} f(u)(\mathrm{R}H)(u)\, d\sigma(u) \\ &= (n-1)\int_{S^{n-1}} f(u)G(u)\, d\sigma(u) < 0,\end{aligned}$$

woraus mit Satz 4.3 folgt

$$V(K) > V(L).$$

■

Um nun zu klären in welchen Dimensionen die Menge der Schnittkörper dicht liegt in allen symmetrischen konvexen Körpern, verwenden wir den im letzten Kapitel hergestellten Zusammenhang zwischen der sphärischen Radon Transformation und der Fourier Transformation.

Satz 10.4 *Ein symmetrischer Sternkörper mit $\mathbf{C}^\infty$ Radialfunktion ist genau dann ein Schnittkörper, wenn die Fourier Transformation seiner Radialfunktion nicht negativ ist.*

Beweis: Es sei $K \in \mathcal{S}^n$ ein symmetrischer Sternkörper mit nichtleerem Inneren und $K = \mathrm{I}L$ für ein $L \in \mathcal{S}^n$. Nach Korollar 9.5 und der Definition von I gilt dann

$$\rho(K, \cdot) = \frac{1}{\pi(n-1)}\, \mathrm{F}\rho(L, \cdot)^{n-1}.$$

Da $\rho(K, \cdot) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ gerade ist, folgt aus Satz 9.2

$$\mathrm{F}\rho(K, \cdot) = \frac{(2\pi)^n}{\pi(n-1)}\, \rho(L, \cdot)^{n-1} > 0.$$

Die Existenz von $\mathrm{F}\rho(K, \cdot)$ folgt hier wieder wie im Beweis von Satz 9.8.
Ist umgekehrt die Fourier Transformation von $\rho(K, \cdot)$ eine positive Funktion auf S^{n-1}, so können wir einen symmetrischen Sternkörper L definieren durch

$$\rho(L, \cdot)^{n-1} = \frac{\pi(n-1)}{(2\pi)^n}\, \mathrm{F}\rho(K, \cdot).$$

Nach Korollar 9.5 und Satz 9.2 gilt dann $K = \mathrm{I}L$. ■

Als unmittelbare Folge von Satz 10.4 und Satz 9.8 (mit $k = n-2$) erhalten wir:

Korollar 10.5 *Ein symmetrischer Körper* $K \in \mathcal{K}^n$ *mit* $\mathbf{C}^\infty$ *Radialfunktion ist genau dann ein Schnittkörper, wenn für alle* $u \in S^{n-1}$,

$$(-1)^{(n-2)/2} A_u^{(n-2)}(K,0) \geq 0$$

für gerades $n \in \mathbb{N}$ *bzw.*

$$(-1)^{(n-1)/2} \int_0^\infty \frac{A_u(K,z) - A_u(K,0) - \cdots - A_u^{(n-3)}(K,0)\frac{z^{n-3}}{(n-3)!}}{z^{n-1}}\, dz \geq 0$$

für ungerades $n \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe von Korollar 10.5 sind wir nun in der Lage in den Dimensionen $n = 3, 4, 5$ zu entscheiden, ob jeder glatte symmetrische konvexe Körper ein Schnittkörper ist.

Satz 10.6 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Jeder symmetrische konvexe Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ *Radialfunktion im* $\mathbb{R}^3$ *und im* $\mathbb{R}^4$ *ist ein Schnittkörper.*

(b) Es gibt einen symmetrischen konvexen Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ *Radialfunktion und positiver Krümmung im* $\mathbb{R}^5$ *der kein Schnittkörper ist.*

Beweis: Zum Beweis von Aussage (a) sei zunächst $n = 3$ und K ein beliebiger symmetrischer konvexer Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ Radialfunktion. Nach Korollar 10.5 genügt es zu zeigen, dass

$$-\int_0^\infty \frac{A_u(K,z) - A_u(K,0)}{z^2}\, dz \geq 0.$$

Nun ist aber die Funktion $A_u(K,z)^{1/2}$ für jedes $u \in S^{n-1}$ nach Satz 9.6 eine gerade konkave Funktion auf ihrem Träger, woraus $A_u(K,z) \leq A_u(K,0)$ folgt.

Ist $n = 4$, so genügt es nach Korollar 10.5 zu zeigen, dass

$$-A_u''(K,0) \geq 0.$$

Dies folgt ebenfalls aus dem Umstand, dass $A_u(K,z)$ ein Maximum an Null annimmt.

Zum Beweis von Aussage (b) konstruieren wir einen symmetrischen konvexen Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ Radialfunktion im $\mathbb{R}^5$, sodass

$$\int_0^\infty \frac{A_u(K,z) - A_u(K,0) - A_u''(K,0)\frac{z^2}{2}}{z^4}\, dz < 0.$$

Dazu setzen wir

$$f(x) := (1 - x^2 - x^4)^{1/4}.$$

Die gerade Funktion f ist definiert auf dem Intervall $[-a, a]$, wobei

$$a := \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

und $f(\pm a) = 0$.

Die Funktion f hat ein Maximum an Null und es gilt

$$f''(x) = -\left(\frac{1}{2} + 3x^2\right)(1 - x^2 - x^4)^{-3/4} - 3\left(\frac{x}{2} + x^3\right)^2 (1 - x^2 - x^4)^{-7/4},$$

womit $f'' < 0$ und damit f strikt konkav ist auf $[-a, a]$. Wir definieren nun einen konvexen Rotationskörper $K \subseteq \mathbb{R}^5$ durch

$$K := \left\{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_5 \in [-a, a], \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_4^2} \leq f(x_5)\right\}.$$

Der symmetrische Körper K ist strikt konvex und besitzt eine $\mathbf{C}^\infty$ Radialfunktion. Für $-a \leq z \leq a$ und $u = (0, 0, 0, 0, 1)$ ist $K \cap H_{u,z}$ eine vier-dimensionale euklidische Kugel mit Radius $f(z)$. Daher gilt für $z \in [-a, a]$,

$$A_u(K, z) = \frac{\pi^2}{2} f(z)^4 = \frac{\pi^2}{2}(1 - z^2 - z^4).$$

Damit erhalten wir,

$$\int_0^\infty \frac{A_u(K, z) - A_u(K, 0) - A_u''(K, 0)\frac{z^2}{2}}{z^4}\, dz = -\frac{\pi^2}{2} a < 0.$$

Approximation von K durch symmetrische konvexe Körper mit $\mathbf{C}^\infty$ Radialfunktion und positiver Krümmung ergibt schließlich Aussage (b).

■

Bemerkung.

(a) Für $n \geq 6$ lässt sich mit Hilfe von Korollar 10.5 zeigen, dass für $q > 2$

$$B_q^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_q \leq 1\}$$

nicht im Abschluss der Klasse von Schnittkörpern liegt.

(b) Der Beweis von Satz 10.6 zeigt sehr deutlich, warum glatte symmetrische konvexe Körper bis zur Dimension $n = 4$ stets Schnittkörper sind:
Die Konkavität von $A_u(K, z)$ kontrolliert die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von $A_u(K, z)$ aber keine höheren Ableitungen.

Zusammenfassend erhalten wir damit als vollständige Lösung des Busemann–Petty Problems:

Korollar 10.7 *Das Problem von Busemann–Petty hat eine positive Antwort für* $n = 2, 3, 4$ *und eine negative Antwort für* $n \geq 5$.