Lie Algebren und Darstellungstheorie

WS+SS 2017/18

Franz Schuster

franz.schuster@tuwien.ac.at

Einleitung

Die Urspünge der Lie Theorie gehen auf Arbeiten von Sophus Lie zurück. Seine Untersuchungen von Lie Gruppen haben zur Entdeckung von Lie Algebren geführt, welche aber mittlerweile den Kern eines eigenständigen mathematischen Gebiets bilden. Der Themenkreis *Lie Algebren* zeichnet sich, als Fortsetzung der Linearen Algebra, durch seine zahlreichen Verbindungen zu verschiedenen Bereichen der Mathematik aus, wie etwa der Gruppentheorie, Differentialgeometrie, Topologie und der mathematischen Physik (nicht zuletzt aufgrund der sehr engen Beziehungen zur Theorie der Lie Gruppen).

Diese Vorlesung soll als Einführung in die Grundlagen der Theorie von Lie Algebren dienen. Dabei wird diese durchgehend als ein Teilgebiet der Linearen Algebra behandelt und die Verbindungen zu Lie Gruppen und Differentialgeometrie werden nur angedeutet. Dieser Zugang hat den Vorteil, dass als Vorkenntnisse ausschließlich die Grundvorlesungen zur Linearen Algebra I und II vorausgesetzt werden.

Wir werden genauer die Theorie einfacher und halbeinfacher endlich dimensionaler Lie Algebren über den komplexen Zahlen entwickeln mit Betonung des Bezugs zur Darstellungstheorie. Wir beginnen mit den grundlegenden Konzepten, wie Idealen und Homomorphismen, sowie nilpotenten und auflösbaren Lie Algebren. Nach diesen Vorbereitungen beginnen wir die Untersuchungen von einfachen und halbeinfachen Lie Algebren und beschäftigen uns speziell mit deren Darstellungen. In weiterer Folge befassen wir uns eingehend mit der Strukturtheorie komplexer halbeinfacher Lie Algebren, welche eine Schlüsselrolle für die Darstellungstheorie solcher Algebren darstellt. Diese behandeln wir in den abschließenden Kapiteln. Durchgehend werden wir die allgemeine Theorie an den wichtigsten praktischen Beispielen illustrieren.

Die Literatur zu Lie Algebren und Darstellungstheorie ist äußerst umfangreich. Insbesondere gibt es eine Reihe sehr guter Bücher zu diesem Themenkreis (siehe nächste Seite), welche aber häufig auch die Theorie von Lie Gruppen entwickeln und damit deutlich über den Stoffumfang dieser kurzen Vorlesung hinausgehen. Zwei empfehlenswerte Bücher (an die auch die Vorlesung angelehnt ist), welche sich ausschließlich mit Lie Algebren und deren Darstellungen befassen, sind „Introduction to Lie Algebras and Representation Theory“ von J.E. Humphreys und „Introduction to Lie Algebras“ von K. Erdmann und M.J. Wildon.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] K. Erdmann and M.J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2006.

[2] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer, 1991.

[3] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics 9, Springer, 1972.

[4] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 10, Interscience Publishers (John Wiley & Sons), 1962.

[5] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics 140, Birkhäuser, 1996.

1 Grundlegende Konzepte

In diesem ersten Abschnitt sammeln wir die wichtigsten Definitionen, grundlegende Aussagen sowie eine Reihe von Beispielen von Lie Algebren, auf die wir in weiterer Folge immer wieder zurückgreifen. Alle auftretenden Vektorräume seien (falls nicht anders angegeben) als *endlich dimensional* über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vorausgesetzt.

Wir erinnern zunächst an die Definition einer Algebra über $\mathbb{K}$:

Eine *Algebra* über dem Körper $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum A über $\mathbb{K}$ versehen mit einem bilinearen *Produkt*,

$$\cdot : A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Eine Algebra A heißt *assoziativ*, wenn $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in A$.

Beispiele.

(a) Für einen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathsf{gl}(V)$ den Vektorraum aller linearen Abbildungen von V in sich. Versehen mit der Abbildungskomposition, wird $\mathsf{gl}(V)$ zu einer assoziativen Algebra über $\mathbb{K}$.

(b) Es bezeichne $\mathsf{gl}(n, \mathbb{K})$ den Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Versehen mit dem gewöhnlichen Matrizenprodukt, wird $\mathsf{gl}(n, \mathbb{K})$ zu einer assoziativen Algebra über $\mathbb{K}$.

Vektorräume linearer Transformationen werden nicht nur als assoziative Algebren untersucht, sondern häufig auch mit einer anderen bilinearen Operation versehen, die im allgemeinen weder assoziativ noch kommutativ ist.

Definition. Eine *Lie Algebra* über dem Körper $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum L über $\mathbb{K}$ versehen mit einer bilinearen Operation, der *Lie Klammer*,

$$[\,] : L \times L \to L, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

die folgenden Bedingungen genügt:

(L1) $[x, x] = 0$ für alle $x \in L$,

(L2) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ für alle $x, y, z \in L$.

Ein Unterraum U einer Lie Algebra L heißt *Lie Unteralgebra* von L, wenn für alle $x, y \in U$ auch $[x, y] \in U$.

Bemerkungen.

(a) Eigenschaft (L2) wird oft als *Jacobi Identität* bezeichnet.

(b) Aus der Bilinearität der Lie Klammer und (L1) folgt für alle $x, y \in L$

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x],$$

womit

$$(\text{L1}') \quad [x, y] = -[y, x] \text{ für alle } x, y \in L.$$

Beispiele.

(a) Jeder Vektorraum V über $\mathbb{K}$ kann als Lie Algebra, mit Lie Klammer definiert durch $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in V$, aufgefasst werden. Lie Algebren mit trivialer Lie Klammer heißen *abelsch*.

(b) Das Kreuzprodukt $(x, y) \mapsto x \times y$ definiert eine Lie Klammer im $\mathbb{R}^3$.

(c) Ist L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$, dann ist die Lie Klammer von L vollständig durch die *Strukturkonstanten* a_{ij}^k, definiert durch

$$[b_i, b_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k b_k,$$

bestimmt. Man beachte, dass die a_{ij}^k von der Wahl einer Basis in L abhängen. Umgekehrt kann man durch Festlegung von Strukturkonstanten a_{ij}^k (abstrakte) Lie Algebren definieren. Die Bedingungen (L1) und (L2) sind äquivalent zu

$$a_{ii}^k = 0 = a_{ij}^k + a_{ji}^k,$$
$$\sum_k a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m = 0.$$

(d) Auf dem Vektorraum $\mathsf{gl}(V)$ aller linearen Abbildungen eines Vektorraums V in sich definieren wir eine Lie Klammer durch

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x, \qquad x, y \in \mathsf{gl}(V).$$

Auf diese Weise wird $\mathsf{gl}(V)$ zu einer Lie Algebra, genannt die *allgemeine lineare Algebra*. Um zwischen der assoziativen und der Lie Algebren Struktur auf $\mathsf{gl}(V)$ zu unterscheiden, bezeichnen wir die allgemeine lineare Algebra mit $\mathfrak{gl}(V)$.

(e) Auf dem Vektorraum $\mathsf{gl}(n, \mathbb{K})$ der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$ definieren wir eine Lie Klammer durch

$$[x, y] = xy - yx, \qquad x, y \in \mathsf{gl}(n, \mathbb{K}).$$

Auf diese Weise wird $\mathsf{gl}(n, \mathbb{K})$ zu einer Lie Algebra, die wir mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ bezeichnen. Die $n \times n$ Matrizen e_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, mit 1 in der (i, j)-Position und 0 sonst, bilden eine Basis von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ und es gilt

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}.$$

Die beiden letzten Beispiele erlauben sofort die folgende Verallgemeinerung, welche die enge Verbindung von assoziativen Algebren und Lie Algebren illustriert.

Proposition 1.1 *Ist A eine assoziative Algebra über $\mathbb{K}$, so definiert*

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x, \qquad x, y \in A,$$

eine Lie Klammer auf A.

Lie Algebren treten in der Mathematik hauptsächlich als Vektorräume linearer Transformationen auf. Dies führt zu folgender Begriffsbildung.

Definition. Jede Unteralgebra der allgemeinen linearen Algebra $\mathfrak{gl}(V)$ heißt eine *lineare Lie Algebra*.

Beispiele.

(a) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{sl}(V)$ (bzw. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$) den Unterraum von $\mathfrak{gl}(V)$ bestehend aus den Abbildungen mit Spur 0. Da für alle $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$

$$\operatorname{tr}(x \circ y) = \operatorname{tr}(y \circ x) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tr}(x + y) = \operatorname{tr} x + \operatorname{tr} y,$$

ist $\mathfrak{sl}(V)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, genannt die *spezielle lineare Algebra*. Die Dimension von $\mathfrak{sl}(V)$ ist $n^2 - 1$. Eine Basis von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ ist gegeben durch die Einheitsmatrizen e_{ij}, $i \neq j$, und $e_{ii} - e_{i+1,i+1}$, $1 \leq i < n$.

(b) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ versehen mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform (einem inneren Produkt) $\langle x, y\rangle$. Dann besitzt jede lineare Abbildung $B \in \mathfrak{gl}(V)$ eine adjungierte Abbildung $B^* \in \mathfrak{gl}(V)$ mit $\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle$ für alle $x, y \in V$.

Es bezeichne $\mathfrak{o}(V)$ (bzw. $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$) den Unterraum von $\mathfrak{gl}(V)$ aller Abbildungen mit $B^* = -B$. Für alle $B, C \in \mathfrak{o}(V)$ gilt

$$[B, C]^* = C^* \circ B^* - B^* \circ C^* = C \circ B - B \circ C = -[B, C],$$

womit $\mathfrak{o}(V)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist, genannt die *orthogonale Algebra*. Die Dimension von $\mathfrak{o}(V)$ ist $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(c) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ versehen mit einer nicht ausgearteten alternierenden Bilinearform $\langle x, y\rangle$. (Damit muss n gerade sein). Wir schreiben wieder $B^* \in \mathfrak{gl}(V)$ für die zu $B \in \mathfrak{gl}(V)$ adjungierte Abbildung bezüglich der gegebenen alternierenden Bilinearform.

Es bezeichne $\mathfrak{sp}(V)$ (bzw. $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$) die Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ aller linearen Abbildungen mit $B^* = -B$. Die lineare Lie Algebra $\mathfrak{sp}(V)$ heißt *symplektische Algebra*, ihre Dimension ist $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Beispiele (a) bis (c) heißen die *klassischen Algebren*.

(d) Es bezeichne $\mathfrak{d}(n,\mathbb{K})$ die Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ aller Diagonalmatrizen.

(e) Es bezeichne $\mathfrak{n}(n,\mathbb{K})$ die Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ aller strikten oberen Dreiecksmatrizen (a_{ij}), $a_{ij} = 0$ wenn $i \geq j$.

(f) Es bezeichne $\mathfrak{t}(n,\mathbb{K})$ die Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ aller oberen Dreiecksmatrizen (a_{ij}), $a_{ij} = 0$ wenn $i > j$.

Eine Reihe von Lie Algebren linearer Abbildungen treten in natürlicher Weise als Derivationsalgebren auf.

Definition. Es sei A eine Algebra über $\mathbb{K}$. Eine *Derivation* von A ist eine lineare Abbildung $D : A \to A$, sodass für alle $x, y \in A$

$$D(x \cdot y) = x \cdot D(y) + D(x) \cdot y.$$

Wir bezeichnen den Vektorraum aller Derivationen von A mit $\operatorname{Der} A$.

Beispiele.

(a) Es bezeichne $C^\infty(\mathbb{R})$ den Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Versehen mit der punktweisen Multiplikation von Funktionen wird $C^\infty(\mathbb{R})$ zu einer (assoziativen) Algebra. Die gewöhnliche Ableitung $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $Df = f'$, ist eine Derivation von $C^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Jedes Element $x \in L$ bestimmt eine lineare Abbildung $\operatorname{ad} x : L \to L$, durch

$$(\operatorname{ad} x)(y) = [x, y], \qquad y \in L.$$

Die lineare Abbildung $\operatorname{ad} x$ ist eine Derivation, denn aus der Jacobi Identität folgt für alle $y, z \in L$

$$(\operatorname{ad} x)[y, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [y, (\operatorname{ad} x)(z)] + [(\operatorname{ad} x)(y), z].$$

Derivationen der Form $\operatorname{ad} x$, $x \in L$, heißen *innere Derivationen.*

Der Vektorraum $\operatorname{Der} A$ ist offenbar ein Unterraum von $\mathfrak{gl}(A)$. Es gilt sogar:

Proposition 1.2 *Sind D und E Derivationen einer Algebra A, so ist auch*

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D$$

eine Derivation von A. Insbesondere, ist $\operatorname{Der} A$ *eine Unteralgebra von* $\mathfrak{gl}(A)$.

Beweis: Es gilt

$$DE(x \cdot y) = x \cdot DE(y) + D(x) \cdot E(y) + E(x) \cdot D(y) + DE(x) \cdot y.$$

Vertauschen der Rollen von D und E sowie Subtraktion liefert

$$[D, E](x \cdot y) = x \cdot [D, E](y) + [D, E](x) \cdot y.$$

■

Bemerkung.

(a) Sind D und E Derivationen einer Algebra A, so ist $D \circ E$ nicht notwendig eine Derivation.

Wir kommen nun zu einer wichtigen Verschärfung des Begriffs der Unteralgebra:

Definition. Ein Unterraum I einer Lie Algebra L heißt *Ideal* von L, wenn $[x, y] \in I$ für alle $x \in L$ und $y \in I$.

Bemerkungen.

(a) Da $[x, y] = -[y, x]$, brauchen wir zwischen rechts- und linksseitigen Idealen nicht zu unterscheiden.

(b) Jedes Ideal einer Lie Algebra L ist eine Unteralgebra von L.

Beispiele.

(a) Die *trivialen Ideale* einer Lie Algebra L sind $\{0\}$ und L selbst.

(b) Die spezielle lineare Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ ist ein Ideal der allgemeinen linearen Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

(c) Das *Zentrum* einer Lie Algebra L ist das Ideal definiert durch

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \text{ für alle } y \in L\}.$$

Die Lie Algebra L ist offenbar genau dann abelsch, wenn $Z(L) = L$.

(d) Ist L eine Lie Algebra, so bilden die inneren Derivationen ein Ideal in der Derivationsalgebra $\operatorname{Der} L$. Es gilt nämlich für $D \in \operatorname{Der} L$ und $x \in L$

$$[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} D(x).$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten aus vorhandenen Idealen einer Lie Algebra neue Ideale zu konstruieren:

Proposition 1.3 *Es seien I und J zwei Ideale einer Lie Algebra L. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- *Der Durchschnitt $I \cap J$ ist ein Ideal von L.*
- *Die Summe $I + J := \{x + y : x \in I, y \in J\}$ ist ein Ideal von L.*
- *Das Produkt $[I, J] := \operatorname{span}\{[x, y] : x \in I, y \in J\}$ ist ein Ideal von L.*
- *Der Faktorraum L/I, versehen mit der Lie Klammer*

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I, \qquad x, y \in L,$$

wird zu einer Lie Algebra, genannt die Faktoralgebra *von L nach I.*

Wir notieren folgenden wichtigen Spezialfall des Produkts von Idealen:

Definition. Ist L eine Lie Algebra, so heißt das Ideal $[L, L]$ die *abgeleitete Algebra* von L.

Beispiele.
Es gilt

$$[\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \qquad \text{und} \qquad [\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}),$$

sowie

$$[\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{o}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) \qquad \text{und} \qquad [\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}).$$

Insbesondere bestehen die klassischen Algebren aus Abbildungen mit Spur 0 und sind damit Unteralgebren der speziellen linearen Algebra.

Definition. Es seien K, L Lie Algebren über $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $\phi : K \to L$ heißt ein *Homomorphismus*, wenn für alle $x, y \in K$

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)].$$

Ist ϕ bijektiv, so nennen wir ϕ einen *Isomorphismus*.

Beispiele.

(a) Es sei L eine Lie Algebra. Ein besonders wichtiger Homomorphismus zwischen L und $\mathfrak{gl}(L)$ ist die *adjungierte Darstellung*

$$\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L), \quad x \mapsto \mathrm{ad}\, x.$$

Offenbar ist ad linear. Weiters gilt

$$\mathrm{ad}\,[x, y](z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z).$$

(b) Es sei I ein Ideal der Lie Algebra L. Die *kanonische Projektion*

$$\pi : L \to L/I, \quad x \mapsto x + I,$$

ist ein Homomorphismus zwischen L und der Faktoralgebra L/I.

In der Theorie der Lie Algebren stellen Ideale das Analogon zu normalen Untergruppen in der Gruppentheorie dar. Insbesondere gilt:

Proposition 1.4 *Es sei $\phi : K \to L$ ein Lie Algebren Homomorphismus. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- *Der Kern von ϕ, $\ker \phi$, ist ein Ideal von K.*
- *Das Bild von ϕ, $\mathrm{im}\, \phi$, ist eine Unteralgebra von L.*

Der Standard Homomorphiesatz für Lie Algebren hat folgende Form:

Satz 1.5 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- *Ist $\phi : K \to L$ ein Lie Algebren Homomorphismus, dann ist*

  $$K/\ker \phi \cong \mathrm{im}\, \phi.$$

  Ist $I \subseteq \ker \phi$ ein Ideal von K, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : K/I \to L$, sodass $\phi = \psi \circ \pi$.
- *Sind I und J Ideale einer Lie Algebra, dann ist $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$.*
- *Sind I und J Ideale einer Lie Algebra L und gilt $I \subseteq J$, dann ist J/I ein Ideal von L/I und $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.*

Beweis: Alle auftretenden Behauptungen sind für Vektorräume und deren Unterräume wohlbekannt. Da die kanonischen Projektionen von Lie Algebren auf ihre Faktoralgebren Homomorphismen sind, sind alle dabei auftretenden Vektorraum Isomorphismen auch Lie Algebren Isomorphismen. ∎

Beispiel.

Die Spurabbildung $\operatorname{tr} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist wegen

$$\operatorname{tr}[x, y] = \operatorname{tr} xy - \operatorname{tr} yx = 0 = [\operatorname{tr} x, \operatorname{tr} y]$$

ein Lie Algebren Homomorphismus zwischen der allgemeinen linearen Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ und der abelschen Lie Algebra $\mathbb{K}$. Offenbar ist tr surjektiv und es gilt

$$\ker \operatorname{tr} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}).$$

Damit ist nach dem Homomorphiesatz für Lie Algebren

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) / \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}.$$

Die Nebenklassen $x + \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ bestehen aus den $n \times n$ Matrizen mit Spur $\operatorname{tr} x$.

Unter den Homomorphismen einer (allgemeinen) Algebra spielen Automorphismen eine wesentliche Rolle.

Definition. Es sei A eine Algebra über $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $\phi : A \to A$ heißt ein *Automorphismus* von A, wenn ϕ bijektiv ist und

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y).$$

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Derivationen und Automorphismen einer Algebra A, der für das Studium der Gruppe der Automorphismen von A von besonderer Bedeutung ist: Ist D eine Derivation von A, so folgt auf einfache Weise durch Induktion die Regel von Leibniz

$$D^k(x \cdot y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i(x) \cdot D^{k-i}(y).$$

Darüberhinaus ist wohlbekannt, dass die Exponentialreihe

$$\exp D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

wegen $D \in \mathfrak{gl}(A)$ konvergiert und eine bijektive lineare Abbildung $\exp D : A \to A$ darstellt. Aus der Regel von Leibniz folgt aber auch

$$(\exp D)(x \cdot y) = (\exp D)(x) \cdot (\exp D)(y),$$

womit $\exp D$ ein Automorphismus von A ist.

Bemerkung.

(a) Die Lie Algebra $\operatorname{Der} A$ ist die zur Lie Gruppe der Automorphismen von A gehörende Lie Algebra.

Ein gemeinsames Ziel verschiedener mathematischer Disziplinen ist es (interessante) Objekte vorgegebenen Typs, wie Vektorräume, Gruppen, Lie Algebren, etc., zu klassifizieren. Dabei möchte man zwischen isomorphen Objekten (im Wesentlichen) nicht unterscheiden.

Um ein Gefühl für die Problemstellung der Klassifikation von Lie Algebren zu bekommen, bestimmen wir im Folgenden (bis auf Isomorphie) alle komplexen Lie Algebren der Dimensionen 1, 2 und 3.

Aus der Antisymmetrie und der Bilinearität der Lie Klammer folgt zunächst, dass alle 1-dimensionalen Lie Algebren abelsch sind. Abelsche Lie Algebren sind ganz allgemein sehr einfach zu verstehen: *Zu jeder Dimension $n \in \mathbb{N}$, gibt es bis auf Isomorphie genau eine abelsche Lie Algebra über $\mathbb{K}$.*

Die ersten nicht abelschen Lie Algebren findet man in der Dimension 2.

Satz 1.6 *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine 2-dimensionale nicht abelsche Lie Algebra über $\mathbb{K}$.*

Beweis: Es sei L eine nicht abelsche Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und $\{u, v\}$ eine Basis von L. Da die von L abgeleitete Algebra $[L, L]$ von $[u, v]$ aufgespannt wird ist $\dim[L, L] = 1$. Es sei $x \in [L, L]$ ein von Null verschiedenes Element und $\{x, z\}$ eine Basis von L. Da L nicht abelsch ist, gibt es ein von Null verschiedenes $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $[x, z] = \lambda x$. Ersetzen wir daher z durch $y = \lambda^{-1} z$, so gilt für die Basis $\{x, y\}$ nun $[x, y] = x$. Es ist leicht zu sehen, dass durch diese Festsetzung eine Lie Klammer auf L definiert wird. Wir haben also gezeigt, dass jede nicht abelsche 2-dimensionale Lie Algebra eine Basis $\{x, y\}$ besitzt, sodass die Lie Klammer auf L die Relation $[x, y] = x$ erfüllt. ■

Wir kommen nun zur Klassifikation aller Lie Algebren der Dimension 3. Hier wird sich ein deutlich komplizierteres Bild ergeben. Wir werden uns daher nur noch auf Lie Algebren über $\mathbb{C}$ beschränken. Wie im 2-dimensionalen organisieren wir unsere Suche basierend auf Eigenschaften der abgeleiteten Algebra. Da wir uns nur noch für nicht abelsche Lie Algebren interessieren, wissen wir, dass die Dimension der abgeleiteten Algebra einer 3-dimensionalen Lie Algebra gleich 1, 2 oder 3 sein muss. Das folgende Resultat beschreibt alle 3-dimensionalen Lie Algebren deren abgeleitete Algebra 1-dimensional ist:

Satz 1.7 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine 3-dimensionale Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ mit $\dim[L, L] = 1$ und $[L, L] \subseteq Z(L)$.*
- *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine 3-dimensionale Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ mit $\dim[L, L] = 1$ und $[L, L] \not\subseteq Z(L)$.*

Beweis: Es sei zunächst $[L, L] \subseteq Z(L)$ und $[L, L] = \operatorname{span}\{z\}$. Ist $\{x, y, z\}$ eine Basis von L, so folgt aus $[L, L] \subseteq Z(L)$

$$[x, y] = \lambda z, \qquad [x, z] = 0, \qquad [y, z] = 0 \tag{1.1}$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ ungleich Null. Wir können o.B.d.A. $\lambda = 1$ annehmen. Damit haben wir gezeigt, dass L eine Basis besitzt, sodass die Lie Klammer auf L die Relationen aus (1.1) erfüllt. Offenbar gibt es bis auf Isomorphie nur eine solche Lie Algebra.

Es sei nun $[L, L] \not\subseteq Z(L)$ und $[L, L] = \operatorname{span}\{x\}$. Da L nicht abelsch ist, gibt es ein $y \in L$ mit $[x, y] \neq 0$. Da weiters $[L, L] = \operatorname{span}\{x\}$ können wir o.B.d.A. $[x, y] = x$ annehmen. Es sei nun $\{x, y, w\}$ eine Basis von L. Dann gilt

$$[x, w] = \alpha x \qquad \text{und} \qquad [y, w] = \beta x$$

für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Es sei nun $z = \lambda x + \mu y + \nu w \in L$ ein beliebiges Element, dann gilt

$$\begin{aligned} [x, z] &= \mu x + \nu \alpha x \\ [y, z] &= -\lambda x + \nu \beta x. \end{aligned}$$

Setzen wir daher $\lambda = \beta$, $\mu = -\alpha$ und $\nu = 1$, dann ist $\{x, y, z\}$ eine Basis von L mit

$$[x, y] = x, \qquad [x, z] = 0, \qquad [y, z] = 0.$$

Offenbar gibt es bis auf Isomorphie nur eine solche Lie Algebra. ■

Bemerkung.

(a) Es seien K und L Lie Algebren über $\mathbb{K}$. Auf der direkten Summe $K \oplus L$ der Vektorräume K und L ist durch

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]), \qquad x_i \in K, y_i \in L,$$

eine Lie Klammer definiert. Die so erhaltene Lie Algebra $K \oplus L$ heißt die *direkte Summe* der Lie Algebren K und L.

Wir haben im Beweis von Satz 1.7 gezeigt, dass (bis auf Isomorphie) die einzige 3-dimensionale Lie Algebra L mit $\dim[L, L] = 1$ und $[L, L] \not\subseteq Z(L)$ durch die direkte Summe der nicht abelschen 2-dimensionalen Lie Algebra mit der 1-dimensionalen Lie Algebra gegeben ist.

Das nächste Resultat illustriert, warum die Klassifikation der 3-dimensionalen Lie Algebren deutlich komplizierter ist, als jene der Dimensionen 1 und 2.

Satz 1.8 *Es gibt unendlich viele nicht isomorphe 3-dimensionale Lie Algebren über* $\mathbb{C}$ *mit* $\dim[L, L] = 2$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $[L, L]$ abelsch ist. Dazu sei $\{y, z\}$ eine Basis von $[L, L]$. Da $[y, z] \in [L, L]$ gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit

$$[y, z] = \alpha y + \beta z.$$

Es sei $x \in L$ so gewählt, dass $\{x, y, z\}$ eine Basis von L wird. Durch Betrachtung der Koeffizientenmatrizen von $\operatorname{ad} y$ und $\operatorname{ad} z$ bezüglich dieser Basis sieht man, dass

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \beta \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z) = -\alpha.$$

Da jedes Element von $[L, L]$ eine Linearkombination von Elementen der Form $[u, v]$, $u, v \in L$, ist, folgt aber aus

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad}[u, v]) = \operatorname{tr}[\operatorname{ad} u, \operatorname{ad} v] = 0$$

andererseits $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} z) = 0$, also $\alpha = \beta = 0$. Damit ist $[y, z] = 0$ und $[L, L]$ abelsch. Insbesondere wird $[L, L]$ also durch $\{[x, y], [x, z]\}$ aufgespannt. Das bedeutet aber, dass die Abbildung $\operatorname{ad} x : [L, L] \to [L, L]$ ein Isomorphismus ist.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(i) Für alle $x \notin [L,L]$ ist die Abbildung $\operatorname{ad} x : [L,L] \to [L,L]$ nicht diagonalisierbar. Dann sei $x \notin [L,L]$ beliebig. Die Abbildung $\operatorname{ad} x : [L,L] \to [L,L]$ hat sicher einen Eigenvektor, etwa $y \in [L,L]$. Der zugehörige Eigenwert ist nach dem ersten Teil des Beweises von Null verschieden. Wir können daher nach Skalierung $[x,y] = y$ annehmen. Wir ergänzen nun y zu einer Basis von $[L,L]$, etwa $\{y,z\}$. Da $\operatorname{ad} x$ nicht diagonalisierbar ist, folgt $[x,z] = \lambda y + \mu z$ mit $\lambda \neq 0$. Durch Skalierung von z können wir wieder $\lambda = 1$ annehmen. Dann ist die Matrix von $\operatorname{ad} x : [L,L] \to [L,L]$ bezüglich der Basis $\{y,z\}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{ad} x$ nicht diagonalisierbar ist, muss auch $\mu = 1$ sein. Wir haben daher Basisvektoren $x,y,z \in L$ gefunden, die folgende Relationen erfüllen

$$[y,z] = 0, \qquad [x,y] = y, \qquad [x,z] = y + z.$$

Man zeigt leicht, dass dies bis auf Isomorphie genau eine Lie Algebra definiert.

(ii) Es gibt ein $x \notin [L,L]$, sodass $\operatorname{ad} x : [L,L] \to [L,L]$ diagonalisierbar ist. Dann sei $\{y,z\}$ eine Basis von $[L,L]$ bestehend aus Eigenvektoren von $\operatorname{ad} x$. Die zugehörigen Eigenwerte sind nach dem ersten Teil des Beweises von Null verschieden. Durch Skalierung von x können wir daher $[x,y] = y$ annehmen. Es gibt daher ein von Null verschiedenes $\mu \in \mathbb{C}$, sodass die Matrix von $\operatorname{ad} x : [L,L] \to [L,L]$ bezüglich der Basis $\{y,z\}$ folgende Form hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Wir haben daher Basisvektoren $x,y,z \in L$ gefunden, die folgende Relationen erfüllen

$$[y,z] = 0, \qquad [x,y] = y, \qquad [x,z] = \mu z.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass jede Wahl von $\mu \neq 0$ eine Lie Algebra L_μ definiert mit $\dim[L,L] = 2$. Es bleibt zu zeigen, dass es unendlich viele nicht isomorpher solcher Lie Algebren gibt. Dazu beweisen wir, dass L_μ und L_ν genau dann isomorph sind, wenn $\mu = \nu$ oder $\mu\nu = 1$ gilt. Es sei zunächst $\mu = \nu^{-1}$ und $\{x_1, y_1, z_1\}$ eine Basis von L_μ, sodass $\operatorname{ad} x_1$ durch die Matrix (1.2) auf $[L_\mu, L_\mu]$ wirkt. Analog seien $x_2, y_2, z_2 \in L_{\mu^{-1}}$ definiert. Dann ist die Matrix von $\mu^{-1}\operatorname{ad} x_1$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

welche mit der Matrix von $\operatorname{ad} x_2 : [L_{\mu^{-1}}, L_{\mu^{-1}}] \to [L_{\mu^{-1}}, L_{\mu^{-1}}]$ bis auf Vertauschen der Zeilen und Spalten übereinstimmt. Es ist daher leicht nachzuprüfen, dass durch die Festlegung

$$\phi(\mu^{-1}x_1) = x_2, \qquad \phi(y_1) = z_2, \qquad \phi(z_1) = y_2$$

ein Isomorphismus $\phi : L_\mu \to L_{\mu^{-1}}$ definiert wird. Es sei nun umgekehrt $\phi : L_\mu \to L_\nu$ ein Isomorphismus. Es ist leicht zu sehen, dass die Einschränkung von ϕ auf $[L_\mu, L_\mu]$

einen Isomorphismus zwischen $[L_\mu, L_\mu]$ und $[L_\nu, L_\nu]$ definiert. Da ϕ surjektiv ist, folgt $\phi(x_1) = \alpha x_2 + w$ für ein von Null verschiedenes $\alpha \in \mathbb{C}$ und ein $w \in [L_\nu, L_\nu]$. Ist daher $v \in [L_\mu, L_\mu]$, so gilt einerseits

$$[\phi(x_1), \phi(v)] = \phi([x_1, v]) = (\phi \circ \operatorname{ad} x_1)(v)$$

und andererseits

$$[\phi(x_1), \phi(v)] = [\alpha x_2 + w, \phi(v)] = \alpha(\operatorname{ad} x_2 \circ \phi)(v).$$

Daraus folgt auf $[L_\mu, L_\mu]$

$$\phi \circ \operatorname{ad} x_1 = \operatorname{ad}(\alpha x_2) \circ \phi.$$

Die linearen Abbildungen $\operatorname{ad} x_1 : [L_\mu, L_\mu] \to [L_\mu, L_\mu]$, $\operatorname{ad}(\alpha x_2) : [L_\nu, L_\nu] \to [L_\nu, L_\nu]$ sind also ähnlich. Insbesondere besitzen sie damit dieselben Eigenwerte, womit $\{1, \mu\} = \{\alpha, \alpha\nu\}$. Es gilt daher entweder $\mu = \nu$ oder $\alpha = \mu$ und $\mu\nu = 1$. ∎

Es bleibt noch der Fall einer 3-dimensionalen abgeleiteten Algebra.

Satz 1.9 *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine 3-dimensionale Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ mit $\dim[L, L] = 3$, nämlich $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

Beweis: Es sei $x \in L$ von Null verschieden und $\{x, y, z\}$ eine Basis von L. Da $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$ eine Basis von $[L, L]$ bildet, ist der Rang von $\operatorname{ad} x$ gleich 2. Wir wollen nun ein Element $u \in L$ finden, sodass $\operatorname{ad} u$ einen von Null verschiedenen Eigenvektor hat. Ist x bereits so ein Element, sind wir fertig. Hat $\operatorname{ad} x : L \to L$ keinen von Null verschiedenen Eigenwert, dann ist die Jordan Normalform der Matrix von $\operatorname{ad} x$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gibt es eine Basis von L der Form $\{x, u, v\}$, sodass $[x, u] = x$ und $[x, v] = u$. Das bedeutet aber $\operatorname{ad} u$ hat einen Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Nach dem bisher gezeigten gibt es von Null verschiedene Vektoren $x, u \in L$ mit $[u, x] = \alpha x \neq 0$. O.B.d.A. können wir $\alpha = 2$ annehmen. Da $u \in L$ und $L = [L, L]$, folgt wie im Beweis von Satz 1.8, dass $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} u) = 0$. Damit muss aber $\operatorname{ad} u$ die drei verschiedenen Eigenwerte $-2, 0$ und 2 besitzen. Ist v ein Eigenvektor von u zum Eigenwert -2, so ist $\{x, u, v\}$ eine Basis von L in der $\operatorname{ad} u$ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

Es bleibt $[x, v]$ zu bestimmen. Dazu bemerken wir zunächst

$$[u, [x, v]] = [[u, x], v] + [x, [u, v]] = 2[x, v] - 2[x, v] = 0.$$

Da $\ker(\operatorname{ad} u) = \operatorname{span}\{u\}$, ist $[x, v] = \lambda u$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Da der Kern von $\operatorname{ad} x$ ebenfalls 1-dimensional ist, folgt $\lambda \neq 0$. Durch Skalierung können wir daher $\lambda = 1$ annehmen. Damit haben wir nun eine Basis $\{x, u, v\}$ von L gefunden mit

$$[u, x] = 2x, \qquad [u, v] = -2v, \qquad [x, v] = u.$$

Diese Relationen stimmen mit den entsprechenden Lie Klammern der Standardbasisvektoren in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ überein. ∎

Bemerkung.

(a) Bis auf Isomorphie gibt es genau *zwei* 3-dimensionale Lie Algebren L über $\mathbb{R}$ mit $\dim[L,L]=3$, nämlich $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Kreuzprodukt.

Bedenkt man den engen Zusammenhang zwischen Homomorphismen und Idealen von Lie Algebren, so ist es nicht überraschend, dass Lie Algebren durch das Studium ihrer Idealstruktur klassifiziert werden können. Es liegt daher Nahe, zunächst Lie Algebren mit besonders einfacher Idealstruktur zu betrachten.

Definition. Eine Lie Algebra L heißt *einfach*, wenn L nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und L besitzt und nicht abelsch ist.

Bemerkungen.

(a) Die Forderung, dass eine einfache Lie Algebra nicht abelsch sein darf, dient nur zum Ausschluß der 1-dimensionalen (abelschen) Lie Algebra. Ohne diese Bedingung wäre diese einfach aber nicht halbeinfach (siehe Abschnitt 2).

(b) Ist L eine einfache Lie Algebra, so gilt $Z(L)=\{0\}$ und $[L,L]=L$.

Beispiel.
Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ ist einfach.

Beweis: Die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ ist gegeben durch

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Die Lie Klammer auf $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ ist vollständig bestimmt durch die Relationen

$$[x,y]=z,\quad [x,z]=-2x,\quad [y,z]=2y.$$

Es sei nun I ein von Null verschiedenes Ideal von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ und $w=\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z$ ein von Null verschiedenes Element in I. Dann gilt

$$[x,[x,w]]=-2\lambda_2 x \qquad \text{und} \qquad [y,[y,w]]=-2\lambda_1 y.$$

Ist daher λ_1 oder λ_2 ungleich Null, dann enthält I entweder x oder y, woraus sofort $I=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ folgt. Sind aber $\lambda_1=\lambda_2=0$, so ist $z\in I$ und es folgt wieder $I=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$. ■

Mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln können wir bereits zeigen:

Satz 1.10 *Jede einfache Lie Algebra ist isomorph zu einer linearen Lie Algebra.*

Beweis: Es sei L eine einfache Lie Algebra. Für den Kern der adjungierten Darstellung $\mathrm{ad}: L\to\mathfrak{gl}(L)$ gilt

$$\ker \mathrm{ad}=\{x\in L:[x,y]=0 \text{ für alle } y\in L\}=Z(L).$$

Da L einfach ist, folgt $Z(L)=\{0\}$ und damit die Injektivität von ad. ■

Da abelsche Lie Algebren sehr einfach zu verstehen sind, stellt sich die Frage wie „Nahe“ eine allgemeine Lie Algebra an einer abelschen ist. Ein erstes Resultat in diese Richtung stellt die folgende Aussage dar:

Proposition 1.11 *Es sei I ein Ideal der Lie Algebra L. Die Faktoralgebra L/I ist genau dann abelsch, wenn I die abgeleitete Algebra $[L, L]$ von L enthält.*

Beweis: Die Faktoralgebra L/I ist genau dann abelsch, wenn für alle $x, y \in L$ gilt

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I = I,$$

oder äquivalent dazu, dass $[x, y] \in I$ für alle $x, y \in L$. Da I als Ideal eine Unteralgebra ist, gilt dies genau dann, wenn $[L, L] \subseteq I$. ■

Die abgeleitete Algebra $[L, L]$ einer Lie Algebra L ist also das kleinste Ideal von L mit abelschem Quotienten. Natürlich besitzt auch $[L, L]$ wieder ein kleinstes Ideal mit abelschem Quotienten, usw. Dies führt zu folgender wichtigen Begriffsbildung:

Definition. Es sei L eine Lie Algebra. Die *abgeleitete Reihe* von L ist die Folge der Ideale von L definiert durch

$$L^{(0)} = L \qquad \text{und} \qquad L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}],\ k \geq 1.$$

Die Lie Algebra L heißt *auflösbar*, wenn $L^{(m)} = \{0\}$ für ein $m \geq 1$ gilt.

Bemerkungen.

(a) Die abgeleitete Reihe einer Lie Algebra L bildet eine abfallende Folge von Idealen in L, d.h.
$$L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots$$

(b) Offenbar ist jede abelsche Lie Algebra auflösbar, während die einfachen Lie Algebren nicht auflösbar sind.

Beispiele.

(a) Die Lie Algebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ ist auflösbar.

Beweis: Bezeichnet e_{ij} eine Basismatrix, so nennen wir $j - i$ das Level von e_{ij}. Da $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) = \operatorname{span}\{e_{ij} : i < j\}$, wird $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ also durch die Basismatrizen deren Level ≥ 1 ist aufgespannt. Für $i < j$, $k < l$ und (o.B.d.A.) $i \neq l$ gilt

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il}.$$

Daher wird $[\mathfrak{n}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})]$ von Basismatrizen mit Level ≥ 2 aufgespannt. Durch Induktion folgt, dass $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})^{(m)}$ von den Basismatrizen mit Level $\geq 2^m$ aufgespannt wird. Damit ist $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})^{(m)} = \{0\}$ für $2^m > n - 1$. ■

(b) Die Lie Algebra der oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ ist auflösbar.

Beweis: Die Lie Algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ ist die Summe der Lie Algebra $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ mit der abelschen Lie Algebra $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$. Da $[\mathfrak{d}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$, folgt $[\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{t}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$. ■

Wie das folgende Resultat zeigt, bildet die abgeleitete Reihe, die am schnellsten abfallende Folge von Idealen deren sukzessive Quotienten abelsch sind.

Proposition 1.12 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Besitzt L eine abfallende Folge von Idealen*

$$L \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_{m-1} \supseteq I_m = \{0\},$$

sodass I_{k-1}/I_k abelsch ist für $1 \leq k \leq m$, dann ist L auflösbar.

Beweis: Wir beweisen mittels Induktion, dass $L^{(k)} \subseteq I_k$ für $1 \leq k \leq m$. Da L/I_1 abelsch ist, folgt aus Proposition 1.11, dass $[L, L] \subseteq I_1$. Wir nehmen nun an, dass $L^{(k-1)} \subseteq I_{k-1}$, $k \geq 1$ gilt. Da die Lie Algebra I_{k-1}/I_k abelsch ist, folgt wieder aus Proposition 1.11, dass $[I_{k-1}, I_{k-1}] \subseteq I_k$. Nach Induktionsannahme ist $L^{(k-1)} \subseteq I_{k-1}$ und damit

$$L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \subseteq [I_{k-1}, I_{k-1}] \subseteq I_k.$$

■

Die Eigenschaft einer Lie Algebra auflösbar zu sein, vererbt sich unter einer Reihe von Konstruktionen.

Satz 1.13 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Ist L auflösbar, dann ist auch jede Unteralgebra von L und jedes homomorphe Bild von L auflösbar.

(ii) Ist I ein auflösbares Ideal von L, sodass L/I auflösbar ist, dann ist auch L selbst auflösbar.

(iii) Sind I und J auflösbare Ideale von L, dann ist auch $I + J$ ein auflösbares Ideal.

Beweis: (i) Ist U eine Unteralgebra von L, dann ist $U^{(k)} \subseteq L^{(k)}$ für alle $k \geq 0$. Gilt daher $L^{(m)} = \{0\}$ so folgt auch $U^{(m)} = \{0\}$. Es sei nun $\phi : L \to K$ ein Lie Algebren Homomorphismus. Wir können annehmen, dass ϕ surjektiv ist. Durch Induktion zeigt man leicht, dass dann $\phi(L^{(k)}) = K^{(k)}$ für alle $k \geq 0$.

(ii) Ist L/I auflösbar, so gilt $(L/I)^{(k)} = \{0\}$ für geeignetes $k \geq 1$. Bezeichnet $\pi : L \to L/I$ den kanonischen Homomorphismus, so folgt aus Teil (i) des Beweises $\pi(L^{(k)}) = (L/I)^{(k)} = \{0\}$ also $L^{(k)} \subseteq I$. Da auch I auflösbar ist, gibt es ein $m \geq 1$ mit $I^{(m)} = \{0\}$ und damit $(L^{(k)})^{(m)} = L^{(k+m)} \subseteq I^{(m)} = \{0\}$.

(iii) Nach dem Homomorphiesatz gilt $(I + J)/I \cong J/(I \cap J)$. Als homomorphes Bild von J ist $J/(I \cap J)$ nach (i) und damit $(I + J)/I$ auflösbar. Damit ist nach (ii) auch $I + J$ auflösbar. ■

Wir notieren das folgende wichtige Korollar zu Satz 1.13:

Korollar 1.14 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes auflösbares Ideal* $\operatorname{rad} L$ *von L, genannt das* Radikal *von L, welches alle auflösbaren Ideale von L enthält.*

Beweis: Es sei R ein auflösbares Ideal von L, das in keinem anderen auflösbaren Ideal von L enthalten ist. Ist nun I ein beliebiges auflösbares Ideal von L, so ist nach Satz 1.13 auch $R+I$ ein auflösbares Ideal. Da $R \subseteq R+I$ folgt $R = R+I$ und damit $I \subseteq R$. ∎

Radikale von Lie Algebren spielen eine wesentliche Rolle bei deren Klassifikation. Sie führen unmittelbar zu folgender Begriffsbildung:

Definition. Eine Lie Algebra L heißt *halbeinfach*, wenn $\operatorname{rad} L = \{0\}$ (also L keine von Null verschiedenen auflösbaren Ideale besitzt).

Beispiele.

(a) Jede einfache Lie Algebra ist halbeinfach.

Beweis: Ist L eine einfache Lie Algebra, so besitzt L nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und L. Da L nicht auflösbar ist, folgt $\operatorname{rad} L = \{0\}$. ∎

(b) Ist L eine beliebige Lie Algebra, so ist $L/\operatorname{rad} L$ halbeinfach.

Beweis: Es sei $\bar{I}$ ein auflösbares Ideal der Faktoralgebra $L/\operatorname{rad} L$. Dann ist $I = \{x \in L : x + \operatorname{rad} L \in \bar{I}\}$ ein Ideal von L mit $\operatorname{rad} L \subseteq I$ und $I/\operatorname{rad} L = \bar{I}$. Nach Satz 1.13 ist I auflösbar und damit $I = \operatorname{rad} L$, also $\bar{I} = \{0\}$. ∎

Bemerkung.

(a) Eine Lie Algebra L ist genau dann halbeinfach, wenn L keine von Null verschiedenen abelschen Ideale enthält.

Beweis: Ist I ein von Null verschiedenes auflösbares Ideal der Lie Algebra L mit $I^{(m-1)} \neq \{0\}$ und $I^{(m)} = \{0\}$, dann ist $I^{(m-1)}$ ein von Null verschiedenes abelsches Ideal von L. Dieser Schluss ist umkehrbar. ∎

(b) Da das Radikal $\operatorname{rad} L$ einer Lie Algebra L auflösbar und $L/\operatorname{rad} L$ halbeinfach ist, müssen wir zur Beschreibung aller Lie Algebren also zunächst beliebige auflösbare und beliebige halbeinfache Lie Algebren verstehen.

Wir kommen nun zur letzten wichtigen Definition dieses ersten Abschnitts.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra. Die *absteigende Zentralreihe* von L ist die abfallende Folge der Ideale von L definiert durch

$$L^0 = L \qquad \text{und} \qquad L^k = [L, L^{k-1}],\ k \geq 1.$$

Die Lie Algebra L heißt *nilpotent*, wenn $L^m = \{0\}$ für ein $m \geq 1$ gilt.

Beispiele.

(a) Jede abelsche Lie Algebra ist nilpotent.

(b) Die Lie Algebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ ist nilpotent.

Beweis: Durch Induktion zeigt man $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})^m = \operatorname{span}\{e_{ij} : j - i \geq m+1\}$. ∎

Bemerkungen.

(a) Jede nilpotente Lie Algebra L ist auflösbar.

Beweis: Durch Induktion zeigt man leicht $L^{(m)} \subseteq L^m$. ■

(b) Die Lie Algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ ist auflösbar aber *nicht* nilpotent.

Beweis: Aus $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{d}(n, \mathbb{K}) + \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ folgt $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})^m = \mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$, $m \geq 1$. ■

(c) Ist L eine von Null verschiedene nilpotente Lie Algebra, so gilt $Z(L) \neq \{0\}$.

Beweis: Ist $L^{m-1} \neq \{0\}$ und $L^m = \{0\}$, dann ist $L^{m-1} \subseteq Z(L)$. ■

(d) Eine Lie Algebra L ist genau dann nilpotent, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $x_1, \dots, x_m \in L$

$$\operatorname{ad} x_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} x_m = 0.$$

Insbesondere ist $(\operatorname{ad} x)^m = 0$ für alle $x \in L$. Wir nennen ein Element $x \in L$ *ad-nilpotent*, wenn die lineare Abbildung $\operatorname{ad} x : L \to L$ nilpotent ist. In einer nilpotenten Lie Algebra sind also *alle* Elemente ad-nilpotent. Die Umkehrung dieser Aussage ist als Satz von Engel bekannt.

Das Analogon zu Satz 1.13 für nilpotente Lie Algebren ist das folgende Resultat:

Satz 1.15 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Ist L nilpotent, dann ist auch jede Unteralgebra von L und jedes homomorphe Bild von L nilpotent.

(ii) Ist $L/Z(L)$ nilpotent, dann ist auch L selbst nilpotent.

(iii) Sind I und J nilpotente Ideale von L, dann ist auch $I + J$ ein nilpotentes Ideal.

Beweis: (i) Der Beweis verläuft völlig analog zu Satz 1.13 (i).
(ii) Ist $L/Z(L)$ nilpotent, so gilt $(L/Z(L))^k = \{0\}$ für geeignetes $k \geq 1$. Bezeichnet $\pi : L \to L/Z(L)$ die kanonische Projektion, so folgt $\pi(L^k) = (L/Z(L))^k = \{0\}$ also $L^k \subseteq Z(L)$ und damit $L^{k+1} = \{0\}$.
(iii) Durch Induktion zeigt man, dass $(I + J)^{2m} \subseteq I^m + J^m$ für $m \geq 1$. ■

Bemerkung.

(a) Eine analoge Aussage zu Satz 1.13 (ii) gilt nicht: Es gibt Lie Algebren mit nilpotenten Idealen I, sodass L/I nilpotent aber L selbst nicht nilpotent ist. Ein Beispiel ist die 2-dimensionale nicht abelsche Lie Algebra.

Ist L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, so können wir jedes $x \in L$ als lineare Abbildung $x : V \to V$ auffassen. Angenommen x ist *nilpotent*, d.h. $x^m = 0$ für ein $m \geq 1$. Was bedeutet dies für x als Element der Lie Algebra?

Lemma 1.16 *Es sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ und $x \in L$. Ist die lineare Abbildung $x : V \to V$ nilpotent, dann ist auch $\operatorname{ad} x : L \to L$ nilpotent.*

Beweis: Für $y \in L$ ist $(\operatorname{ad} x)^m(y)$ eine Summe von Termen der Form $x^j \circ y \circ x^{m-j}$ mit $0 \leq j \leq m$. Angenommen $x^k = 0$ und $m \geq 2k$. Dann ist entweder $j \geq k$ und damit $x^j = 0$ oder $m - j \geq k$ und damit $x^{m-j} = 0$. Wir erhalten insgesamt $(\operatorname{ad} x)^{2k} = 0$. ■

Bemerkung.

(a) Eine Abbildung in $\mathfrak{gl}(V)$ kann ad-nilpotent sein ohne nilpotent zu sein. Ein Beispiel ist die Identität. Man sollte stets die beiden sehr unterschiedlichen Typen nilpotenter Lie Algebren $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$ und $\mathfrak{n}(n, \mathbb{K})$ im Hinterkopf behalten.

Wir werden den Satz von Engel als Konsequenz der folgenden Aussage erhalten.

Satz 1.17 *Es sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ mit $\dim V \geq 1$. Ist jedes Element von L nilpotent, dann gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$, sodass $x(v) = 0$ für alle $x \in L$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $\dim L$. Es sei zunächst $\dim L = 1$ und $L = \operatorname{span}\{z\}$. Da z eine nilpotente lineare Abbildung ist, hat z den Eigenwert 0. Bezeichnet $v \in V$ den zugehörigen Eigenvektor, so gilt $x(v) = 0$ für alle $x \in L$.
Es sei nun $\dim L > 1$ und A eine eigentliche Unteralgebra von L mit maximaler Dimension. Wir zeigen zunächst, dass A ein Ideal und $\dim A = \dim L - 1$ ist. Dazu betrachten wir den Faktorraum L/A und definieren eine lineare Abbildung $\phi : A \to \mathfrak{gl}(L/A)$ durch

$$\phi(a)(x + A) = (\operatorname{ad} a)(x) + A = [a, x] + A.$$

Dann gilt

$$[\phi(a), \phi(b)](x + A) = \phi(a)([b, x] + A) - \phi(b)([a, x] + A) = \phi([a, b])(x + A),$$

womit ϕ ein Homomorphismus ist. Damit ist $\phi(A)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(L/A)$ und $\dim \phi(A) < \dim L$. Da nach Lemma 1.16 $\operatorname{ad} a$ für alle $a \in A$ nilpotent ist, besteht $\phi(A)$ aus nilpotenten linearen Abbildungen. Nach Induktionsannahme gibt es ein von Null verschiedenes Element $y + A \in L/A$, sodass $\phi(a)(y + A) = [a, y] + A = 0$ also $[a, y] \in A$ für alle $a \in A$. Daher ist $\{x \in L : [x, A] \subseteq A\}$ eine Unteralgebra von L, die A und y enthält. Da A maximal gewählt war, folgt $L = \{x \in L : [x, A] \subseteq A\}$ und damit, dass A ein Ideal von L ist. Angenommen es gilt $\dim L/A > 1$, dann ist das Urbild jeder 1-dimensionalen Unteralgebra von L/A unter der kanonischen Projektion $\pi : L \to L/A$ eine Unteralgebra von L die A enthält, ein Widerspruch. Daher folgt $\dim L/A = \dim L - \dim A = 1$. Anwendung der Induktionsannahme auf $A \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ liefert einen von Null verschiedenen Vektor $w \in V$ mit $a(w) = 0$ für alle $a \in A$. Daher ist

$$W = \{v \in V : a(v) = 0 \text{ für alle } a \in A\}$$

ein von Null verschiedener Unterraum von V. Für beliebiges $x \in L$ gilt $x(W) \subseteq W$, denn für alle $w \in W$ ist

$$(a \circ x)(w) = (x \circ a)(w) + [a, x](w) = 0.$$

Da $y : V \to V$ nilpotent ist, ist auch die Einschränkung von y auf W nilpotent. Daher gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in W$ mit $y(v) = 0$. Da wir schließlich jedes Element $x \in L$ in der Form $x = a + \beta y$ mit $a \in A$ und $\beta \in \mathbb{K}$ schreiben können, folgt $x(v) = a(v) + \beta y(v) = 0$ für alle $x \in L$. ■

Satz von Engel. *Eine Lie Algebra L ist genau dann nilpotent, wenn jedes $x \in L$ ad-nilpotent ist.*

Beweis: Es sei L eine Lie Algebra und jedes $x \in L$ ad-nilpotent. Wir zeigen durch Induktion nach $\dim L$, dass dann L nilpotent ist. Der Fall $\dim L = 1$ ist trivial. Es sei daher $\dim L > 1$. Das Bild unter der adjungierten Darstellung $\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(L)$ die aus nilpotenten linearen Abbildungen besteht. Nach Satz 1.17 gibt es also ein von Null verschiedenes $x \in L$ mit $[x, y] = 0$ für alle $y \in L$. Damit ist $x \in Z(L)$. Die Faktoralgebra $L/Z(L)$ hat daher kleinere Dimension als L und besteht aus ad-nilpotenten Elementen. Damit ist nach Induktionsannahme $L/Z(L)$ nilpotent und damit nach Satz 1.15 auch L nilpotent. ■

Die folgende interessante Konsequenz aus Satz 1.17 stellt eine zum Satz von Engel äquivalente Aussage dar.

Korollar 1.18 *Es sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ist jede Abbildung aus L nilpotent, dann gibt es eine Basis von V bezüglich der alle Elemente von L durch strikte obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $\dim V$. Der Fall $\dim V = 1$ ist trivial. Es sei nun $\dim V > 1$. Nach Satz 1.17 gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ mit $x(v) = 0$ für alle $x \in L$. Es bezeichne $U = \mathrm{span}\{v\}$. Jede Abbildung $x \in L$ induziert eine lineare Abbildung $\bar{x}$ auf V/U und die Abbildung $L \to \mathfrak{gl}(V/U)$, $x \mapsto \bar{x}$, ist ein Lie Algebren Homomorphismus. Das Bild von L unter dieser Abbildung ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V/U)$ bestehend aus nilpotenten Abbildungen. Da $\dim V/U = n-1$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Basis $\{v_i + U : 1 \leq i \leq n-1\}$ von V/U bezüglich der alle Abbildungen $\bar{x}$ durch strikte obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Die Menge $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ ist dann eine Basis von V und da $x(v) = 0$ für alle $x \in L$ werden alle Elemente von L bezüglich dieser Basis durch strikte obere Dreiecksmatrizen dargestellt. ■

Bemerkung.

(a) Wir betonen (noch einmal), dass es nilpotente lineare Lie Algebren gibt, deren Elemente *in keiner Basis* durch strikte obere Dreiecksmatrizen beschrieben werden, wie etwa die von der Identität aufgespannte Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$.

Zum Abschluss geben wir noch eine weitere Anwendung von Satz 1.17 an.

Korollar 1.19 *Ist L eine nilpotente Lie Algebra und I ein von Null verschiedenes Ideal von L, dann gilt $I \cap Z(L) \neq \{0\}$.*

Beweis: Für jedes $x \in L$ ist $\mathrm{ad}\, x : I \to I$ eine nilpotente lineare Abbildung. Offenbar ist $\{\mathrm{ad}\, x : x \in L\}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(I)$. Nach Satz 1.17 gibt es ein von Null verschiedenes $v \in I$ mit $(\mathrm{ad}\, x)(v) = [x, v] = 0$ für alle $x \in L$, also ist $v \in Z(L)$. ■

2 Halbeinfache Lie Algebren

Dieser Abschnitt ist der Untersuchung von halbeinfachen Lie Algebren gewidmet. Erste grundlegende Definitionen und Aussagen zu Darstellungen dieser Algebren werden angegeben. Wir beschränken uns dabei ausschließlich auf den Fall von Lie Algebren über $\mathbb{C}$.

Nach dem Satz von Engel ist jede Unteralgebra L von $\mathfrak{gl}(V)$, die aus nilpotenten Abbildungen besteht, isomorph zu einer Unteralgebra der Lie Algebra der strikten oberen Dreiecksmatrizen. Das Analogon dieser Aussage für auflösbare lineare Lie Algebren ist als Satz von Lie bekannt. Der entscheidende Schritt im Beweis des Satzes von Engel war das Auffinden eines von Null verschiedenen Vektors $v \in V$ mit $x(v) = 0$ für alle $x \in L$, also eines gemeinsamen Eigenvektors aller $x \in L$ zum Eigenwert Null. Wir definieren nun allgemeiner:

Definition. Es sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wir nennen einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ einen *gemeinsamen Eigenvektor* aller $x \in L$, wenn $x(v) \in \operatorname{span}\{v\}$ für alle $x \in L$.

Ist L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ und $v \in V$ ein gemeinsamer Eigenvektor aller $x \in L$, so können wir die Eigenwerte der Elemente von L durch eine Funktion $\lambda : L \to \mathbb{C}$ beschreiben: $x(v) = \lambda(x)v$ für alle $x \in L$. Es ist leicht zu sehen, dass die Funktion λ linear ist. Dies führt zu folgender wichtiger Begriffsbildung:

Definition. Es sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ein *Gewicht* von L ist eine lineare Abbildung $\lambda : L \to \mathbb{C}$, sodass

$$V_\lambda := \{v \in V : x(v) = \lambda(x)v \text{ für alle } x \in L\}$$

einen von Null verschiedenen Unterraum von V bildet. Der Vektorraum V_λ heißt *Gewichtsraum* zum Gewicht λ.

Im Beweis von Satz 1.17 haben wir gezeigt, dass der Gewichtsraum zum Gewicht 0 eines Ideals einer linearen Lie Algebra L einen unter L invarianten Unterraum bildet. Das folgende Resultat zeigt, dass dies auch für allgemeine Gewichte gilt:

Lemma 2.1 *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ist I ein Ideal von L und $\lambda : I \to \mathbb{C}$ ein Gewicht von I, dann ist der Gewichtsraum*

$$V_\lambda = \{v \in V : x(v) = \lambda(x)v \text{ für alle } x \in I\}$$

ein unter L invarianter Unterraum von V.

Beweis: Es sei $x \in L$ und $w \in V_\lambda$. Für beliebiges $y \in I$ gilt

$$y(x(w)) = x(y(w)) - [x, y](w) = \lambda(y)x(w) - \lambda([x, y])w.$$

Wir müssen daher zeigen, dass $\lambda([x, y]) = 0$ für alle $x \in L$ und $y \in I$. Dazu seien $x \in L$ und $w \in V_\lambda$ beliebig von Null verschieden gewählt. Es sei weiters $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, sodass $w, x(w), \ldots, x^m(w)$ linear abhängig sind und es bezeichne $W = \operatorname{span}\{w, x(w), \ldots, x^{m-1}(w)\}$. Dann gilt offenbar $\dim W = m$.

Durch Induktion nach m zeigen wir nun, dass W invariant unter $y \in I$ ist und, dass y bezüglich der Basis $\{w, x(w), \dots, x^{m-1}(w)\}$ durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird, deren Diagonaleinträge alle gleich $\lambda(y)$ sind. Im Fall $m = 1$ gilt $y(w) = \lambda(y)w$. Es sei nun $m > 1$. Für $1 < k \leq m$ gilt

$$y(x^k(w)) = (x \circ y + [y, x]) \circ x^{k-1}(w).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $y(x^{k-1}(w)) = \lambda(y)x^{k-1}(w) + u$ mit einem Vektor $u \in \operatorname{span}\{x^j(w) : j < k-1\}$. Damit erhalten wir wegen $[y, x] \in I$ nach Induktionsvoraussetzung

$$y(x^k(w)) = \lambda(y)x^k(w) + x(u) + v$$

mit $x(u), v \in \operatorname{span}\{x^j(w) : j \leq k-1\}$.

Nach dem bisher gezeigten ist für jedes $y \in I$ die Spur der Abbildung $y : W \to W$ gegeben durch $m\lambda(y)$. Da der Unterraum W nach Konstruktion invariant unter x und nach dem bisher gezeigten invariant unter $y \in I$ ist, folgt nun wegen $[x, y] \in I$,

$$\operatorname{tr}_W [x, y] = m\lambda([x, y]) = 0.$$

■

Bemerkung.

(a) Als Spezialfall von Lemma 2.1 notieren wir die bekannte Aussage:

Sind $x, y : V \to V$ zwei lineare Abbildungen die kommutieren, so ist jeder Eigenraum von x invariant unter y und vice versa.

Wir erhalten den Satz von Lie als Konsequenz der folgenden Aussage.

Satz 2.2 *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit $\dim V \geq 1$. Ist L eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, dann gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$, der gemeinsamer Eigenvektor für alle $x \in L$ ist.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $\dim L$. Der Fall $\dim L = 1$ ist klar. Es sei daher $\dim L > 1$. Da L auflösbar ist, ist $[L, L]$ ein eigentliches Ideal von L. Da $L/[L, L]$ abelsch ist, ist jeder Unterraum von $L/[L, L]$ ein Ideal. Ist I ein Ideal der Codimension 1 von $L/[L, L]$, dann ist $K = \{z \in L : z + [L, L] \in I\}$ ein Ideal von L mit $\dim K = \dim L - 1$ und $[L, L] \subseteq K$. Nach Satz 1.13 ist K auflösbar.

Ist $\dim K = 0$, dann ist $\dim L = 1$ und es bleibt nichts zu zeigen. Ist $\dim K \geq 1$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$, der gemeinsamer Eigenvektor für alle $x \in K$. Es sei $\lambda : K \to \mathbb{C}$ das zugehörige Gewicht, also $x(v) = \lambda(x)v$ für alle $x \in K$. Nach Lemma 2.1 ist der Gewichtsraum

$$V_\lambda = \{v \in V : x(v) = \lambda(x)v \text{ für alle } x \in K\}$$

invariant unter L. Es sei nun $z \in L$ aber $z \notin K$. Da $z : V_\lambda \to V_\lambda$, besitzt z einen Eigenvektor $v \in V_\lambda$ zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$. Da wir jedes $x \in L$ in der Form $x = y + \beta z$ mit $y \in K$ und $\beta \in \mathbb{C}$ darstellen können gilt

$$x(v) = y(v) + \beta z(v) = (\lambda(y) + \beta\mu)v.$$

■

Satz von Lie. *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und L eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gibt es eine Basis von V bezüglich der alle Elemente von L durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $\dim V$. Der Fall $\dim V = 1$ ist trivial. Es sei nun $\dim V > 1$. Nach Satz 2.2 gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$, der gemeinsamer Eigenvektor für alle $x \in L$ ist. Es sei $U = \text{span}\,\{v\}$. Jede Abbildung $x \in L$ induziert eine lineare Abbildung $\bar{x}$ auf V/U und die Abbildung $L \to \mathfrak{gl}(V/U)$, $x \mapsto \bar{x}$, ist ein Lie Algebren Homomorphismus. Das Bild von L unter dieser Abbildung ist eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V/U)$. Da $\dim V/U = n-1$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Basis $\{v_i + U : 1 \leq i \leq n-1\}$ von V/U bezüglich der alle Abbildungen $\bar{x}$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Die Menge $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ ist dann eine Basis von V bezüglich der alle Elemente von L durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. ■

Definition. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Eine (vollständige) *Fahne* in V ist eine abfallende Folge von Unterräumen $V = V_n \supseteq \ldots \supseteq V_1 \supseteq V_0 = \{0\}$ mit $\dim V_i = i$. Wir nennen eine Fahne von V *stabil* unter einer linearen Abbildung $x : V \to V$, wenn $x(V_i) \subseteq V_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Der Begriff der Fahne ermöglicht nun eine koordinatenfreie Formulierung von Korollar 1.18 und dem Satz von Lie.

Korollar 2.3 *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Besteht L aus nilpotenten Abbildungen, dann gibt es eine Fahne $V_i, 0 \leq i \leq n$, in V mit $x(V_i) \subseteq V_{i-1}$ für alle $x \in L$ und $1 \leq i \leq n$.

(ii) Ist L auflösbar, dann gibt es eine Fahne in V, die stabil ist unter allen Elementen von L.

Die folgenden Korollare sollen Anwendungen des Satzes von Lie illustrieren:

Korollar 2.4 *Es sei L eine auflösbare Lie Algebra über $\mathbb{C}$ mit $\dim L = n$. Dann besitzt L eine abfallende Folge von Idealen $L = I_n \supseteq \ldots \supseteq I_1 \supseteq I_0 = \{0\}$ mit $\dim I_k = k$.*

Beweis: Das Bild von L unter der adjungierten Darstellung $\text{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ ist eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(L)$. Nach Korollar 2.3 gibt es eine Fahne in L, die stabil ist unter $\text{ad}\,x$ für alle $x \in L$. ■

Korollar 2.5 *Eine Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ ist genau dann auflösbar, wenn $[L, L]$ nilpotent ist.*

Beweis: Ist $[L, L]$ nilpotent, so ist $[L, L]$ auflösbar und damit auch L auflösbar. Es sei nun L auflösbar. Das Bild von L unter der adjungierten Darstellung $\text{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L)$ ist eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(L)$. Nach dem Satz von Lie gibt es eine Basis von L bezüglich der die Abbildungen $\text{ad}\,x$, $x \in L$, durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Da $[\text{ad}\,x, \text{ad}\,y] = \text{ad}\,[x, y]$, wird $\text{ad}\,[x, y]$ bezüglich dieser Basis durch eine strikte obere Dreiecksmatrix beschrieben und ist damit nilpotent. Daher sind alle $z \in [L, L]$ ad-nilpotent und nach dem Satz von Engel $[L, L]$ nilpotent. ■

Für die nachfolgenden Untersuchungen wird sich die Jordan Zerlegung von linearen Abbildungen als ein äußerst nützliches Hilfsmittel erweisen. Wir wiederholen daher zunächst einige grundlegende Begriffe und Aussagen der linearen Algebra:

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $x : V \to V$ eine lineare Abbildung. Das *charakteristische Polynom* von x ist definiert durch

$$p_x(t) = \det(x - t\,\mathrm{Id}).$$

Da $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert von x ist, wenn $\ker(x - \lambda\,\mathrm{Id})$ von Null verschieden ist, sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms genau die Eigenwerte von x. Der *Eigenraum* zu einem Eigenwert λ ist der Unterraum

$$V_\lambda = \{v \in V : x(v) = \lambda v\} = \ker(x - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von x, so kann das charakteristische Polynom von x geschrieben werden in der Form

$$p_x(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdots (\lambda_k - t)^{n_k},$$

wobei n_i die algebraische Vielfachheit von λ_i bezeichnet und $n_1 + \cdots + n_k = n$. Der *verallgemeinerte Eigenraum* $V_{(\lambda_i)}$ zu einem Eigenwert λ_i ist definiert durch

$$V_{(\lambda_i)} = \ker(x - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}.$$

Für $v \in V_{(\lambda_i)}$ gilt $\lambda_i v - x(v) \in V_{(\lambda_i)}$ und, da $\lambda_i v \in V_{(\lambda_i)}$, damit also $x(V_{(\lambda_i)}) \subseteq V_{(\lambda_i)}$. Die lineare Abbildung x kann genau dann durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von x besitzt. Es ist x also genau dann diagonalisierbar, wenn

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Das charakteristische Polynom von x allein enthält nicht genug Information, um zu entscheiden, ob x diagonalisierbar ist. Man benötigt dazu das Minimalpolynom von x. Wir erinnern zunächst daran, dass jedes Polynom

$$p(t) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

eine lineare Abbildung $p(x) : V \to V$ bestimmt durch

$$p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mathrm{Id}.$$

Offenbar gilt für zwei Polynome $p(t)$ und $q(t)$, dass

$$p(x) \circ q(x) = (p \cdot q)(x),$$

womit insbesondere $p(x)$ und $q(x)$ kommutieren. Das *Minimalpolynom* von x ist das Polynom $m(t) = t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \ldots a_1 t + a_0$ kleinsten Grades mit $m(x) = 0$. Offenbar teilt das Minimalpolynom jedes Polynom $p(t)$ mit der Eigenschaft, dass $p(x) = 0$. Insbesondere gilt der berühmte

Satz von Cayley–Hamilton. *Ist $x : V \to V$ eine lineare Abbildung, dann teilt das Minimalpolynom von x das charakteristische Polynom von x.*

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage den für uns wichtigen Satz über die Jordan Zerlegung linearer Abbildungen zu beweisen.

Satz 2.6 *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $x : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Es gibt eindeutig bestimmte Abbildungen $x_s, x_n : V \to V$, wobei x_n nilpotent und x_s diagonalisierbar ist, mit*

$$x = x_s + x_n \qquad \text{und} \qquad x_s \circ x_n = x_n \circ x_s.$$

Die Darstellung $x = x_s + x_n$ heißt Jordan Zerlegung *von x.*

(ii) *Es gibt Polynome $p(t)$ und $q(t)$, sodass $x_s = p(x)$ und $x_n = q(x)$. Insbesondere, kommutieren x_s und x_n mit jeder linearen Abbildung mit der x kommutiert.*

(iii) *Ist U ein Unterraum von V mit $x(U) \subseteq U$, dann gilt auch $x_s(U) \subseteq U$ und $x_n(U) \subseteq U$.*

Beweis: Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von x mit algebraischen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$. Wir zeigen zunächst mittels Induktion nach k, dass

$$V = V_{(\lambda_1)} \oplus \cdots \oplus V_{(\lambda_k)}$$

und die Projektion von V auf den verallgemeinerten Eigenraum $V_{(\lambda_i)}$ als Polynom in x geschrieben werden kann. Ist $k = 1$ so folgt aus dem Satz von Cayley–Hamilton, $(x - \lambda_1 \mathrm{Id})^{n_1} = 0$ und damit $V = V_{(\lambda_1)}$ und die Projektion auf $V_{(\lambda_1)}$ ist die Identität. Es sei nun $k > 1$. Wir definieren

$$p_1(t) := (\lambda_1 - t)^{n_1} \qquad \text{und} \qquad p_2(t) := (\lambda_2 - t)^{n_2} \cdots (\lambda_k - t)^{n_k}.$$

Dann sind p_1 und p_2 teilerfremd und es gilt

$$p_x(t) = p_1(t) \cdot p_2(t) \qquad \text{und} \qquad p_1(x) \circ p_2(x) = 0.$$

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus finden wir Polynome q_1, q_2, sodass gilt $p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 = 1$ und damit

$$p_1(x) \circ q_1(x) + p_2(x) \circ q_2(x) = \mathrm{Id}.$$

Wir definieren lineare Abbildungen $\pi_i : V \to V$, $i = 1, 2$, durch $\pi_i := p_i(x) \circ q_i(x)$. Dann gilt

$$\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id} \qquad \text{und} \qquad \pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0.$$

Daher ist $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2 = \{0\}$ und damit

$$V = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2,$$

wobei die Projektion auf $\ker \pi_1$ durch π_2 und die Projektion auf $\ker \pi_2$ durch π_1 gegeben ist. Da $\pi_1 = q_1(x) \circ p_1(x)$ folgt $V_{(\lambda_1)} = \ker p_1(x) \subseteq \ker \pi_1$. Ist umgekehrt $v \in \ker \pi_1$ dann gilt $p_1(x)(v) = p_1(x) \circ \pi_2(v) = p_1(x) \circ p_2(x) \circ q_2(x)(v) = 0$. Damit ist $V_{(\lambda_1)} = \ker \pi_1$ und die Projektion auf $V_{(\lambda_1)}$, gegeben durch π_2, ein Polynom in x. Es sei nun $v \in \ker \pi_2$. Dann gilt $\pi_2(x(v)) = x(\pi_2(v)) = 0$ also $x(\ker \pi_2) \subseteq \ker \pi_2$. Daraus folgt, dass das charakteristische Polynom p_x Produkt der charakteristischen

Polynome p_{x_i} der Einschränkungen x_i von x auf $\ker \pi_i$ ist. Insbesondere, ist $p_{x_2} = p_2$ und die Eigenwerte von x_2 sind $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Die verallgemeinerten Eigenräume von x_2 stimmen mit den verallgemeinerten Eigenräumen von x für die Eigenwerte $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ überein. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $\ker \pi_2 = V_{(\lambda_2)} \oplus \ldots \oplus V_{(\lambda_k)}$ und die Projektionen auf $V_{(\lambda_i)}$, $2 \leq i \leq k$, sind Polynome in $x_2 = x \circ \pi_2$ und damit in x.

Wir kommen nun zum Beweis der Aussagen (i) bis (iii). Dazu seien wieder $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von x und $V_{(\lambda_i)}$ die zugehörigen verallgemeinerten Eigenräume. Wir bezeichnen mit π_i die Projektion von V auf $V_{(\lambda_i)}$. Wir definieren

$$x_s := \lambda_1 \pi_1 + \cdots + \lambda_k \pi_k \qquad \text{und} \qquad x_n = x - x_s.$$

Offenbar ist x_s diagonalisierbar mit Eigenwerten λ_i und zugehörigen Eigenräumen $V_{(\lambda_i)}$. Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es Polynome $p(t)$ und $q(t)$ mit $p(x) = x_s$ und $q(x) = x - p(x) = x_n$. Damit kommutieren x_s und x_n miteinander und mit jeder Abbildung mit der x kommutiert. Aussage (iii) ist jetzt auch klar. Es bleibt zu zeigen, dass x_n nilpotent ist. Dazu sei $v \in V_{(\lambda_i)}$ beliebig. Dann gilt

$$x_n(v) = (x - x_s)(v) = (x - \lambda_i \mathrm{Id})(v)$$

und daher $x_n^{n_i}(v) = 0$, wenn n_i die algebraische Vielfachheit von λ_i bezeichnet. Da jedes $v \in V$ als Linearkombination von Vektoren in den $V_{(\lambda_i)}$ geschrieben werden kann, ist x_n nilpotent.

Um die Eindeutigkeit der Jordan Zerlegung zu sehen, sei $x = x_s + x_n = x_s^* + x_n^*$. Nach (ii) kommutieren alle hier auftretenden Abbildungen. Damit sind x_s und x_s^* simultan diagonalisierbar, womit auch $x_s - x_s^*$ diagonalisierbar ist. Analog ist $x_n^* - x_n$ nilpotent. Die einzige Matrix, die gleichzeitig diagonalisierbar und nilpotent ist, ist die Nullmatrix, womit $x_s - x_s^* = x_n^* - x_n = 0$. ■

Bemerkungen.

(a) Der von uns angegebene Satz über die Jordan Zerlegung linearer Abbildungen ist etwas schwächer als die übliche Aussage über die Jordansche Normalform von Matrizen, dafür aber basisfrei formuliert. Um von Satz 2.6 zur Jordanschen Normalform zu kommen, benötigt man noch die Normalform von nilpotenten linearen Abbildungen.

(b) Ist $x : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Jordan Zerlegung $x = x_s + x_n$, dann heißt x_s der *halbeinfache Teil* von x und x_n der *nilpotente Teil* von x. Wir nennen x *halbeinfach*, wenn $x_n = 0$.

(c) Der Beweis von Satz 2.6 zeigt auch, dass eine lineare Abbildung $x : V \to V$ genau dann halbeinfach ist, wenn ihre verallgemeinerten Eigenräume mit ihren Eigenräumen übereinstimmen.

Ist das Minimalpolynom von x gegeben durch $m(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} \cdots (\lambda_k - t)^{m_k}$, so liefern dieselben Argumente, dass für die verallgemeinerten Eigenräume $V_{(\lambda_i)}$ von x gilt $V_{(\lambda_i)} = \ker(x - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$. Damit ist die Abbildung x genau dann halbeinfach, wenn ihr Minimalpolynom in lineare Faktoren zerfällt.

Als erste Anwendung der Jordan Zerlegung linearer Abbildungen beweisen wir ein Gegenstück zu Lemma 1.16.

Korollar 2.7 *Es sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Ist die lineare Abbildung $x : V \to V$ halbeinfach, dann ist auch $\operatorname{ad} x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ halbeinfach.*

Beweis: Wir wählen eine Basis $\{b_1, \ldots, b_m\}$ von V bezüglich der x durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die Diagonaleinträge dieser Matrix. Wir bezeichnen mit e_{ij} die Standardbasismatrizen von $\mathfrak{gl}(V)$ (bezüglich der gewählten Basis in V). Dann gilt offenbar

$$(\operatorname{ad} x)(e_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)e_{ij}.$$

Damit wird $\operatorname{ad} x$ durch eine Diagonalmatrix bezüglich der Basis e_{ij} dargestellt. ■

Als direkte Folgerung von Korollar 2.7 notieren wir die folgende wichtige Aussage:

Korollar 2.8 *Es sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$ und $x = x_s + x_n$ die Jordan Zerlegung von x. Dann ist die Jordan Zerlegung von $\operatorname{ad} x : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ gegeben durch*

$$\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n.$$

Beweis: Nach Lemma 1.16 und Korollar 2.7 ist $\operatorname{ad} x_s$ halbeinfach und $\operatorname{ad} x_n$ nilpotent. Da $[\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = \operatorname{ad}[x_s, x_n] = 0$ kommutieren $\operatorname{ad} x_s$ und $\operatorname{ad} x_n$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.6. ■

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass Korollar 2.8 ein Spezialfall einer viel allgemeineren Aussage ist, welches auf einer abstrakten Jordan Zerlegung der Elemente einer komplexen halbeinfachen Lie Algebra beruht. Diese Zerlegung werden wir mit Hilfe von Derivationen erhalten. Als Vorbereitung beweisen wir:

Korollar 2.9 *Es sei A eine Algebra über $\mathbb{C}$ und $D : A \to A$ eine Derivation mit Jordan Zerlegung $D = D_s + D_n$. Dann sind auch D_s und D_n Derivationen von A.*

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$A_{(\lambda)} = \{x \in A : (D - \lambda \mathrm{Id})^k x = 0 \text{ für ein } k \geq 1\}.$$

Ist λ ein Eigenwert von D, so ist $A_{(\lambda)}$ der zugehörige verallgemeinerte Eigenraum ansonsten ist $A_{(\lambda)} = \{0\}$. Im Beweis von Satz 2.6 haben wir gezeigt, dass

$$A = A_{(\lambda_1)} \oplus \cdots \oplus A_{(\lambda_m)},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte von D sind. Auf dem Unterraum $A_{(\lambda_i)}$ wirkt die Abbildung D_s durch Multiplikation mit λ_i. Durch Induktion zeigt man weiters

$$(D - (\lambda + \mu)\mathrm{Id})^k (x \cdot y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (D - \lambda \mathrm{Id})^i (x) \cdot (D - \mu \mathrm{Id})^{k-i} (y).$$

Daraus folgt aber

$$A_{(\lambda)} \cdot A_{(\mu)} = \operatorname{span}\{x \cdot y : x \in A_{(\lambda)}, y \in A_{(\mu)}\} \subseteq A_{(\lambda+\mu)}.$$

Ist nun $x \in A_{(\lambda)}$ und $y \in A_{(\mu)}$, dann gilt

$$D_s(x \cdot y) = (\lambda + \mu)(x \cdot y) = \lambda x \cdot y + x \cdot \mu y = D_s(x) \cdot y + x \cdot D_s(y),$$

womit D_s eine Derivation ist und damit auch $D_n = D - D_s$. ■

Wir sind nun in der Lage ein wichtiges Kriterium für die Auflösbarkeit linearer Lie Algebren zu beweisen, welches ausschließlich Informationen über die Spur gewisser Abbildungen der Algebra benötigt.

Satz 2.10 *Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ist $\operatorname{tr}(x \circ y) = 0$ für alle $x, y \in L$, dann ist L auflösbar.*

Beweis: Nach Korollar 2.5, Lemma 1.16 und dem Satz von Engel genügt es zu zeigen, dass jedes $x \in [L, L]$ eine nilpotente lineare Abbildung ist. Es sei daher $x \in [L, L]$ und $x = x_s + x_n$ die Jordan Zerlegung von x. Wir wollen zeigen, dass $x_s = 0$. Dazu wählen wir eine Basis in der x_s durch eine Diagonalmatrix und x_n durch eine strikte obere Dreiecksmatrix dargestellt wird. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Diagonaleinträge der Matrix von x_s, dann genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_i = 0.$$

Wir definieren dazu eine lineare Abbildung $\bar{x}_s : V \to V$ welche in der gewählten Basis durch die zur Matrix von x_s konjugiert komplexen Matrix dargestellt wird. Die Matrix von $\bar{x}_s$ ist also eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n$. Eine einfache Rechnung zeigt nun

$$\operatorname{tr}(\bar{x}_s \circ x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_i.$$

Da $x \in [L, L]$ als Linearkombination von Elementen der $[y, z]$ mit $y, z \in L$ dargestellt werden kann, müssen wir also zeigen, dass für alle $y, z \in L$

$$\operatorname{tr}(\bar{x}_s \circ [y, z]) = \operatorname{tr}([\bar{x}_s, y] \circ z) = 0.$$

Dies gilt nach Voraussetzung, wenn wir zeigen können, dass $[\bar{x}_s, y] \in L$ für alle $y \in L$ bzw. die Abbildung $\operatorname{ad} \bar{x}_s$ die Unteralgebra L invariant lässt. Dazu verwenden wir zunächst, dass die Jordan Zerlegung von $\operatorname{ad} x$ nach Korollar 2.8 gegeben ist durch $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n$. Wir haben außerdem im Beweis von Korollar 2.8 gesehen, dass ausgehend von einer Basis von V in der x_s durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird, die entsprechenden Standardmatrizen bezüglich dieser Basis die Eigenvektoren von $\operatorname{ad} x_s$ bilden und die zugehörigen Eigenwerte Differenzen von Eigenwerten von x_s sind. Damit ist aber auch $\operatorname{ad} \bar{x}_s$ diagonalisierbar mit denselben Eigenräumen wie $\operatorname{ad} x_s$ und konjugiert komplexen Eigenwerten. Da die Projektionen auf die Eigenräume von $\operatorname{ad} x_s$ Polynome in $\operatorname{ad} x_s$ sind, ist auch $\operatorname{ad} \bar{x}_s$ ein Polynom in $\operatorname{ad} x_s$. Da $\operatorname{ad} x_s$ die Unteralgebra L invariant lässt, gilt dies damit auch für $\operatorname{ad} \bar{x}_s$. ■

Wir haben bisher eine Reihe von Aussagen für lineare Lie Algebren erhalten. Um diese Resultate auf abstrakte Lie Algebren zu übertragen, benötigen wir einen Weg diese als Unteralgebren von allgemeinen linearen Algebren aufzufassen. Wie das folgende Resultat zeigt, kann dazu die adjungierte Darstellung verwendet werden.

Satz 2.11 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- *L ist genau dann auflösbar, wenn* $\operatorname{ad} L$ *auflösbar ist.*
- *L ist genau dann nilpotent, wenn* $\operatorname{ad} L$ *nilpotent ist.*

Beweis: Es sei L auflösbar, dann ist $\operatorname{ad} L$ als homomorphes Bild von L auch auflösbar. Ist umgekehrt $\operatorname{ad} L$ auflösbar, dann ist nach dem Homomorphiesatz auch

$$L/\ker \operatorname{ad} = L/Z(L)$$

auflösbar und damit nach Satz 1.13 L auflösbar.
Die Aussage über nilpotente Lie Algebren folgt analog aus Satz 1.15. ■

Eine Kombination von Satz 2.10 und Satz 2.11 liefert nun das berühmte

Kriterium von Cartan. *Eine Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ ist genau dann auflösbar, wenn* $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$ *für alle $x \in [L, L]$ und $y \in L$.*

Beweis: Es sei L auflösbar. Dann ist $\operatorname{ad} L$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(L)$ und $[\operatorname{ad} L, \operatorname{ad} L]$ nach Korollar 2.5 nilpotent. Nach dem Satz von Lie gibt es eine Basis von L bezüglich der alle Elemente von $\operatorname{ad} L$ durch obere und damit alle Elemente von $[\operatorname{ad} L, \operatorname{ad} L]$ durch strikte obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Für $x \in [L, L]$ gilt $\operatorname{ad} x \in [\operatorname{ad} L, \operatorname{ad} L]$ und daher $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$ für alle $x \in [L, L]$ und $y \in L$.
Ist umgekehrt $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$ für alle $x, y \in [L, L]$, dann folgt aus Satz 2.10, dass $\operatorname{ad}[L, L] = [\operatorname{ad} L, \operatorname{ad} L]$ auflösbar ist. Nach Satz 2.11 ist daher $[L, L]$ und damit auch L auflösbar. ■

Das Kriterium von Cartan motiviert die folgende

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Die symmetrische Bilinearform $\kappa : L \times L \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\kappa(x, y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y), \qquad x, y \in L,$$

heißt die *Killing Form* von L.

Beispiel.
Es sei L die 2-dimensionale nicht abelsche Lie Algebra mit Basis x, y und $[x, y] = x$. Die Matrixdarstellungen von $\operatorname{ad} x$ und $\operatorname{ad} y$ bezüglich dieser Basis sind

$$\operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\kappa(x, x) = \kappa(x, y) = \kappa(y, x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \kappa(y, y) = 1.$$

Die Matrix der Bilinearform κ bezüglich der Basis x, y ist daher gegeben durch

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Eigenschaft der Killing Form einer Lie Algebra ergibt sich aus der Spuridentität $\mathrm{tr}([x,y]\circ z) = \mathrm{tr}(x\circ[y,z])$ für $x,y,z \in \mathfrak{gl}(V)$:

Proposition 2.12 *Für die Killing Form einer Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ gilt*

$$\kappa([x,y],z) = \kappa(x,[y,z]), \qquad x,y,z \in L.$$

Eine weitere Eigenschaft der Killing Form einer Lie Algebra ist ihre Kompatibilität mit Idealen.

Lemma 2.13 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ mit Killing Form κ und I ein Ideal von L mit Killing Form κ_I. Dann gilt für alle $x,y \in I$*

$$\kappa(x,y) = \kappa_I(x,y).$$

Beweis: Wir wählen eine Basis von I und ergänzen sie zu einer Basis von L. Für $x \in I$ gilt $(\mathrm{ad}\,x)(L) \subseteq I$. Die Matrix von $\mathrm{ad}\,x$ bezüglich der gewählten Basis hat daher die Blockform

$$\mathrm{ad}\,x = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei A_x die Matrix der Einschränkung von $\mathrm{ad}\,x$ auf I bezeichnet. Für $x,y \in I$ ist daher die Matrix von $\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y$ gegeben durch

$$\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y = \begin{pmatrix} A_xA_y & A_xB_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Killing Formen κ und κ_I gilt damit $\kappa(x,y) = \mathrm{tr}\,(A_xA_y) = \kappa_I(x,y)$. ■

Das Kriterium von Cartan für die Auflösbarkeit einer Lie Algebra über $\mathbb{C}$ lässt sich nun wie folgt formulieren:

Kriterium von Cartan. *Eine Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ ist genau dann auflösbar, wenn $\kappa(x,y) = 0$ für alle $x \in [L,L]$ und $y \in L$.*

Eine Lie Algebra ist genau dann halbeinfach, wenn sie keine von Null verschiedenen auflösbaren Ideale besitzt. Da wir mit Hilfe der Killing Form auf Auflösbarkeit testen können, liegt es Nahe, dass sie auch Aussagen über Halbeinfachheit ermöglicht. Wir wiederholen zunächst grundlegende Begriffe über symmetrische Bilinearformen.

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Ist $S \subseteq V$ eine Teilmenge von V, dann definiert

$$S^{\perp} := \{x \in V : \beta(x,s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

einen Unterraum von V, genannt der *Orthogonalraum* von S bezüglich β.

Die Bilinearform β heißt *nicht ausgeartet*, wenn das *Radikal* $V^{\perp}$ von β nur aus dem Nullvektor besteht, wenn es also keinen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ gibt mit $\beta(u,v) = 0$ für alle $u \in V$. Ist $\{b_1,\ldots,b_m\}$ eine Basis von V, dann ist β genau dann nicht ausgeartet, wenn die Matrix von β bezüglich der gewählten Basis $(\beta(b_i,b_j))_{i,j=1}^{m}$ nicht singulär ist.

Ist β nicht ausgeartet und U ein Unterraum von V, dann gilt

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V.$$

Man beachte jedoch, dass selbst für nicht ausgeartete Bilinearformen nicht notwendig $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ gelten muss.

Beispiele.

(a) Die Killing Form der 2-dimensionalen nicht abelschen Lie Algebra ist nach dem zuvor Gezeigten ausgeartet.

(b) Es sei $\{x, y, z\}$ die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Die Matrixdarstellungen von $\operatorname{ad} x$, $\operatorname{ad} y$ und $\operatorname{ad} z$ bezüglich dieser Basis sind

$$\operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{ad} z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Matrix der Killing Form κ von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Da $\det \kappa = -128$, ist die Killing Form von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ nicht ausgeartet.

Die einzigen im Folgenden auftretenden symmetrischen Bilinearformen sind Killing Formen von Lie Algebren über $\mathbb{C}$. Orthogonalräume beziehen sich von nun an stets auf diese Formen.

Lemma 2.14 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und I ein Ideal von L. Dann ist auch $I^{\perp}$ ein Ideal von L.*

Beweis: Für $x \in I^{\perp}$, $y \in L$ und $z \in I$, gilt nach Proposition 2.12,

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

und damit $[x, y] \in I^{\perp}$. ∎

Wir sind nun in der Lage ein Kriterium für die Halbeinfachheit einer Lie Algebra über $\mathbb{C}$ anzugeben, welches ebenfalls auf Élie Cartan zurückgeht und unter dessen Namen bekannt ist.

Kriterium von Cartan. *Eine Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ ist genau dann halbeinfach, wenn ihre Killing Form nicht ausgeartet ist.*

Beweis: Es sei zunächst L halbeinfach mit Killing Form κ. Nach Lemma 2.14 ist $L^{\perp}$ ein Ideal von L. Ist $x \in L^{\perp}$ und $y \in [L^{\perp}, L^{\perp}] \subseteq L$, so gilt $\kappa(x, y) = 0$. Nach Cartans Kriterium für Auflösbarkeit ist $L^{\perp}$ damit auflösbar und daher $L^{\perp} = \{0\}$. Damit ist κ nicht ausgeartet.

Es sei nun die Killing Form κ von L nicht ausgeartet und I ein beliebiges abelsches Ideal von L. Für $x \in I$ und $y \in L$ gilt $(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)(L) \subseteq I$. Damit ist aber $(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y)^2(L) \subseteq [I, I] = \{0\}$, also $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ nilpotent. Daraus folgt

$$\kappa(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0.$$

Da $x \in I$ und $y \in L$ beliebig waren, folgt $I \subseteq L^\perp = \{0\}$. Damit besitzt L kein von Null verschiedenes abelsches Ideal und ist daher halbeinfach. ■

Bemerkung.

(a) Der obige Beweis zeigt, dass für jede Lie Algebra L stets $L^\perp \subseteq \operatorname{rad} L$. Die umgekehrte Inklusion gilt allerdings nicht immer, wie das Beispiel der nicht abelschen 2-dimensionalen Lie Algebra zeigt.

Das Kriterium von Cartan stellt eine wertvolle Charakterisierung halbeinfacher Lie Algebren dar. Wir wollen dies im Folgenden an einigen Anwendungen illustrieren.

Ist eine Lie Algebra L Vektorraum direkte Summe ihrer Ideale $I_1, \dots, I_m$, so folgt aus $[I_i, I_j] \subseteq I_i \cap I_j$, dass $[I_i, I_j] = \{0\}$, d.h. die Lie Klammer in L entsteht aus den Lie Klammern in $I_1, \dots, I_m$ durch komponentenweise Produkte. Damit ist L also auch Lie Algebren direkte Summe von $I_1, \dots, I_m$ und wir schreiben dann $L = I_1 \oplus \dots \oplus I_m$.

Lemma 2.15 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und I ein Ideal von L. Dann ist I halbeinfach und es gilt $L = I \oplus I^\perp$.*

Beweis: Es bezeichne κ die Killing Form von L. Nach Lemma 2.14 ist $I \cap I^\perp$ ein Ideal von L. Die Einschränkung von κ auf $I \cap I^\perp$ ist offenbar identisch Null. Nach Lemma 2.13 und Cartans Kriterium für Auflösbarkeit ist daher $I \cap I^\perp = \{0\}$. Da $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$ folgt $I \oplus I^\perp = L$.

Es bleibt zu zeigen, dass I halbeinfach ist. Angenommen I besitzt ein von Null verschiedenes auflösbares Ideal K. Nach Cartans Kriterium ist die Killing Form von I ausgeartet. Nach Lemma 2.13 gibt es daher ein von Null verschiedenes $a \in I$, sodass $\kappa(a, x) = 0$ für alle $x \in I$. Da aber auch $\kappa(a, y) = 0$ für alle $y \in I^\perp$ folgt wegen $L = I \oplus I^\perp$ nun $\kappa(a, z) = 0$ für alle $z \in L$, ein Widerspruch. ■

Mit Hilfe von Lemma 2.15 können wir nun zeigen, dass halbeinfache Lie Algebren genau die direkten Summen von einfachen Lie Algebren sind.

Satz 2.16 *Eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ ist genau dann halbeinfach, wenn es (eindeutig bestimmte) einfache Ideale $L_1, \dots, L_m$ von L gibt mit*

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_m.$$

Beweis: Es sei zunächst L halbeinfach und I ein von Null verschiedenes Ideal von L von kleinst möglicher Dimension. Da L halbeinfach ist, kann I nicht abelsch sein. Ist $I = L$, dann ist L bereits einfach. Ansonsten ist $L = I \oplus I^\perp$ nach Lemma 2.15 und damit I ein einfaches Ideal von L (da jedes Ideal von I ein Ideal von L ist). Als Ideal von L ist $I^\perp$ wieder halbeinfach. Durch Induktion nach der Dimension erhalten wir $I^\perp = L_2 \oplus \dots \oplus L_m$. Jedes L_i ist ein Ideal von L, da $[I, L_i] \subseteq I \cap I^\perp = \{0\}$. Setzen wir nun $I = L_1$, so erhalten wir die gewünschte Zerlegung.

Es bleibt zu zeigen, dass $L_1, \ldots, L_m$ eindeutig bestimmt sind. Dazu bezeichne I ein beliebiges einfaches Ideal von L. Dann ist $[I, L]$ ebenfalls ein Ideal von I und wegen $Z(L) = \{0\}$ von Null verschieden. Damit ist $I = [I, L] = [I, L_1] \oplus \ldots \oplus [I, L_m]$. Da $[I, L_i] \subseteq I \cap L_i$ ein Ideal von I ist, sind alle Produkte $[I, L_i]$ bis auf eines, etwa für $i = j$, gleich $\{0\}$ und $[I, L_j] = I$ also $I = L_j$.

Es sei nun umgekehrt $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$ und I ein auflösbares Ideal von L. Dann ist $[I, L_i] \subseteq I \cap L_i$ für jedes i ein auflösbares Ideal von L_i. Da die L_i einfach sind, folgt $[I, L_i] = \{0\}$. Damit ist aber $[I, L] = \{0\}$, womit $I \subseteq Z(L)$. Nun ist aber leicht zu sehen, dass $Z(L) = Z(L_1) \oplus \ldots \oplus Z(L_m)$, wobei $Z(L_i) = \{0\}$, da die L_i einfach sind. Es folgt $I = \{0\}$ und damit, dass L halbeinfach ist. ■

Korollar 2.17 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- $L = [L, L]$
- *Jedes homomorphe Bild von L ist halbeinfach.*
- *Jedes Ideal von L ist direkte Summe von einfachen Idealen von L.*

Beweis: Es sei $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$ die Zerlegung von L in einfache Ideale. Dann gilt

$$[L, L] = [L_1, L_1] \oplus \ldots \oplus [L_m, L_m] = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m = L.$$

Um zu zeigen, dass jedes homomorphe Bild von L halbeinfach ist, genügt es nach dem Homomorphiesatz zu zeigen, dass L/I halbeinfach ist für jedes Ideal von L. Nach Lemma 2.15 gilt aber $L = I \oplus I^\perp$, womit L/I isomorph ist zu $I^\perp$. Die letzte Behauptung folgt schließlich aus dem Umstand, dass jedes Ideal K eines Ideals I von L auch ein Ideal von L ist. ■

Eine weitere wichtige Anwendung von Cartans Kriterium für Halbeinfachheit ist die folgende Aussage, die zeigt, dass jede Derivation einer halbeinfachen Lie Algebra eine innere Derivation ist.

Satz 2.18 *Ist L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, dann gilt* $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$.

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass $\operatorname{ad} L \subseteq \operatorname{Der} L$ ein Ideal in der Unteralgebra $\operatorname{Der} L$ von $\mathfrak{gl}(L)$ bildet. Da L halbeinfach ist, gilt

$$\ker \operatorname{ad} = Z(L) = \{0\}.$$

Damit ist $\operatorname{ad} : L \to \operatorname{Der} L$ injektiv und $\operatorname{ad} L$ als isomorphes Bild der halbeinfachen Lie Algebra L selbst halbeinfach. Um zu zeigen, dass $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$, genügt es nachzuweisen, dass $(\operatorname{ad} L)^\perp = \{0\}$. Es bezeichne κ die Killing Form von $\operatorname{Der} L$. Nach Cartans Kriterium für Halbeinfachheit und Lemma 2.13 ist κ nicht ausgeartet auf $\operatorname{ad} L$, woraus $(\operatorname{ad} L)^\perp \cap \operatorname{ad} L = \{0\}$ und damit $[(\operatorname{ad} L)^\perp, \operatorname{ad} L] = \{0\}$ folgt. Daher gilt für $D \in (\operatorname{ad} L)^\perp$ und $\operatorname{ad} x \in \operatorname{ad} L$,

$$0 = [D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} D(x).$$

Da ad injektiv ist, folgt $D(x) = 0$ für alle $x \in L$, also $D = 0$. ■

Mit Hilfe von Satz 2.18 können wir nun eine Jordan Zerlegung der Elemente einer beliebigen halbeinfachen Lie Algebra einführen.

Satz 2.19 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $x \in L$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Es gibt eindeutig bestimmte Elemente $x_s, x_n \in L$, wobei x_n ad-nilpotent und x_s ad-halbeinfach ist, mit

$$x = x_s + x_n \qquad \text{und} \qquad [x_s, x_n] = 0.$$

Die Darstellung $x = x_s + x_n$ heißt abstrakte Jordan Zerlegung *von x.*

(ii) Ist $[x, y] = 0$ für ein $y \in L$, dann gilt auch $[x_s, y] = 0$ und $[x_n, y] = 0$.

Beweis: (i) Es sei $\operatorname{ad} x = s + n$ die gewöhnliche Jordan Zerlegung von $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(L)$. Da $\operatorname{ad} x$ eine Derivation von L ist, sind nach Korollar 2.9 auch s und n Derivationen von L. Da $\ker \operatorname{ad} = Z(L) = \{0\}$, ist ad injektiv und nach Satz 2.18 gilt $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$. Damit gibt es aber eindeutig bestimmte Elemente $x_s, x_n \in L$ mit

$$\operatorname{ad} x = s + n = \operatorname{ad} x_s + \operatorname{ad} x_n = \operatorname{ad}(x_s + x_n),$$

womit $x = x_s + x_n$. Da weiters $\operatorname{ad}[x_s, x_n] = [\operatorname{ad} x_s, \operatorname{ad} x_n] = 0$, folgt $[x_s, x_n] = 0$. Die Eindeutigkeit von x_s und x_n folgt aus der Eindeutigkeit der gewöhnlichen Jordan Zerlegung von $\operatorname{ad} x$.

(ii) Es sei $y \in L$ mit $(\operatorname{ad} x)(y) = 0$. Nach Satz 2.6 können s und n durch Polynome in $\operatorname{ad} x$ dargestellt werden. Damit ist $n(y) = c_0 y$, wobei c_0 den konstanten Term in der Polynomdarstellung von n bezeichnet. Da aber n nilpotent ist, folgt $c_0 = 0$. Daher ist $n(y) = 0$ und damit auch $s(y) = (\operatorname{ad} x - n)(y) = 0$. ■

Bemerkungen.

(a) Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $x \in L$ mit abstrakter Jordan Zerlegung $x = x_s + x_n$, dann heißt x_s der *halbeinfache Teil* von x und x_n der *nilpotente Teil* von x. Wir nennen x *halbeinfach*, wenn $x_n = 0$.

(b) Ist L eine halbeinfache lineare Lie Algebra, so liegt mit dem Begriff der „abstrakten Jordan Zerlegung“ eine potentielle Doppeldeutigkeit vor, da wir für jedes Element von L auch die gewöhnliche Jordan Zerlegung betrachten können. Wir werden im nächsten Abschnitt über Darstellungen sehen, dass diese beiden Zerlegungen jedoch in diesem Fall stets übereinstimmen.

3 Darstellungen halbeinfacher Lie Algebren

Im Folgenden geben wir eine Einführung in die Darstellungstheorie von Lie Algebren. Dabei untersuchen wir die verschiedenen Möglichkeiten, wie abstrakte Lie Algebren als Unteralgebren von allgemeinen linearen Algebren über endlich-dimensionalen Vektorräumen angesehen werden können. Wir studieren wieder insbesondere die halbeinfachen Lie Algebren über $\mathbb{C}$ mit Hilfe ihrer adjungierten Darstellungen.

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition dieses Abschnitts:

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Eine *Darstellung* von L ist ein Lie Algebren Homomorphismus $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$, wobei V ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Ist ϕ eine Darstellung der Lie Algebra L, so bildet der Kern von ϕ ein Ideal von L und das Bild $\phi(L)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Durch den Übergang von L zur linearen Lie Algebra $\phi(L)$ verliert man im Allgemeinen Information über L, außer die Darstellung ϕ ist injektiv. Dies motiviert die folgende

Definition. Eine Darstellung ϕ einer Lie Algebra heißt *treu*, wenn ϕ injektiv ist.

Beispiele.

(a) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Die Abbildung $\phi : L \to \mathfrak{gl}(\mathbb{K})$ definiert durch $\phi(x) = 0$ für alle $x \in L$ heißt die *triviale* Darstellung von L. Offenbar ist ϕ für von Null verschiedenes L nicht treu.

(b) Es sei L eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Die Abbildung $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ definiert durch $\phi(x) = x$ für alle $x \in L$ heißt die *natürliche* Darstellung von L. Offenbar ist ϕ treu.

(c) Die *adjungierte* Darstellung einer Lie Algebra L über $\mathbb{K}$ ist definiert durch

$$\mathrm{ad} : L \to \mathfrak{gl}(L), \qquad (\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y].$$

Da $\ker \mathrm{ad} = Z(L)$, ist ad genau dann treu, wenn $Z(L) = \{0\}$.

Es erweist sich oft als nützlich neben der Sprache der Darstellungen auch die dazu äquivalente Sprache der Module zu verwenden.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Ein *Modul* über L, oder kurz *L-Modul*, ist ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum V über $\mathbb{K}$ versehen mit einer bilinearen Operation

$$\cdot : L \times V \to V, \quad (x, v) \mapsto x \cdot v,$$

die der folgenden Bedingung genügt:

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v), \qquad x, y \in L,\, v \in V.$$

Darstellungen und L-Module einer Lie Algebra L beschreiben auf zwei verschiedene Arten dieselben Strukturen: Sei $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung der Lie Algebra L. Setzen wir für $x \in L$ und $v \in V$

$$x \cdot v := \phi(x)(v),$$

so wird V zu einem L-Modul. Es gilt nämlich für $x, y \in L$ und $v \in V$

$$[x, y] \cdot v = \phi([x, y])(v) = [\phi(x), \phi(y)](v) = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

Ist umgekehrt V ein L-Modul, so definiert

$$\phi : L \to \mathfrak{gl}(V), \quad \phi(x)(v) = x \cdot v$$

eine Darstellung von L.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und V ein L-Modul. Ein *Untermodul* von V ist ein Unterraum U von V, der invariant ist unter L, d.h. für alle $x \in L$ und $u \in U$ ist auch $x \cdot u \in U$.

Beispiele.

(a) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Durch die adjungierte Darstellung wird L zu einem L-Modul. Die Untermodule von L sind genau die Ideale von L.

(b) Sind U und W Untermodule von V, dann sind auch $U + W$ und $U \cap W$ Untermodule von V.

(c) Es bezeichne $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ die Lie Algebra der oberen $n \times n$ Dreiecksmatrizen. Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ wird durch die gewöhnliche Matrixmultiplikation zu einem $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$-Modul. Bezeichnen $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{K}^n$ und $U_m := \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$, dann ist U_m ein Untermodul von $\mathbb{K}^n$.

(d) Es sei L eine auflösbare Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von L. Dann ist $\phi(L)$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Nach Satz 2.2 besitzt der L-Modul V einen 1-dimensionalen Untermodul.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und V ein L-Modul. Ist U ein Untermodul von V, so wird der Faktorraum V/U, versehen mit

$$x \cdot (v + U) := (x \cdot v) + U, \qquad x \in L,\ v \in V$$

zu einem L-Modul, genannt *Faktormodul* von V nach U.

Bemerkung.

(a) Die Aktion von L auf V/U ist wohldefiniert, für $v + U = v' + U$ gilt nämlich

$$(x \cdot v) + U - (x \cdot v') + U = x \cdot (v - v') + U = 0 + U$$

da $v - v' \in U$ und U invariant unter L ist.

Beispiel.

Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und I ein Ideal von L. Dann ist I ein Untermodul des L-Moduls L unter der adjungierten Darstellung. Der Faktormodul L/I wird zu einem L-Modul via

$$x \cdot (y+I) := (\operatorname{ad} x)(y) + I = [x,y] + I = [x+I, y+I].$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass der Faktormodul L/I gerade mit dem L/I-Modul L/I unter der adjungierten Darstellung übereinstimmt.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Ein L-Modul V heißt *irreduzibel*, wenn V von Null verschieden ist und nur die Untermodule $\{0\}$ und V besitzt.

Bemerkungen.

(a) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Ein L-Modul V ist genau dann irreduzibel, wenn für jeden von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ gilt

$$V = \operatorname{span}\{x_1 \cdot (x_2 \cdot \ldots \cdot (x_m \cdot v) \ldots) : x_1, \ldots, x_m \in L,\, m \geq 0\}.$$

(b) Ist V ein von Null verschiedener L-Modul, dann ist jeder von Null verschiedene Untermodul U von V von minimaler Dimension irreduzibel. Der Faktormodul V/U besitzt daher wieder einen irreduziblen Untermodul, usw. In gewissem Sinn, bilden die irreduziblen L-Module daher die Bausteine für alle endlich dimensionalen L-Module.

Beispiele.

(a) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Jeder 1-dimensionale L-Modul ist irreduzibel. Insbesondere ist die triviale Darstellung irreduzibel.

(b) Ist L eine einfache Lie Algebra über $\mathbb{K}$, dann ist der L-Modul L unter der adjungierten Darstellung irreduzibel.

(c) Ist L eine auflösbare Lie Algebra über $\mathbb{C}$, dann folgt aus Satz 2.2, dass alle irreduziblen Darstellungen von L die Dimension 1 haben.

Sind U und W beliebige L-Module, so wird die Vektorraum direkte Summe $U \oplus W$ von U und W durch

$$x \cdot (u+w) = x \cdot u + x \cdot w, \qquad x \in L,\, u \in U,\, w \in W$$

zu einem L-Modul $U \oplus W$, genannt die *direkte Summe* der L-Module U und W.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Ein L-Modul V heißt *unzerlegbar*, wenn es keine von Null verschiedenen Untermodule $U, W \subseteq V$ gibt mit $V = U \oplus W$.

Ein L-Modul V heißt *vollständig reduzierbar*, wenn es irreduzible Untermodule $S_1, \ldots, S_m \subseteq V$ gibt mit

$$V = S_1 \oplus \ldots \oplus S_m.$$

Bemerkung.

(a) Ein L-Modul V ist genau dann vollständig reduzierbar, wenn es zu jedem Untermodul U von V ein Untermodul W gibt mit $V = U \oplus W$.

Beispiele.

(a) Jedes irreduzible L-Modul ist unzerlegbar.

(b) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Die Lie Algebra L wird zu einem L-Modul via der adjungierten Darstellung. Ist L einfach, so ist L irreduzibel als L-Modul. Ist L halbeinfach, so ist L nach Satz 2.16 vollständig reduzierbar.

(c) Es bezeichne $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$ die Lie Algebra der $n \times n$ Diagonalmatrizen. Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ wird durch die gewöhnliche Matrixmultiplikation zu einem $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$-Modul. Bezeichnen $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{K}^n$ und $S_i := \operatorname{span}\{e_i\}$, dann sind die S_i irreduzible Untermodule von $\mathbb{K}^n$ und es gilt $\mathbb{K}^n = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$. Der $\mathfrak{d}(n, \mathbb{K})$-Modul $\mathbb{K}^n$ ist also vollständig reduzierbar.

(d) Die einzigen von Null verschiedenen Untermodule des $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$-Moduls $\mathbb{K}^n$ sind die Untermodule $U_m = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_m\}$. Damit ist der $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$-Modul $\mathbb{K}^n$ unzerlegbar, aber für $n \geq 2$ nicht irreduzibel.

Neben Faktormodulen und direkten Summen gibt es noch eine Vielzahl weiterer Möglichkeiten neue Module aus vorhandenen zu konstruieren. Exemplarisch geben wir hier noch zwei Beispiele an:

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und V ein L-Modul. Der Dualraum V^* von V versehen mit

$$(x \cdot \nu)(v) = -\nu(x \cdot v), \qquad x \in L,\, \nu \in V^*,\, v \in V,$$

wird zu einem L-Modul, genannt der zu V *duale L-Modul*.

Sind V und W beliebige L-Module, dann wird der Vektorraum $\operatorname{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W zu einem L-Modul durch die Festlegung

$$(x \cdot \xi)(v) = x \cdot \xi(v) - \xi(x \cdot v).$$

Der enge Zusammenhang zwischen Idealen und Lie Algebren Homomorphismen besitzt ein Analogon für Untermodule und Homomorphismen von L-Modulen.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und V und W beliebige L-Module. Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ heißt *L-Modul Homomorphismus*, wenn für alle $x \in L$ und $v \in V$

$$\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v).$$

Ist ϕ bijektiv, so nennen wir ϕ einen *L-Modul Isomorphismus*.

Bemerkungen.

(a) Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ und $\psi : L \to \mathfrak{gl}(W)$ seien Darstellungen von L. Ist $\phi : V \to W$ ein L-Modul Homomorphismus, dann ist

$$\phi \circ \varphi = \psi \circ \phi.$$

(b) Ist ϕ ein L-Modul Homomorphismus von V und W, dann ist der Kern von ϕ ein Untermodul von V und das Bild von ϕ ein Untermodul von W.

Der Standard Homomorphiesatz für L-Module hat folgende Form:

Satz 3.1 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- *Ist $\phi : V \to W$ ein L-Modul Homomorphismus, dann ist*

  $$V/\ker\phi \cong \operatorname{im}\phi.$$

  Ist $U \subseteq \ker\phi$ ein Untermodul von V, dann gibt es einen eindeutig bestimmten L-Modul Homomorphismus $\psi : V/U \to W$, sodass $\phi = \pi \circ \psi$.
- *Sind U, W Untermodule eines L-Moduls V, dann ist $(U+W)/W \cong U/(U\cap W)$.*
- *Sind U, W Untermodule eines L-Moduls V und gilt $U \subseteq W$, dann ist W/U ein Untermodul von V/U und $(V/U)/(W/U) \cong V/W$.*

Um die Struktur von L-Modulen einer Lie Algebra L zu verstehen, brauchen wir zwischen isomorphen L-Modulen nicht zu unterscheiden. Wir betrachten zunächst Homomorphismen zwischen irreduziblen L-Modulen, da diese die Bausteine für alle endlich dimensionalen L-Module bilden.

Proposition 3.2 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{K}$ und U, V irreduzible L-Module. Dann ist jeder von Null verschiedene L-Modul Homomorphismus zwischen U und V ein L-Modul Isomorphismus. Insbesondere, gibt es zwischen nicht isomorphen irreduziblen L-Modulen keine von Null verschiedenen L-Modul Homomorphismen.*

Beweis: Es sei $\phi : U \to V$ ein von Null verschiedener L-Modul Homomorphismus. Dann ist das Bild von ϕ ein von Null verschiedener Untermodul von V und $\ker\phi$ ein Untermodul von U. Da U und V irreduzibel sind, folgt die Bijektivität von ϕ. ■

Das folgende Lemma ist eines der nützlichsten Werkzeuge bei der Untersuchung irreduzibler L-Module.

Lemma von Schur. *Sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und V ein irreduzibler L-Modul. Eine Abbildung $\phi : V \to V$ ist genau dann ein L-Modul Homomorphismus, wenn $\phi = \lambda\,\mathrm{Id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Für $\phi = \lambda\,\mathrm{Id}$ ist die Aussage trivial. Es sei daher umgekehrt $\phi : V \to V$ ein L-Modul Homomorphismus. Da ϕ eine lineare Abbildung eines komplexen Vektorraumes in sich ist, besitzt ϕ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Abbildung $\phi - \lambda\,\mathrm{Id}$ ist dann ebenfalls ein L-Modul Homomorphismus, dessen Kern einen Eigenvektor von ϕ enthält und damit ein von Null verschiedener Untermodul von V ist. Da V irreduzibel ist, folgt $V = \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{Id})$ also $\phi = \lambda\,\mathrm{Id}$. ■

Bemerkung.

(a) Eine äquivalente Formulierung des Lemmas von Schur lautet wie folgt:

Sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung von L. Ist $\xi \in \mathfrak{gl}(V)$ mit $\phi(x) \circ \xi = \xi \circ \phi(x)$ für alle $x \in L$, dann gilt $\xi = \lambda \,\mathrm{Id}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Unter den vielen Anwendungen des Lemmas von Schur greifen wir als erstes Beispiel das folgende Resultat heraus.

Proposition 3.3 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und V ein irreduzibler L-Modul. Dann gibt es zu jedem $z \in Z(L)$ eine Zahl $\lambda_z \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot v = \lambda_z v$ für alle $v \in V$.*

Beweis: Für $z \in Z(L)$ und beliebiges $x \in L$ gilt

$$z \cdot (x \cdot v) = x \cdot (z \cdot v) + [z, x] \cdot v = x \cdot (z \cdot v).$$

Damit ist die Abbildung $v \mapsto z \cdot v$ ein L-Modul Homomorphismus. Die Behauptung folgt damit aus dem Lemma von Schur. ■

Korollar 3.4 *Jeder irreduzible L-Modul einer abelschen Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ ist 1-dimensional.*

Beweis: Es sei V ein irreduzibler L-Modul. Da L abelsch ist gilt $Z(L) = L$. Nach Proposition 3.3 spannt daher jedes von Null verschiedene $v \in V$ einen Untermodul U_v von V der Dimension 1 auf. Da V irreduzibel ist, folgt $V = U_v$. ■

Wie die natürliche Darstellung der auflösbaren Lie Algebra $\mathfrak{t}(n, \mathbb{K})$ illustriert, sind nicht alle L-Module vollständig reduzierbar. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass jedoch jede Darstellung von halbeinfachen Lie Algebren über $\mathbb{C}$ eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ist. Wir benötigen dazu einige Vorbereitungen.

Das entscheidende Hilfsmittel für den Beweis der Aussage, dass jede halbeinfache komplexe Lie Algebra eine direkte Summe von einfachen Lie Algebren ist (oder, äquivalent dazu, dass ihre adjungierte Darstellung vollständig reduzierbar ist), war die Killing Form. Wir benötigen nun folgende Verallgemeinerung:

Definition. Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von L. Die symmetrische Bilinearform $\kappa_\phi : L \times L \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\kappa_\phi(x, y) := \mathrm{tr}(\phi(x) \circ \phi(y)), \qquad x, y \in L,$$

heißt die *Spurform* von ϕ.

Bemerkung.

(a) Ist $\phi = \mathrm{ad}$, dann ist $\kappa_\phi = \kappa$ gerade die Killing Form von L.

Die Spurform einer Darstellung besitzt die folgenden Eigenschaften:

Proposition 3.5 *Es sei L eine Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von L. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für die Spurform κ_ϕ von ϕ gilt

$$\kappa_\phi([x,y],z) = \kappa_\phi(x,[y,z]), \qquad x,y,z \in L.$$

(ii) Das Radikal $L^\perp$ von κ_ϕ ist ein Ideal von L.

(iii) Ist L halbeinfach und ϕ treu, dann ist κ_ϕ nicht ausgeartet.

Beweis: Aus der Spuridentität $\operatorname{tr}([x,y]\circ z) = \operatorname{tr}(x \circ [y,z])$ für $x,y,z \in \mathfrak{gl}(V)$ folgt sofort Eigenschaft (i). Das Radikal von κ_ϕ ist definiert durch

$$L^\perp := \{x \in L : \kappa_\phi(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in L\}.$$

Damit folgt aus (i) direkt (ii). Um schließlich (iii) zu zeigen, verwenden wir, dass $\kappa_\phi(x,y) = 0$ für alle $x,y \in L^\perp$, nach Satz 2.10 die Auflösbarkeit von $\phi(L^\perp)$ impliziert. Da ϕ treu ist, ist damit auch $L^\perp$ auflösbar also, da L halbeinfach ist, $L^\perp = \{0\}$. ■

Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine treue Darstellung von L. Bezeichnet κ_ϕ die Spurform von ϕ und $\{x_1,\dots,x_n\}$ eine Basis von L, dann gibt es eine eindeutig bestimmte duale Basis $\{y_1,\dots,y_n\}$ bezüglich κ_ϕ mit

$$\kappa_\phi(x_i,y_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Es sei nun $x \in L$ beliebig und

$$[x_i,x] = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \qquad \text{und} \qquad [y_k,x] = \sum_{l=1}^n b_{kl}y_l.$$

Dann folgt aus Proposition 3.5 (i)

$$a_{ik} = \kappa_\phi([x_i,x],y_k) = \kappa_\phi(x_i,[x,y_k]) = -\kappa_\phi(x_i,[y_k,x]) = -b_{ki}. \tag{3.1}$$

Mit Hilfe (bezüglich der Spurform) dualer Basen können wir nun einen wichtigen Operator auf L-Modulen definieren:

Definition. Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine treue Darstellung von L. Der *Casimir Operator* bezüglich ϕ ist die lineare Abbildung $c_\phi : V \to V$ definiert durch

$$c_\phi = \sum_{i=1}^n \phi(x_i) \circ \phi(y_i),$$

wobei $\{x_1,\dots,x_n\}$ und $\{y_1,\dots,y_n\}$ bezüglich der Spurform κ_ϕ duale Basen sind.

Proposition 3.6 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine treue Darstellung von L. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- *Der Casimir Operator c_ϕ ist ein L-Modul Homomorphismus.*
- *Es gilt* $\operatorname{tr} c_\phi = \dim L$.

Beweis: Für $x \in L$ und $v \in V$ gilt

$$c_\phi(x \cdot v) - x \cdot c_\phi(v) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_i \cdot (x \cdot v)) - \sum_{i=1}^n x \cdot (x_i \cdot (y_i \cdot v)).$$

Addition von $-x_i \cdot (x \cdot (y_i \cdot v)) + x_i \cdot (x \cdot (y_i \cdot v)) = 0$ zu jedem Summand und Identität (3.1) zeigt daher

$$c_\phi(x \cdot v) - x \cdot c_\phi(v) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot ([y_i, x] \cdot v) + \sum_{i=1}^n [x_i, x] \cdot (y_i \cdot v) = 0.$$

Weiters gilt

$$\operatorname{tr} c_\phi = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\phi(x_i) \circ \phi(y_i)) = \sum_{i=1}^n \kappa_\phi(x_i, y_i) = n = \dim L.$$

■

Bemerkungen.

(a) Ist die Darstellung $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ irreduzibel, dann gilt nach dem Lemma von Schur für den Casimir Operator $c_\phi = \lambda \, \mathrm{Id}$ mit $\lambda = \dim L / \dim V$.

(b) Der Casimir Operator c_ϕ ist unabhängig von der Wahl der dualen Basen. Dies folgt aus (a) im Falle einer irreduziblen Darstellung und aus dem Satz von Weyl (siehe unten) sonst.

(c) Ist die Darstellung $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ nicht treu, so definieren wir den Casimir Operator c_ϕ wie folgt: Als Ideal von L ist $\ker\phi$ eine Summe von einfachen Idealen von L und es gilt $L = \ker\phi \oplus L'$, wobei L' ebenfalls Summe von einfachen Idealen von L und damit halbeinfach ist. Die Einschränkung ϕ' von ϕ auf L' ist dann eine treue Darstellung von L' und es gilt $\phi(L) = \phi'(L')$. Wir definieren daher $c_\phi := c_{\phi'}$.

Beispiel.

Wir betrachten wieder $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit der natürlichen Darstellung $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$. Die zur Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

duale Basis bezüglich der Spurform κ_ϕ ist gegeben durch $\{y, x, \frac{1}{2}z\}$. Der Casimir Operator c_ϕ hat daher die Form

$$c_\phi = x \circ y + y \circ x + \frac{1}{2} z \circ z = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Bevor wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts kommen, notieren wir noch ein einfaches aber nützliches Hilfsresultat:

Lemma 3.7 *Ist $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung einer halbeinfachen Lie Algebra L über $\mathbb{C}$, dann ist $\phi(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$. Insbesondere ist jede eindimensionale Darstellung von L trivial.*

Beweis: Nach Korollar 2.17 ist $L = [L, L]$, womit die Behauptung aus $[\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)] = \mathfrak{sl}(V)$ folgt. ■

Satz von Weyl. *Die Darstellungen einer halbeinfachen Lie Algebra über $\mathbb{C}$ sind vollständig reduzierbar.*

Beweis: Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von L. Es sei weiters $W \subseteq V$ ein (eigentliches) Untermodul von V. Wir müssen zeigen, dass es ein Untermodul U von V gibt mit $V = U \oplus W$. Wir können annehmen, dass die Darstellung ϕ treu ist. Wäre das nicht der Fall, so ersetzen wir L durch die nach Korollar 2.17 halbeinfache Lie Algebra $L/\ker\phi$ und machen V zu einem $L/\ker\phi$-Modul durch $(x + \ker\phi)\cdot v := x \cdot v$ für $x \in L$, $v \in V$. Offenbar ist V genau dann vollständig reduzierbar als L-Modul, wenn V vollständig reduzierbar ist als $L/\ker\phi$-Modul.

Wir nehmen zunächst $\dim W = \dim V - 1$ an. In diesem Fall hat der Faktormodul V/W die Dimension 1 und ist daher nach Lemma 3.7 trivial. Dies bedeutet nun

$$x \in L, v \in V \quad\Longrightarrow\quad x \cdot v \in W. \tag{3.2}$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $\dim W$. Für den Induktionsstart können wir W als irreduzibel annehmen. Es sei $c_\phi : V \to V$ der Casimir Operator bezüglich ϕ, dann folgt aus (3.2), $c_\phi(v) \in W$ für alle $v \in V$. Insbesondere, ist c_ϕ nicht surjektiv, und damit $\ker c_\phi$ nicht Null. Da c_ϕ ein L-Modul Homomorphismus ist, ist $\ker c_\phi$ ein Untermodul von V. Die Einschränkung von c_ϕ auf W ist auch ein L-Modul Homomorphismus. Da W irreduzibel ist, gibt es nach dem Lemma von Schur ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $c_\phi(w) = \lambda w$ für alle $w \in W$. Aus $c_\phi(V) \subseteq W$ und Proposition 3.6 folgt $\dim L = \operatorname{tr} c_\phi = \lambda \dim W$, also $\lambda \neq 0$. Damit ist aber $W \cap \ker c_\phi = \{0\}$ und $V = \ker c_\phi \oplus W$.

Es sei nun W nicht irreduzibel und W' ein eigentliches Untermodul von W. Nach dem Homomorphiesatz für L-Module ist W/W' ein Untermodul von V/W' und

$$(V/W')/(W/W') \cong V/W.$$

Insbesondere hat $(V/W')/(W/W')$ Dimension 1. Da $\dim V/W' < \dim V$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung daher einen eindimensionalen Untermodul $\bar{U}$ von V/W' mit

$$V/W' = W/W' \oplus \bar{U}. \tag{3.3}$$

Setzen wir $U := \{v \in V : v + W' \in \bar{U}\}$, dann ist U ein Untermodul von V mit $U/W' = \bar{U}$ und $\dim U = 1 + \dim W'$. Da W' ein eigentliches Untermodul von W ist, gilt $\dim U < \dim V$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher ein Untermodul U' von U mit $U = W' \oplus U'$ und $\dim U' = 1$. Bezeichnet $\pi : V \to V/W'$ die kanonische Projektion, so folgt aus (3.3), dass $\pi(W \cap U) = \{0\}$, also $W \cap U \subseteq W'$. Damit gilt aber $W \cap U' \subseteq W' \cap U' = \{0\}$ und daher $V = W \oplus U'$.

Es sei nun W ein (eigentlicher) Untermodul von V beliebiger Dimension. Es sei $\mathrm{Hom}(V,W)$ der L-Modul linearer Abbildungen von V nach W. Wir definieren weiters

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{s}} &:= \{\psi \in \mathrm{Hom}(V,W) : \psi|W = \lambda\,\mathrm{Id}_W \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}\},\\ \mathrm{Hom}_0 &:= \{\psi \in \mathrm{Hom}(V,W) : \psi|W = 0\}.\end{aligned}$$

Dann sind $\mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}$ und Hom_0 Untermodule von $\mathrm{Hom}(V,W)$ mit $\mathrm{Hom}_0 \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}$. Offenbar liegt die Projektion von V auf W in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}$ aber nicht in Hom_0. Die Nebenklasse von Proj_W in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}/\mathrm{Hom}_0$ ist daher von Null verschieden. Für beliebiges $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}$ mit $\psi|W = \lambda\,\mathrm{Id}_W$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\psi - \lambda\,\mathrm{Proj}_W$ ein Element von Hom_0. Damit gilt aber $\psi + \mathrm{Hom}_0 = \lambda\,\mathrm{Proj}_W + \mathrm{Hom}_0$. Insbesondere, ist $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}/\mathrm{Hom}_0 = 1$.

Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es daher einen Untermodul U von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{s}}$ mit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{s}} = \mathrm{Hom}_0 \oplus U$. Da $\dim U = 1$ ist U nach Lemma 3.7 ein trivialer L-Modul. Daher gibt es ein von Null verschiedenes Element $\psi \in U$ mit $(x\cdot\psi)(v) = x\cdot\psi(v) - \psi(x\cdot v) = 0$ für alle $x \in L$, $v \in V$. Dies bedeutet, dass die Abbildung $\psi : V \to W$ ein L-Modul Homomorphismus ist. Durch Skalierung können wir weiters $\psi|W = \mathrm{Id}_W$ erreichen. Da $\psi : V \to W$ ein L-Modul Homomorphismus ist, ist $\ker\psi$ ein Untermodul von V. Für $v \in \ker\psi \cap W$ ist $\psi(v) = 0 = v$. Damit ist $\ker\psi \cap W = \{0\}$. Da aber $\psi(V) \subseteq W$ folgt $V = W \oplus \ker\psi$. ■

Bemerkung.

(a) Ist die adjungierte Darstellung einer Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ vollständig reduzierbar und besitzt L keine eindimensionalen Ideale, dann ist L halbeinfach.

Beweis: Da L als L-Modul bezüglich der adjungierten Darstellung vollständig reduzierbar ist, gibt es irreduzible Ideale $L_1, \ldots, L_m$ mit $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$. Da die Ideale L_i irreduzibel sind und $\dim L_i \geq 2$, sind die L_i einfach, womit L nach Satz 2.16 halbeinfach ist. ■

Als erste Anwendung des Satzes von Weyl können wir nun zeigen, dass die abstrakte Jordan Zerlegung der Elemente einer halbeinfachen Lie Algebra mit ihren verschiedenen linearen Darstellungen verträglich ist.

Satz 3.8 *Es sei $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache lineare Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $x \in L$ beliebig. Bezeichnet $x = x_s + x_n$ die gewöhnliche Jordan Zerlegung von x in $\mathfrak{gl}(V)$, dann gilt $x_s, x_n \in L$. Insbesondere, stimmen die abstrakte und gewöhnliche Jordan Zerlegung auf L überein.*

Beweis: Da $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x)(L) \subseteq L$, gilt nach Korollar 2.8 und Satz 2.6 auch $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_s)(L) \subseteq L$ und $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x_n)(L) \subseteq L$. Es sei nun $N := \{y \in \mathfrak{gl}(V) : [y,L] \subseteq L\}$. Dann ist N eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, welche L als Ideal enthält und es gilt $x_s, x_n \in N$. Für ein beliebiges L-Untermodul W von V definieren wir weiters

$$\mathrm{gl}(W) := \{y \in \mathfrak{gl}(V) : y(W) \subseteq W \text{ und } \mathrm{tr}(y|W) = 0\}.$$

Aus Lemma 3.7 folgt $L \subseteq \mathrm{gl}(W)$ für jeden L-Untermodul W von V. Schließlich setzen wir noch

$$L' := N \cap \{\mathrm{gl}(W) : W \ L\text{-Untermodul von } V\}.$$

Offenbar ist L' eine Unteralgebra von N, die L als Ideal enthält. (L' ist echt enthalten in N, da N im Gegensatz zu L' die Vielfachen der Identität enthält). Ist $x \in L$ und W ein beliebiger L-Untermodul von V, dann ist W nach Satz 2.6 auch invariant unter x_s und x_n und nach Lemma 3.7 gilt $\operatorname{tr} x = \operatorname{tr} x_s = \operatorname{tr} x_n = 0$ (als Abbildungen von W in sich), womit $x_s, x_n \in L'$.

Wir wollen nun zeigen, dass $L = L'$. Da L' ein L-Modul bezüglich der adjungierten Darstellung ist, gibt es nach dem Satz von Weyl ein Untermodul U von L' mit $L' = L \oplus U$. Da aber $[L, L'] \subseteq L$ ist die Darstellung von L auf U trivial, d.h. $[L, y] = 0$ für alle $y \in U$. Ist nun W ein irreduzibler L-Untermodul von V und $y \in U$, dann folgt aus $[L, y] = 0$, nach dem Lemma von Schur, dass $y : W \to W$ ein Vielfaches der Identität sein muss. Da aber $y \in L'$, folgt aus $\operatorname{tr}(y|W) = 0$, dass $y|W = 0$. Nach dem Satz von Weyl kann aber V als direkte Summe von irreduziblen L-Untermodulen geschrieben werden, womit $y = 0$ und damit $L = L'$ folgt. Damit haben wir $x_s, x_n \in L$ gezeigt.

Da schließlich nach Satz 2.6 und Satz 2.19, die gewöhnliche und die abstrakte Jordan Zerlegung der Elemente von L eindeutig sind, müssen diese nun übereinstimmen. ■

Korollar 3.9 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von L. Bezeichnet $x = x_s + x_n$ die abstrakte Jordan Zerlegung eines Elements $x \in L$, dann ist die gewöhnliche Jordan Zerlegung von $\phi(x)$ gegeben durch $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$.*

Beweis: Nach Korollar 2.17 ist $\phi(L)$ eine halbeinfache Lie Algebra. Da die Eigenvektoren von $\operatorname{ad}_L x_s$ ganz L aufspannen, spannen die Eigenvektoren von $\operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi(x_s)$ auch die Lie Algebra $\phi(L)$ auf. Damit ist $\operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi(x_s)$ halbeinfach.

Angenommen $(\operatorname{ad}_L x_n)^m = 0$. Dann gilt für $y \in L$

$$(\operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi(x_n))^m(\phi(y)) = \phi((\operatorname{ad}_L x_n)^m(y)) = 0.$$

Damit ist $\operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi(x_n)$ nilpotent. Darüber hinaus gilt

$$[\operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi(x_s), \operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi(x_n)] = \operatorname{ad}_{\phi(L)}\phi([x_s, x_n]) = 0.$$

Nach Satz 2.19 ist damit die abstrakte Jordan Zerlegung von $\phi(x)$ gegeben durch $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ und die Behauptung folgt aus Satz 3.8. ■

Mit Hilfe des Satzes von Weyl untersuchen wir im Folgenden die Struktur einer halbeinfachen komplexen Lie Algebra via ihrer adjungierten Darstellung. Wir werden sehen, dass diese Struktur zu einem großen Teil von den Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ kontrolliert wird. Wir beginnen daher unsere Untersuchungen mit dem Studium der irreduziblen Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, dabei begegnen wir in vereinfachter Form bereits den grundlegenden Ideen, um Darstellungen allgemeiner halbeinfacher Lie Algebren zu verstehen.

Wir verwenden wieder die Standardbasis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gelten dann die Relationen

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = -2x, \quad [y, z] = 2y.$$

Es sei nun V ein beliebiger $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul und $\phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ die zugehörige Darstellung. Nach Korollar 3.9 sind die linearen Abbildungen $\phi(x), \phi(y) : V \to V$ nilpotent und die Abbildung $\phi(z) : V \to V$ halbeinfach (also diagonalisierbar).

Wir nennen eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ein *Gewicht* von z in V, wenn

$$V_\lambda := \{v \in V : z \cdot v = \lambda\, v\}$$

einen von Null verschiedenen Unterraum von V bildet. Der Vektorraum V_λ heißt *Gewichtsraum* von z zum Gewicht λ. Da $\phi(z)$ diagonalisierbar ist, können wir V als direkte Summe von Gewichtsräumen darstellen

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Gewichte von z (also Eigenwerte von $\phi(z)$) sind.

Lemma 3.10 *Es sei V ein $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul und λ ein Gewicht von z.*

- *Für $v \in V_\lambda$ gilt $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$.*
- *Für $v \in V_\lambda$ gilt $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*
- *Es gibt einen Eigenvektor $w \in V$ von $\phi(z)$ mit $x \cdot w = 0$.*

Beweis: Für $v \in V_\lambda$ gilt

$$z \cdot (x \cdot v) = x \cdot (z \cdot v) + [z, x] \cdot v = (\lambda + 2)\, x \cdot v$$

und

$$z \cdot (y \cdot v) = y \cdot (z \cdot v) + [z, y] \cdot v = (\lambda - 2)\, y \cdot v.$$

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind und V ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, gibt es ein $k \geq 0$ mit $x^k \cdot v \neq 0$ und $x^{k+1} \cdot v = 0$. Setzen wir daher $w = x^k \cdot v$, so folgt $z \cdot w = (\lambda + 2k)\, w$ und $x \cdot w = 0$. ■

Wir werden sehen, dass den Eigenvektoren $w \in V$ von $\phi(z)$ mit $x \cdot w = 0$ eine besondere Bedeutung zukommt. Dies motiviert die folgende

Definition. Es sei V ein $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul. Ein Eigenvektor $w \in V$ von $\phi(z)$ mit $x \cdot w = 0$ heißt *Vektor von höchstem Gewicht*. Der zugehörige Eigenwert von $\phi(z)$ heißt *höchstes Gewicht* von z.

Mit Hilfe von Lemma 3.10 sind wir nun in der Lage alle irreduziblen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Module zu beschreiben.

Satz 3.11 *Es sei V ein irreduzibler $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Der Modul V ist eine direkte Summe von Gewichtsräumen von z

$$V = V_{-m} \oplus V_{-m+2} \oplus \ldots \oplus V_{m-2} \oplus V_m,$$

wobei $\dim V = m + 1$ *und* $\dim V_\mu = 1$ *für jedes* $\mu \in \{-m, -m+2, \ldots, m\}$.

(ii) Es gibt einen (bis auf Vielfache) eindeutigen Vektor höchsten Gewichts in V.

(iii) Zu jeder Dimension gibt es (bis auf Isomorphie) höchstens einen irreduziblen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul.

Beweis: Es sei $v_0 \in V_\lambda$ ein Vektor von höchstem Gewicht. Wir setzen für $i \geq 0$,

$$v_{-1} = 0, \qquad \text{und} \qquad v_i = \frac{1}{i!}\, y^i \cdot v_0.$$

Dann gilt offenbar nach Definition für jedes $i \geq 0$,

$$y \cdot v_i = (i+1)\, v_{i+1} \tag{3.4}$$

und nach Lemma 3.10

$$z \cdot v_i = (\lambda - 2i)\, v_i. \tag{3.5}$$

Weiters folgt durch Induktion nach i die Formel

$$x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)\, v_{i-1}. \tag{3.6}$$

Der Induktionsstart $i = 0$ ist klar nach Definition von v_{-1}. Für $i \geq 1$ erhalten wir

$$i\, x \cdot v_i = x \cdot (y \cdot v_{i-1}) = [x, y] \cdot v_{i-1} + y \cdot (x \cdot v_{i-1}) = i\, (\lambda - i + 1)\, v_{i-1}.$$

Nach (3.5) sind alle von Null verschiedenen v_i (als Eigenvektoren von $\phi(z)$) linear unabhängig. Da V endlich dimensional ist, gibt es daher ein $m \in \mathbb{N}$ mit $v_m \neq 0$ und $v_{m+i} = 0$ für alle $i > 0$. Die Formeln (3.4) - (3.6) zusammen zeigen, dass der von $\{v_0, \ldots, v_m\}$ aufgespannte Unterraum von V einen von Null verschiedenen Untermodul bildet. Da V irreduzibel ist, ist dieser Untermodul bereits ganz V. Damit bildet $\{v_0, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V und es gilt $\dim V = m + 1$.

Setzen wir $i = m + 1$ in Formel (3.6) so erhalten wir $0 = (\lambda - m)\, v_m$. Da $v_m \neq 0$ folgt $\lambda = m$. (Das höchste Gewicht von z ist also eine ganze Zahl!) Aus (3.5) folgt nun sofort (i) und (ii). Behauptung (iii) ist schließlich eine Konsequenz aus (ii) und der Konstruktion der Basis $\{v_0, \ldots, v_m\}$. ■

Ist V ein beliebiger (nicht notwendig irreduzibler) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul, so folgt aus dem Satz von Weyl und Satz 3.11, dass alle Eigenwerte von $\phi(z)$ ganze Zahlen sind und jeder Eigenwert gemeinsam mit seinem Negativen auftritt. Da nach Satz 3.11 in jedem irreduziblen $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul entweder das Gewicht 0 oder das Gewicht 1 auftritt, erhalten wir das

Korollar 3.12 *Ist V ein $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul, dann ist die Anzahl der Summanden in jeder Zerlegung von V in irreduzible Untermodule gegeben durch*

$$\dim V_0 + \dim V_1.$$

Nach Satz 3.11 (iii) gibt es zu jeder Dimension bis auf Isomorphie *höchstens* einen irreduziblen $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul. Wir wollen nun zeigen, dass es tatsächlich irreduzible $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Module beliebiger Dimension gibt. Wir könnten dazu im Prinzip Formeln (3.4) - (3.6) verwenden. Irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit höchstem Gewicht m können aber auch auf folgende natürliche Art realisiert werden:

Es sei $\mathbb{C}[X,Y]$ der Vektorraum der Polynome in zwei Variablen X,Y mit komplexen Koeffizienten. Für jedes $m \geq 0$ sei $V(m)$ der Unterraum von $\mathbb{C}[X,Y]$ der homogenen Polynome vom Grad m. Offenbar ist $\dim V(m) = m+1$ und

$$V(m) = \operatorname{span}\{X^m, X^{m-1}Y, \ldots, XY^{m-1}, Y^m\}.$$

Wir definieren nun eine Darstellung $\psi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V(m))$ durch

$$\psi(x) := X\frac{\partial}{\partial Y}, \qquad \psi(y) := Y\frac{\partial}{\partial X}, \qquad \psi(z) = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}.$$

Die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen $\psi(x), \psi(y)$ und $\psi(z)$ bezüglich der Basis $\{X^m, X^{m-1}Y, \ldots, XY^{m-1}, Y^m\}$ von $V(m)$ sind gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m+2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -m \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.13 *Durch die Darstellung ψ wird $V(m)$ zu einem irreduziblen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass ψ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist. Da x,y,z eine Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ bilden, ist ψ nach Konstruktion linear. Die Lie Klammer bleibt unter ψ erhalten, da man durch einfache Rechnung nachweisen kann, dass

$$[\psi(x), \psi(y)] = \psi([x,y]) = \psi(z), \qquad [\psi(z), \psi(x)] = \psi([z,x]) = 2\psi(x)$$

sowie

$$[\psi(z), \psi(y)] = \psi([z,y]) = -2\psi(y).$$

Es sei U nun ein von Null verschiedener Untermodul von $V(m)$. Dann ist $z \cdot u \in U$ für alle $u \in U$. Da $\psi(z)$ als Selbstabbildung von $V(m)$ diagonalisierbar ist, ist die Einschränkung von $\psi(z)$ auf U ebenfalls diagonalisierbar. Damit gibt es einen Eigenvektor von $\psi(z)$ in U. Die Eigenvektoren von $\psi(z)$ sind aber gerade die Monome X^jY^k. Nach Definition von $\psi(x)$ und $\psi(y)$ enthält damit U aber alle Monome und es folgt $U = V(m)$. ■

Bemerkung.

(a) Der (bis auf Vielfache) eindeutig bestimmte Vektor höchsten Gewichts in $V(m)$ ist X^m. Das zugehörige höchste Gewicht ist m.

Da für verschiedene m die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Module $V(m)$ verschiedene Dimension haben, sind sie nach dem Lemma von Schur nicht isomorph. Wir erhalten damit als Konsequenz von Satz 3.11:

Korollar 3.14 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- *Ist V ein irreduzibler $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul, dann ist V isomorph zu einem $V(m)$ für geeignetes m.*
- *Ist V ein beliebiger $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul und $w \in V$ mit $x \cdot w = 0$ und $z \cdot w = m\,w$, dann ist der von w erzeugte Untermodul von V isomorph zu $V(m)$.*

Wir kommen nun zur Untersuchung allgemeiner halbeinfacher Lie Algebren über $\mathbb{C}$. Wir orientieren uns dabei am Beweis von Satz 1.9, in dem wir $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ als eindeutige halbeinfache komplexe Lie Algebra der Dimension 3 charakterisiert haben:

(i) Im ersten Schritt haben wir dabei gezeigt, dass es ein $z \in L$ gibt, für das $\operatorname{ad} z$ diagonalisierbar ist.

(ii) Im zweiten Schritt haben wir die Strukturkonstanten für die Basis bestehend aus den Eigenvektoren von $\operatorname{ad} z$ bestimmt, und so gesehen, dass L isomorph zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist.

Zur Klassifikation allgemeiner halbeinfacher Lie Algebren L über $\mathbb{C}$ müssen wir ein passendes Analogon für das diagonalisierbare Element $z \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ finden. Dabei wird sich die folgende Strategie als zielführend erweisen:

(i) Wir suchen eine abelsche Unteralgebra H von L, die ausschließlich aus halbeinfachen Elementen besteht. Die Abbildungen in $\operatorname{ad} H$ sind dann simultan diagonalisierbar.

(ii) Wir können nun L als direkte Summe der Gewichtsräume der Abbildungen in $\operatorname{ad} H$ darstellen und diese Zerlegung, ausnutzen um Informationen über die Strukturkonstanten von L zu gewinnen.

Es sei also L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und H zunächst eine beliebige abelsche Unteralgebra von L bestehend aus halbeinfachen Elementen. Die Unteralgebra $\operatorname{ad} H$ besteht dann aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden linearen Selbstabbildungen von L. Daher gibt es eine Basis von L bestehend aus gemeinsamen Eigenvektoren der Elemente von $\operatorname{ad} H$.

Ist $x \in L$ ein gemeinsamer Eigenvektor der Elemente von $\operatorname{ad} H$, dann beschreiben wir die zugehörigen Eigenwerte der Elemente von $\operatorname{ad} H$ wieder durch ein *Gewicht* von H, also ein lineares Funktional $\alpha : H \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(\operatorname{ad} h)(x) = \alpha(h)x.$$

Ein Gewicht von H ist also ein Element des Dualraumes H^* von H.

Für jedes $\alpha \in H^*$ setzen wir

$$L_\alpha := \{x \in L : [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in H\}.$$

Ist $\alpha \in H^*$ ein Gewicht, und damit L_α von Null verschieden, so nennen wir L_α einen *Gewichtsraum* zum Gewicht α. Eine Sonderrolle nimmt der Gewichtsraum zum Gewicht Null ein:

$$L_0 = \{x \in L : [h, x] = 0 \text{ für alle } h \in H\}.$$

Da H abelsch ist gilt $H \subseteq L_0$. Ist $S \subseteq L$ eine beliebige Teilmenge von L, so nennt man die Unteralgebra

$$C_L(S) = \{x \in L : [s, x] = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

den *Zentralisator* von S. Es ist also $L_0 = C_L(H)$ der Zentralisator von H in L.

Lemma 3.15 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und H eine abelsche Unteralgebra von L bestehend aus halbeinfachen Elementen. Für $\alpha, \beta \in H^*$ gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Es ist $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$.

(ii) Ist $x \in L_\alpha$ und $\alpha \neq 0$, dann ist $\operatorname{ad} x$ nilpotent.

(iii) Ist $\alpha + \beta \neq 0$, dann gilt $\kappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$ für die Killing Form κ von L.

(iv) Die Einschränkung der Killing Form κ auf L_0 ist nicht ausgeartet.

Beweis: Es sei $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ und $h \in H$, dann gilt

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y],$$

woraus Behauptung (i) folgt. Da L endlich dimensional und eine direkte Summe von Gewichtsräumen ist, folgt (ii) aus (i).
Es sei nun $\alpha + \beta \neq 0$. Dann gibt es ein $h \in H$ mit $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$. Für beliebige $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ gilt aber

$$\alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa([h, x], y) = -\kappa([x, h], y) = -\kappa(x, [h, y]) = -\beta(h)\kappa(x, y),$$

also $(\alpha + \beta)(h)\kappa(x, y) = 0$ und damit $\kappa(x, y) = 0$, womit (iii) gezeigt ist.
Schließlich sei $z \in L_0$ mit $\kappa(z, x) = 0$ für alle $x \in L_0$ und $w \in L$ beliebig. Nach (iii) ist $\kappa(z, y) = 0$ für jedes $y \in L_\alpha$ mit $\alpha \neq 0$. Da L aber eine direkte Summe von Gewichtsräumen ist, folgt damit $\kappa(z, w) = 0$. Da L halbeinfach ist, ist κ nicht ausgeartet auf L, woraus $z = 0$ und damit (iv) folgt. ■

Setzen wir nun

$$\Phi = \{\alpha \in H^* : \alpha \neq 0 \text{ ein Gewicht von } H\},$$

dann ist Φ eine endliche Menge und wir haben die Zerlegung

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \tag{3.7}$$

Ist die Unteralgebra H eine echte Teilmenge von L_0, dann liefert diese Zerlegung von L wenig Information wie die Elemente von $L_0 \backslash H$ auf L wirken. Außerdem wird es im Allgemeinen nur wenige von Null verschiedene Gewichtsräume außer L_0 geben. Um daher soviel Information wie möglich aus Zerlegung (3.7) zu erhalten, sollte H so groß wie möglich gewählt werden, idealerweise $H = L_0 = C_L(H)$.

Definition. Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Eine Unteralgebra von L maximaler Dimension bestehend aus halbeinfachen Elementen heißt *Cartan Unteralgebra* von L.

Wir werden im Folgenden sehen, dass Cartan Unteralgebren alle Eigenschaften besitzen, die wir für eine *nützliche* Zerlegung der Form (3.7) benötigen.

Proposition 3.16 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Dann besitzt L eine von Null verschiedene Cartan Unteralgebra und sie ist abelsch.*

Beweis: Es sei $x \in L$ und $x = x_s + x_n$ die abstrakte Jordan Zerlegung von x. Ist $x_s = 0$ für jedes Element $x \in L$, dann besteht L aus ad-nilpotenten Elementen. Nach dem Satz von Engel ist L daher nilpotent und damit auflösbar, ein Widerspruch. Es gibt daher ein von Null verschiedenes halbeinfaches Element $x_s \in L$. Damit besitzt L aber auch Unteralgebren, die nur aus halbeinfachen Elementen bestehen. Da L endlich dimensional ist, gibt es eine maximale solche Unteralgebra.

Es bleibt zu zeigen, dass jede (maximale) Unteralgebra H von L bestehend aus halbeinfachen Elementen abelsch ist. Es sei dazu $h \in H$ beliebig aber fest. Da $\operatorname{ad} h$ diagonalisierbar ist als Abbildung auf L und H invariant lässt, ist auch die Einschränkung von $\operatorname{ad} h$ auf H diagonalisierbar. Es genügt also zu zeigen, dass Null ihr einziger Eigenwert ist. Angenommen es gibt ein von Null verschiedenes $x \in H$ mit

$$(\operatorname{ad} h)(x) = [h, x] = \lambda\, x = -[x, h] = -(\operatorname{ad} x)(h)$$

und $\lambda \neq 0$. Da $\operatorname{ad} x$ auch diagonalisierbar ist auf H, können wir x zu einer Basis von H bestehend aus Eigenvektoren für $\operatorname{ad} x$ erweitern, etwa $\{x, y_1, \ldots, y_m\}$. Ist $h = c_0 x + c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$, dann gilt

$$-\lambda\, x = (\operatorname{ad} x)(h) = c_1 (\operatorname{ad} x)(y_1) + \cdots + c_m (\operatorname{ad} x)(y_m),$$

womit $\{x, y_1, \ldots, y_m\}$ linear abhängig sind, ein Widerspruch. ■

Bemerkungen.

(a) Man nennt eine Unteralgebra einer halbeinfachen Lie Algebra bestehend aus halbeinfachen Elementen *toral*. Jede torale Unteralgebra einer halbeinfachen Lie Algebra ist also abelsch. Cartan Unteralgebren von halbeinfachen Lie Algebren sind genau die maximalen toralen Unteralgebren.

(b) Um zu zeigen, dass eine torale Unteralgebra H eine Cartan Unteralgebra ist, genügt es offenbar $H = C_L(H)$ nachzuweisen.

Beispiel.

Die Unteralgebra der Diagonalmatrizen ist eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Das nächste Resultat zeigt, dass Cartan Unteralgebren selbstzentralisierend sind.

Satz 3.17 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und H eine Cartan Unteralgebra von L. Dann gilt*

$$H = C_L(H).$$

Beweis: Es sei $h \in H$ so gewählt, dass $C_L(h)$ minimale Dimension hat. Im ersten Schritt wollen wir zeigen, dass für alle $s \in H$ dann $C_L(h) \subseteq C_L(s)$ gilt und daher

$$C_L(h) = C_L(H) = \bigcap_{s \in H} C_L(s).$$

Angenommen es gibt ein $s \in H$ mit $C_L(h) \nsubseteq C_L(s)$ und es sei $\{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis von $C_L(h) \cap C_L(s)$. Da $s \in H$ halbeinfach ist und $s \in C_L(h)$, ist die Einschränkung von $\operatorname{ad} s$ auf $C_L(h)$ diagonalisierbar. Analog ist die Einschränkung von $\operatorname{ad} h$ auf $C_L(s)$ diagonalisierbar. Wir können daher $\{b_1, \ldots, b_k\}$ einerseits zu einer Basis von $C_L(h)$ durch Eigenvektoren von $\operatorname{ad} s$, etwa $\{x_1, \ldots, x_l\}$, erweitern und andererseits zu einer Basis von $C_L(s)$ durch Eigenvektoren von $\operatorname{ad} h$, etwa $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Offenbar ist dann

$$\{b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m\}$$

eine Basis von $C_L(h) + C_L(s)$. Da $\operatorname{ad} h$ und $\operatorname{ad} s$ kommutieren, können wir diese Basis schließlich noch zu einer Basis von L durch gemeinsame Eigenvektoren von $\operatorname{ad} h$ und $\operatorname{ad} s$ erweitern, etwa $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

Da $x_j \notin C_L(s) \cap C_L(h)$ folgt $[s, x_j] \neq 0$, $1 \leq j \leq l$, und analog $[h, y_i] \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. Außerdem gibt es Zahlen $\sigma_r, \theta_r \neq 0$, $1 \leq r \leq n$ mit

$$[h, w_r] = \sigma_r w_r \qquad \text{und} \qquad [s, w_r] = \theta_r w_r.$$

Wählen wir nun ein $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \neq -\theta_r/\sigma_r$ für alle $1 \leq r \leq n$, dann gilt

$$(\operatorname{ad} s + \lambda \operatorname{ad} h)(b_i) = 0$$

für alle i, und

$$(\operatorname{ad} s + \lambda \operatorname{ad} h)(x_j) \neq 0, \quad (\operatorname{ad} s + \lambda \operatorname{ad} h)(y_p) \neq 0, \quad (\operatorname{ad} s + \lambda \operatorname{ad} h)(w_r) \neq 0.$$

Damit ist aber

$$C_L(s + \lambda h) = C_L(s) \cap C_L(h).$$

Da $C_L(h) \nsubseteq C_L(s)$ steht das im Widerspruch zur Minimalität von $C_L(h)$.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass auch $C_L(h) = H$ gilt. Da H abelsch ist, gilt sicher $H \subseteq C_L(h)$. Es sei nun $x \in C_L(h)$ und $x = x_s + x_n$ die abstrakte Jordan Zerlegung von x. Da $[x, h] = 0$, folgt aus Satz 2.19 (ii), dass $x_s, x_n \in C_L(h)$. Es bleibt zu zeigen, dass $x_s \in H$ und $x_n = 0$.

Da $C_L(h) = C_L(H)$, ist $[x_s, s] = 0$ für alle $s \in H$. Daher ist aber $H + \operatorname{span}\{x_s\}$ eine abelsche Unteralgebra von L bestehend aus halbeinfachen Elementen. Damit folgt $x_s \in H$ aus der Maximalität der Cartan Unteralgebra H.

Aus $x_s \in H$ folgt nun $(\operatorname{ad} x)(s) = (\operatorname{ad} x_n)(s)$ für alle $s \in C_L(h)$. Die Einschränkung von $\operatorname{ad} x$ auf $C_L(h)$ ist also nilpotent für jedes $x \in C_L(h)$. Aus dem Satz von Engel folgt daher, dass $C_L(h)$ nilpotent ist.

Als nilpotente Lie Algebra ist $C_L(h)$ insbesondere auflösbar. Nach dem Satz von Lie gibt es daher eine Basis von L in der die Abbildungen $\operatorname{ad} x$ für $x \in C_L(h)$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Da $\operatorname{ad} x_n : L \to L$ nilpotent ist, muss die Matrix von $\operatorname{ad} x_n$ aber eine strikte obere Dreiecksmatrix sein. Daraus folgt

$$\kappa(x_n, s) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x_n \circ \operatorname{ad} s) = 0$$

für alle $s \in C_L(h)$. Nach Lemma 3.15 ist die Einschränkung der Killing Form κ auf $C_L(H)$ nicht ausgeartet, womit $x_n = 0$ folgt. ■

Bemerkung.

(a) Eine Unteralgebra H einer allgemeinen Lie Algebra L nennt man eine Cartan Unteralgebra, wenn sie nilpotent und selbstnormalisierend ist, d.h. wenn gilt $H = \{x \in L : [x, H] \subseteq H\}$. Für halbeinfache Lie Algebren über $\mathbb{K}$ stimmen die beiden Begriffe überein (siehe dazu Kapitel 5).

Definition. Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und H eine Cartan Unteralgebra von L. Die Elemente der Menge $\Phi = \{\alpha \in H^* : \alpha \neq 0 \text{ ein Gewicht von } H\}$ heißen die *Wurzeln* von L bezüglich H. Ist $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel, so nennen wir L_α den zugehörigen *Wurzelraum* und die Zerlegung

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

die *Wurzelraumzerlegung* von L bezüglich H.

Bemerkung.

(a) Wurzeln und Wurzelräume hängen von der Wahl der Cartan Unteralgebra ab. Für Lie Algebren über $\mathbb{C}$ kann man zeigen, dass alle Cartan Unteralgebren konjugiert sind unter der Gruppe der *inneren Automorphismen* von L (erzeugt von Abbildungen der Form $\exp \operatorname{ad} x$, $x \in L$ ad-nilpotent).

Wir sammeln im Folgenden die wichtigsten Eigenschaften der Menge Φ von Wurzeln einer halbeinfachen Lie Algebra L. Das folgende Resultat zeigt, dass wir jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra von L zuordnen können. Auf diese Weise können wir mit Hilfe der Ergebnisse über die Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ die Struktur von L analysieren.

Satz 3.18 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ die Menge der Wurzeln von L bezüglich H. Dann gilt:*

(i) Ist $\alpha \in \Phi$, dann ist auch $-\alpha \in \Phi$.

(ii) Ist $\alpha \in \Phi$ und $x_\alpha \in L_\alpha$ von Null verschieden, dann besitzt L eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra $\mathfrak{sl}(\alpha)$ mit einer Basis $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}$, sodass $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, $z_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha] \in H$ und

$$\phi(x_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(y_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(z_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus $\phi : \mathfrak{sl}(\alpha) \to \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ definiert.

Beweis: Es sei $\alpha \in \Phi$. Angenommen es ist $-\alpha \notin \Phi$, also $L_{-\alpha} = \{0\}$. Dann gilt nach Lemma 3.15 (iii), $\kappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$ für alle $\beta \in H^*$ und daher $\kappa(L_\alpha, L) = 0$ im Widerspruch dazu, dass κ nicht ausgeartet ist. Damit folgt (i).

Es sei nun $\alpha \in \Phi$ und $x_\alpha \in L_\alpha$ ein von Null verschiedenes Element. Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es ein $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$. Da $\alpha \neq 0$, gibt es ein $t \in H$ mit $\alpha(t) \neq 0$. Daher ist

$$\kappa(t, [x_\alpha, y_\alpha]) = \kappa([t, x_\alpha], y_\alpha) = \alpha(t)\kappa(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$$

und damit $z_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha] \neq 0$. Nach Lemma 3.15 (i) ist $z_\alpha \in H$. Da x_α und y_α gemeinsame Eigenvektoren für die Elemente von $\operatorname{ad} H$ sind, ist $\operatorname{span}\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}$ eine Unteralgebra $\mathfrak{sl}(\alpha)$ von L.

Angenommen es ist $\alpha(z_\alpha) = 0$. Dann gilt einerseits $[z_\alpha, x_\alpha] = \alpha(z_\alpha)x_\alpha = 0$ und andererseits $[z_\alpha, y_\alpha] = -\alpha(z_\alpha)y_\alpha = 0$, sowie auch $[\operatorname{ad} z_\alpha, \operatorname{ad} x_\alpha] = 0 = [\operatorname{ad} z_\alpha, \operatorname{ad} y_\alpha]$. Die Unteralgebra $\mathfrak{sl}(\alpha)$ ist daher isomorph zu $\operatorname{ad}\mathfrak{sl}(\alpha)$ und auflösbar. Es ist damit nach Korollar 2.5, $\operatorname{ad} z_\alpha = \operatorname{ad}[x_\alpha, y_\alpha]$ nilpotent. Damit ist das Element $z_\alpha \in H$ sowohl halbeinfach als auch nilpotent und damit 0, ein Widerspruch.

Wir können daher nach Umskalierung von y_α annehmen, dass $\alpha(z_\alpha) = 2$. Dann ist

$$[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha, \qquad [z_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \qquad [z_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha,$$

womit die Strukturkonstanten von $\mathfrak{sl}(\alpha)$ mit jenen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ übereinstimmen. ■

Nach Satz 3.18 können wir jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ eine Unteralgebra $\mathfrak{sl}(\alpha)$ von L zuordnen, die isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist. Wir nennen eine Basis $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}$ von $\mathfrak{sl}(\alpha)$ mit $x_\alpha \in L_\alpha$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, $z_\alpha \in H$ und

$$[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha, \qquad [z_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha, \qquad [z_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha,$$

eine Standardbasis von $\mathfrak{sl}(\alpha)$. Es gilt also stets $\alpha(z_\alpha) = 2$.

Mit Hilfe der Killing Form κ von L können wir einen natürlichen Isomorphismus zwischen einer Cartan Unteralgebra H und ihrem Dualraum H^* definieren:
Für $h \in H$ sei $\theta_h \in H^*$ definiert durch

$$\theta_h(k) = \kappa(h, k), \qquad k \in H.$$

Nach Lemma 3.15 ist die Einschränkung der Killing Form κ auf H nicht ausgeartet. Damit ist die Abbildung $h \mapsto \theta_h$ ein Isomorphismus zwischen H und H^*.

Satz 3.19 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel von L bezüglich einer Cartan Unteralgebra H. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $t_\alpha \in H$ mit $\kappa(t_\alpha, k) = \alpha(k)$ für alle $k \in H$.

(ii) Ist $x \in L_\alpha$ und $y \in L_{-\alpha}$, dann ist $[x, y] = \kappa(x, y)\, t_\alpha$.

(iii) Ist $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}$ eine Standardbasis von $\mathfrak{sl}(\alpha)$, dann ist $z_\alpha \in \operatorname{span}\{t_\alpha\}$.

Beweis: Aussage (i) folgt unmittelbar aus der Bijektivität des Isomorphismus $h \mapsto \theta_h$ zwischen H und H^*. Zum Beweis von (ii) beachte, dass für $h \in H$,

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y) = \kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha)$$

und damit

$$\kappa(h, [x, y] - \kappa(x, y)t_\alpha) = 0.$$

Da $h \in H$ beliebig war und κ nicht ausgeartet ist auf H, folgt die Behauptung (ii). Aussage (iii) ist eine direkte Konsequenz aus (ii). ■

Ist $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel der halbeinfachen Lie Algebra L, so können wir L mittels der adjungierten Darstellung als einen $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Modul ansehen: Für $a \in \mathfrak{sl}(\alpha)$ und $x \in L$, definieren wir

$$a \cdot x = (\operatorname{ad} a)(x) = [a, x].$$

Offenbar sind die $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodule von L genau die Unterräume M von L, sodass $[x_\alpha, m], [y_\alpha, m], [z_\alpha, m] \in M$ für alle $m \in M$.

Ist M ein $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul von L, dann können wir M, nach dem Satz von Weyl, als Summe von irreduziblen $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodulen darstellen. Da $\mathfrak{sl}(\alpha)$ isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist, erhalten wir daher aus Satz 3.11:

Proposition 3.20 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel von L bezüglich einer Cartan Unteralgebra H. Ist M ein $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul von L, dann sind die Eigenwerte von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf M ganzzahlig.*

Für festes $\beta \in \Phi$ oder $\beta = 0$ setzen wir

$$M := \bigoplus_c L_{\beta + c\alpha}, \tag{3.8}$$

wobei die Summe über alle $c \in \mathbb{C}$ läuft für die $\beta + c\alpha \in \Phi$. Nach Lemma 3.15 ist M ein $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul von L. Das Studium dieser Untermodule wird uns helfen die Struktur der Menge der Wurzeln Φ besser zu verstehen.

Satz 3.21 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\alpha \in \Phi$ eine Wurzel von L bezüglich einer Cartan Unteralgebra H. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Der Wurzelraum L_α ist 1-dimensional.

(ii) Ist $x_\alpha \in L_\alpha$ von Null verschieden, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, sodass $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}$ eine Standardbasis von $\mathfrak{sl}(\alpha)$ bildet.

(iii) Die einzigen Vielfachen von α in Φ sind $\pm\alpha$.

Beweis: Wir betrachten den $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul

$$M := H \oplus \bigoplus_{c\alpha \in \Phi} L_{c\alpha}.$$

Ist $c\alpha \in \Phi$, dann besitzt $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf M den Eigenwert $2c = c\alpha(z_\alpha)$. Da aber nach Proposition 3.20 alle Eigenwerte von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf M ganzzahlig sind, ist entweder $c \in \mathbb{Z}$ oder $c \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Da $\alpha : H \to \mathbb{C}$ und $\alpha(z_\alpha) = 2$, ist $\dim \operatorname{im} \alpha = 1$. Es folgt $\dim \ker \alpha = \dim H - 1$. Weiters gilt $[z_\alpha, x] = 0$ für alle $x \in \ker \alpha$ da H abelsch ist. Es ist aber auch

$$[x_\alpha, x] = -\alpha(x)x_\alpha = 0 \qquad \text{und} \qquad [y_\alpha, x] = -\alpha(x)y_\alpha = 0,$$

womit $\ker \alpha$ ein trivialer sl(α)-Untermodul von L ist. Nach dem Satz von Weyl gibt es daher in M einen zu $\ker \alpha \oplus \mathfrak{sl}(\alpha)$ komplementären $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul W,

$$M = \ker \alpha \oplus \mathfrak{sl}(\alpha) \oplus W.$$

Angenommen Aussage (i) oder (iii) wäre falsch. Dann ist der $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul W von Null verschieden. Es sei $V \cong V(m)$ ein irreduzibler Untermodul von W. Ist m gerade, so folgt aus Satz 3.11, dass V einen $\operatorname{ad} z_\alpha$ Eigenvektor v zum Eigenwert 0 enthält. Da der 0-Eigenraum von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf M durch $H \subseteq \ker \alpha \oplus \mathfrak{sl}(\alpha)$ gegeben ist, erhalten wir einen Widerspruch. Da die Eigenwerte von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf $\ker \alpha \oplus \mathfrak{sl}(\alpha)$ durch 0 und ± 2 gegeben sind, folgt weiters, dass $2\alpha \notin \Phi$. (Da sonst $4 = 2\alpha(z_\alpha)$ ein Eigenwert wäre, und daher W einen irreduziblen Untermodul $V(m)$ mit geradem m enthalten müsste.) Für keine Wurzel β ist also 2β eine Wurzel.

Angenommen $V \cong V(m)$ ist ein irreduzibler Untermodul von W mit ungeradem m. Dann besitzt $\operatorname{ad} z_\alpha$ nach Satz 3.11 den Eigenwert 1 auf M. Da $\alpha(z_\alpha) = 2$, ist also $\frac{1}{2}\alpha \in \Phi$. Damit sind aber $\frac{1}{2}\alpha$ und α Wurzeln, ein Widerspruch. Damit erhalten wir insgesamt $W = \{0\}$, womit Aussagen (i) und (iii) gezeigt sind. Aussage (ii) ist eine direkte Konsequenz aus (i). ∎

Das Studium der Untermodule definiert in (3.8) für $\beta = 0$ hat zu den Aussagen aus Satz 3.21 geführt. Der folgende Satz beruht auf den Informationen, die wir aus den Untermodulen (3.8) für $\beta \in \Phi$ gewinnen können.

Satz 3.22 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \Phi$ Wurzeln von L bezüglich einer Cartan Unteralgebra H mit $\beta \neq \pm\alpha$. Dann gilt:*

(i) Es gilt $\beta(z_\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \beta(z_\alpha)\alpha \in \Phi$.

(ii) Es gibt Zahlen $r, q \geq 0$, sodass $\beta + i\alpha \in \Phi$ mit $i \in \mathbb{Z}$ genau dann gilt, wenn $-r \leq i \leq q$. Es ist dann $\beta(z_\alpha) = r - q$.

(iii) Ist $\alpha + \beta \in \Phi$, dann gilt $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.

Beweis: Wir betrachten den $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Untermodul

$$M := \bigoplus_{\beta + i\alpha \in \Phi,\, i \in \mathbb{Z}} L_{\beta + i\alpha}.$$

Die Zahl $\beta(z_\alpha)$ ist der Eigenwert von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf L_β und ist nach Proposition 3.20 daher ganzzahlig. Nach Satz 3.21 gilt $\dim L_{\beta+i\alpha} = 1$ für $\beta + i\alpha \in \Phi$. Alle Eigenräume von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf M sind also 1-dimensional und wegen $(\beta + i\alpha)(z_\alpha) = \beta(z_\alpha) + 2i \in \mathbb{Z}$ tritt entweder 0 oder 1 als Eigenwert auf. Nach Korollar 3.12 ist M daher ein irreduzibler $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Modul.

Als irreduzibler $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Modul ist M isomorph zu einem der Module $V(m)$. Die Eigenwerte von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf M sind daher einerseits gegeben durch

$$\{\beta(z_\alpha) + 2i : i \in \mathbb{Z}, \beta + i\alpha \in \Phi\},$$

und nach Satz 3.11 andererseits durch

$$\{m, m-2, \ldots, -m\}.$$

Definieren wir daher die Zahlen r und q durch $m = \beta(z_\alpha)+2q$ und $-m = \beta(z_\alpha)-2r$, dann ist offenbar $\beta(z_\alpha) = r - q$ und es folgt (i) und (ii).

Es sei nun $\alpha + \beta \in \Phi$ und $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\beta \in L_\beta$ von Null verschieden. Angenommen es ist $(\operatorname{ad} x_\alpha)(x_\beta) = 0$. Da x_β ein Eigenvektor von $\operatorname{ad} z_\alpha$ ist, ist x_β ein Vektor von höchstem Gewicht im irreduziblen $\mathfrak{sl}(\alpha)$-Modul M mit höchstem Gewicht $\beta(z_\alpha)$. Da aber $\alpha + \beta \in \Phi$, sind die Eigenwerte von $\operatorname{ad} z_\alpha$ auf $L_{\alpha+\beta}$ gegeben durch $\beta(z_\alpha) + 2$, ein Widerspruch. Es ist also $(\operatorname{ad} x_\alpha)(x_\beta) \neq 0$ und nach Lemma 3.15 und Satz 3.21 damit Aussage (iii) gezeigt. ■

Bemerkungen.

(a) Die Zahlen $\beta(z_\alpha)$, $\alpha, \beta \in \Phi$, heißen die *Cartan Zahlen* von Φ.

(b) Die Wurzeln $\beta + i\alpha \in \Phi$, $-r \leq i \leq q$, nennt man die α-Wurzelkette durch β.

(c) Wir fassen zusammen welche Information wir über die Strukturkonstanten einer halbeinfachen Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ (bezüglich einer Basis gegeben durch die Wurzelraumzerlegung) bisher erhalten haben:

- Die Lie Klammer der Elemente von H mit Elementen der Wurzelräume wird durch die Wurzeln bestimmt.
- Bis auf Vielfache bestimmt die Menge der Wurzeln die Lie Klammern $[x_\alpha, x_\beta]$ für $\alpha \neq \pm\beta$.
- Die Lie Klammer $[x_\alpha, x_{-\alpha}]$ ist ein Vielfaches von z_α.

Nach Satz 3.21 kann die Menge der Wurzeln Φ nicht zu groß sein, da etwa für jede Wurzel α nur $\pm\alpha \in \Phi$. Da L nicht abelsch ist, muss es aber zumindest zwei Wurzeln geben. Das folgende Resultat gibt Auskunft über die Beziehung zwischen der Anzahl der Wurzeln und der Dimension von H.

Satz 3.23 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ die Menge der Wurzeln von L bezüglich H. Dann spannt Φ ganz H^* auf.*

Beweis: Es sei $h \in H$ beliebig. Angenommen es gilt $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Dann ist $[h, x] = \alpha(h)x = 0$ für alle $x \in L_\alpha$ und alle $\alpha \in \Phi$. Da H abelsch ist, folgt $h \in Z(L)$. Da L aber halbeinfach ist, ist $Z(L) = \{0\}$. Zu jedem von Null verschiedenen $h \in H$ gibt es also eine Wurzel $\alpha \in \Phi$ mit $\alpha(h) \neq 0$.

Angenommen $\operatorname{span} \Phi$ ist ein echter Unterraum von H^*. Dann hat der Unterraum von H definiert durch $\{h \in H : \theta(h) = 0 \text{ für alle } \theta \in \operatorname{span} \Phi\}$ die Dimension $\dim H - \dim \operatorname{span} \Phi \neq 0$. Damit gibt es ein von Null verschiedenes $h \in H$ mit $\theta(h) = 0$ für alle $\theta \in \operatorname{span} \Phi$, ein Widerspruch. ■

Bemerkung.

(a) Nach Satz 3.21 gilt
$$\dim L = \dim H + |\Phi|.$$
Eine Kombination aus Satz 3.21 und Satz 3.23 zeigt daher etwa, dass es keine halbeinfachen Lie Algebren über $\mathbb{C}$ der Dimensionen 4, 5 und 7 gibt.

Mit Hilfe der Killing Form werden wir eine Euklidische Struktur auf der Menge der Wurzeln definieren. Die Basis dafür bildet der folgende

Satz 3.24 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ die Menge der Wurzeln von L bezüglich H. Dann gilt:*

(i) Für jedes $\alpha \in \Phi$ ist
$$t_\alpha = \frac{z_\alpha}{\kappa(x_\alpha, y_\alpha)}, \qquad z_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}, \qquad \kappa(t_\alpha, t_\alpha)\kappa(z_\alpha, z_\alpha) = 4,$$
wobei $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}$ eine Standardbasis von $\mathfrak{sl}(\alpha)$ bildet.

(ii) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ ist
$$\kappa(z_\alpha, z_\beta) \in \mathbb{Z} \qquad \textit{und} \qquad \kappa(t_\alpha, t_\beta) \in \mathbb{Q}.$$

Beweis: Es sei $\alpha \in \Phi$ beliebig aber fest gewählt. Dann gilt nach Satz 3.19
$$z_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha] = \kappa(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha. \tag{3.9}$$
Da weiters $\alpha(z_\alpha) = 2$, ist
$$2 = \kappa(t_\alpha, z_\alpha) = \kappa(x_\alpha, y_\alpha)\kappa(t_\alpha, t_\alpha). \tag{3.10}$$
Schließlich ist
$$\kappa(z_\alpha, z_\alpha) = \kappa\left(\frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}, \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}\right) = \frac{4}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} \tag{3.11}$$
Eine Kombination aus (3.9), (3.10) und (3.11) liefert nun (i).

Es seien nun $\alpha, \beta \in \Phi$. Verwendung der Wurzelraumzerlegung von L zeigt
$$\kappa(z_\alpha, z_\beta) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, z_\alpha \circ \mathrm{ad}\, z_\beta) = \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(z_\alpha)\gamma(z_\beta).$$
Da die Eigenwerte von $\mathrm{ad}\, z_\alpha$ und $\mathrm{ad}\, z_\beta$ ganzzahlig sind, folgt $\kappa(z_\alpha, z_\beta) \in \mathbb{Z}$. Damit folgt aus (i) und (3.11)
$$\kappa(t_\alpha, t_\beta) = \kappa\left(\frac{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)z_\alpha}{2}, \frac{\kappa(t_\beta, t_\beta)z_\beta}{2}\right) = \frac{4\kappa(z_\alpha, z_\beta)}{\kappa(z_\alpha, z_\alpha)\kappa(z_\beta, z_\beta)} \in \mathbb{Q}.$$
■

Definition. Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$ und H eine Cartan Unteralgebra von L. Auf H^* definiert
$$(\theta, \eta) := \kappa(t_\theta, t_\eta), \qquad \theta, \eta \in H^*, \tag{3.12}$$
eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Hier sind $t_\theta, t_\eta \in H$ wieder die zu $\theta, \eta \in H^*$ durch den von κ induzierten Isomorphismus zwischen H und H^* assoziierten Elemente.

Bemerkungen.

(a) Für $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$.

(b) Für die Cartan Zahlen von Φ gilt

$$\beta(z_\alpha) = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Das folgende Resultat zeigt, dass für jede Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \Phi$ von H^* schon $\Phi \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ gilt. Darüber hinaus wird durch (3.12) ein reelles inneres Produkt auf $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Phi$ definiert.

Satz 3.25 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ die Menge der Wurzeln von L bezüglich H. Dann gilt:*

(i) Ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \Phi$ eine Basis von H^*, so gilt $\Phi \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$.

(ii) Die Bilinearform $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ definiert ein reellwertiges inneres Produkt auf $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Phi$.

Beweis: Es sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \Phi$ eine Basis von H^* und $\beta \in \Phi$ beliebig. Dann gibt es Zahlen $c_i \in \mathbb{C}$ mit $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m$. Für jedes $1 \leq j \leq m$ gilt daher

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i, \alpha_j)c_i.$$

Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (\beta, \alpha_1) \\ \vdots \\ (\beta, \alpha_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_1, \alpha_m) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix ist gerade die Matrix der nicht ausgearteten Bilinearform $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ bezüglich der Basis $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ und daher invertierbar. Da alle Einträge der Matrix rational sind, sind auch die Einträge der Inversen in $\mathbb{Q}$. Da auch $(\beta, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$ für $1 \leq j \leq m$, folgt $c_j \in \mathbb{Q}$ für $1 \leq j \leq m$ und damit (i).

Um zu zeigen, dass $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ ein reellwertiges inneres Produkt auf $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Phi$ definiert, müssen wir nur noch die positive Definitheit nachweisen. Es sei dazu $\theta \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Phi$ und $t_\theta \in H$ das dazu bezüglich κ assoziierte Element. Dann folgt aus der Wurzelraumzerlegung und der Definition von t_θ,

$$(\theta, \theta) = \kappa(t_\theta, t_\theta) = \sum_{\beta \in \Phi} \beta(t_\theta)^2 = \sum_{\beta \in \Phi} \kappa(t_\beta, t_\theta)^2 = \sum_{\beta \in \Phi} (\beta, \theta)^2.$$

Da $(\beta, \theta) \in \mathbb{R}$, ist $(\theta, \theta) \geq 0$. Gilt $(\theta, \theta) = 0$, dann ist $\beta(t_\theta) = 0$ für alle $\beta \in \Phi$ und damit $t_\theta = 0$ bzw. $\theta = 0$. ∎

Die Eigenschaften der Menge der Wurzeln einer halbeinfachen Lie Algebra über $\mathbb{C}$ motivieren die folgende

Definition. Man nennt eine Teilmenge R eines Euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}$ mit innerem Produkt $(\cdot\,,\,\cdot)$ ein *Wurzelsystem* wenn R folgende Axiome erfüllt:

(R1) R ist endlich, enthält nicht 0 und spannt ganz $\mathbb{E}$ auf.

(R2) Ist $\alpha \in R$, dann sind $\pm\alpha$ die einzigen Vielfachen von α in R.

(R3) Ist $\alpha \in R$, so lässt die Spiegelung an der Hyperebene orthogonal zu α die Menge R invariant.

(R4) Sind $\alpha, \beta \in R$, dann ist $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Das wichtigste Beispiel eines Wurzelsystems bildet die von der Menge der Wurzeln über $\mathbb{R}$ aufgespannte Teilmenge von H^*.

Korollar 3.26 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$. Die Menge Φ der Wurzeln von L bezüglich einer Cartan Unteralgebra H bildet ein Wurzelsystem im Euklidischen Vektorraum* $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\Phi$ *versehen mit dem inneren Produkt*

$$(\theta, \eta) = \kappa(t_\theta, t_\eta), \qquad \theta, \eta \in \mathbb{E}.$$

Ausblick:

(a) Sind K und L zwei halbeinfache Lie Algebren über $\mathbb{C}$ mit demselben Wurzelsystem, dann sind K und L isomorph.

(b) Jedes (abstrakte) Wurzelsystem ist Wurzelsystem einer halbeinfachen Lie Algebra über $\mathbb{C}$.

4 Wurzelsysteme

Die essenziellen Eigenschaften der Wurzeln einer komplexen halbeinfachen Lie Algebra werden durch den Begriff des Wurzelsystems zusammengefasst. Wir untersuchen daher in diesem Abschnitt solche *abstrakten* Wurzelsysteme genauer, um die so entwickelte Theorie in weiterer Folge zur Klassifikation komplexer halbeinfacher Lie Algebren zur Anwendung zu bringen.

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{E}$ stets einen endlich-dimensionalen *reellen* Vektorraum versehen mit einem Euklidischen inneren Produkt $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. Jeder von Null verschiedene Vektor $\alpha \in \mathbb{E}$ bestimmt eine Spiegelung σ_α an der Hyperebene

$$H_\alpha = \{\beta \in \mathbb{E} : (\alpha, \beta) = 0\}.$$

Die Spiegelung σ_α bildet α auf $-\alpha$ ab, lässt alle Elemente von H_α fest und ist gegeben durch

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\,\alpha.$$

Offenbar ist σ_α auch orthogonal, d.h. $(\beta, \gamma) = (\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\gamma))$ für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{E}$.

Als sehr nützliche Abkürzung verwenden wir

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

wobei zu beachten ist, dass $\langle \beta, \alpha \rangle$ nur linear in der ersten Variable ist.

Lemma 4.1 *Es sei $R \subseteq \mathbb{E}$ eine endliche Menge, die ganz $\mathbb{E}$ aufspannt und sodass die Spiegelungen $\{\sigma_\alpha : \alpha \in R\}$ die Menge R invariant lassen. Ist $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ eine lineare Abbildung die R invariant lässt, punktweise eine Hyperebene H von $\mathbb{E}$ fixiert und ein von Null verschiedenes $\alpha \in R$ auf $-\alpha$ abbildet, dann ist $\sigma = \sigma_\alpha$ und $H = H_\alpha$.*

Beweis: Es sei

$$\tau = \sigma \circ \sigma_\alpha = \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1}.$$

Dann gilt $\tau(R) = R$, $\tau(\alpha) = \alpha$ und τ wirkt wie die Identität auf $\mathrm{span}\{\alpha\}$ und auf $\mathbb{E}/\mathrm{span}\{\alpha\}$. Damit müssen aber alle Eigenwerte von τ gleich 1 sein, womit das charakteristische Polynom von τ durch $(t-1)^n$, $n = \dim \mathbb{E}$, gegeben ist. Das Minimalpolynom von τ teilt daher $(t-1)^n$.

Da R endlich ist, können für $\beta \in R$ nicht alle Vektoren $\beta, \tau(\beta), \tau^2(\beta), \ldots, \tau^k(\beta)$ mit $k \geq |R|$ verschieden sein. Es gibt daher ein $k \in \mathbb{N}$, sodass τ^k alle $\beta \in R$ fest lässt. Da aber R ganz $\mathbb{E}$ aufspannt, folgt $\tau^k = \mathrm{Id}$. Damit teilt aber das Minimalpolynom von τ auch $t^k - 1$. Da aber $\mathrm{ggT}\{t^k - 1, (t-1)^n\} = t - 1$, ist das Minimalpolynom von τ gegeben durch $t - 1$ und damit $\tau = \mathrm{Id}$. ■

Wir notieren als nächstes noch einmal die zentrale Definition dieses Abschnitts.

Definition. Man nennt eine Teilmenge R eines Euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}$ mit innerem Produkt $(\cdot\,,\,\cdot)$ ein *Wurzelsystem* wenn R folgende Axiome erfüllt:

(R1) R ist endlich, enthält nicht 0 und spannt ganz $\mathbb{E}$ auf.

(R2) Ist $\alpha \in R$, dann sind $\pm\alpha$ die einzigen Vielfachen von α in R.

(R3) Ist $\alpha \in R$, so lässt σ_α die Menge R invariant.

(R4) Sind $\alpha, \beta \in R$, dann ist $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Die Elemente von R heißen Wurzeln.

Bemerkungen:

(a) Ersetzt man das gegebene innere Produkt auf $\mathbb{E}$ durch ein positives Vielfaches, so bleiben (R1) bis (R4) erfüllt, da nur Quotienten innerer Produkte auftreten.

(b) Die Axiome (R1) bis (R4) sind nicht unabhängig voneinander. Insbesondere implizieren sowohl (R2) als auch (R3), dass $R = -R$ gelten muss.

Beispiele:

(a) Die Menge Φ der Wurzeln einer halbeinfachen Lie Algebra L über $\mathbb{C}$ bezüglich einer Cartan Unteralgebra H bildet ein Wurzelsystem im Vektorraum $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\Phi$ versehen mit dem inneren Produkt

$$(\theta, \eta) = \kappa(t_\theta, t_\eta), \qquad \theta, \eta \in \mathbb{E}.$$

(b) Es bezeichne $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ die Standardbasisvektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$ versehen mit dem gewöhnlichen inneren Produkt. Dann bildet die Menge

$$R = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

ein Wurzelsystem im Raum $\mathbb{E} = \operatorname{span} R = \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i : a_1 + \cdots + a_{n+1} = 0\}$.

Der Menge aller Spiegelungen, die von Elementen eines Wurzelsystems erzeugt werden, wird in weiterer Folge eine besonders wichtige Rolle zukommen.

Definition. Ist R ein Wurzelsystem im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{E}$, dann heißt die von der Menge der Spiegelungen $\{\sigma_\alpha : \alpha \in R\}$ erzeugte Untergruppe $W(R)$ von $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ die *Weyl Gruppe* von R.

Lemma 4.2 *Die Weyl Gruppe $W(R)$ eines Wurzelsystems R ist endlich.*

Beweis: Nach Axiom (R3) permutieren die Elemente von $W(R)$ die endliche Menge R. Damit gibt es einen Gruppen Homomorphismus von $W(R)$ in die symmetrische Gruppe über R, welche endlich ist. Wir wollen zeigen, dass dieser Homomorphismus injektiv ist. Dazu sei $g \in W(R)$ im Kern. Dann lässt g alle Wurzeln fest. Da R aber ganz $\mathbb{E}$ aufspannt, folgt sofort $g = \mathrm{Id}$. ∎

Unser nächstes Lemma zeigt, wie Automorphismen von $\mathbb{E}$, welche ein Wurzelsystem invariant lassen, auf $W(R)$ wirken.

Lemma 4.3 *Es sei R ein Wurzelsystem im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{E}$ und $W(R)$ die Weyl Gruppe von R. Lässt $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ die Menge R invariant, dann gilt*

$$\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)} \qquad \textit{und} \qquad \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$$

für alle $\alpha, \beta \in R$.

Beweis: Es ist

$$\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma \sigma_\alpha(\beta) = \sigma(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \sigma(\alpha) \in R,$$

da $\sigma_\alpha(\beta) \in R$. Da $\sigma(\beta)$ aber ganz R durchläuft, wenn β die Menge R durchläuft, folgt, dass $\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$ die Menge R invariant lässt. Darüber hinaus fixiert diese Abbildung die Hyperebene $\sigma(H_\alpha)$ und bildet $\sigma(\alpha)$ auf $-\sigma(\alpha)$ ab. Eine Anwendung von Lemma 4.1 liefert daher $\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$. Die zweite Behauptung folgt nun aus $\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle \sigma(\alpha)$. ∎

Definition. Es seien R und R' Wurzelsysteme in Euklidischen Vektorräumen $\mathbb{E}$ und $\mathbb{E}'$. Man nennt R und R' *isomorph*, wenn es einen Vektorraum Isomorphismus $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ gibt, sodass $\phi(R) = R'$ und $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in R$.

Bemerkungen:

(a) Ist ϕ ein Isomorphismus zwischen den Wurzelsystemen R und R', dann gilt offenbar $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$ für alle $\alpha, \beta \in R$. Damit induziert ϕ durch die Abbildung $\sigma \to \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Weyl Gruppen $W(R)$ und $W(R')$.

(b) Die Weyl Gruppe $W(R)$ eines Wurzelsystems R ist ein Normalteiler der Gruppe $\mathrm{Aut}\, R$ aller Isomorphismen von R auf sich.

(c) Ist R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$, dann bildet die Menge

$$R^* = \left\{ \alpha^* := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} : \alpha \in R \right\}$$

ebenfalls ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$, genannt das zu R duale Wurzelsystem. Darüber hinaus sind die Weyl Gruppen $W(R)$ und $W(R^*)$ kanonisch isomorph und es gilt $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in R$.

Wie das nächste Lemma zeigt, werden durch das Axiom (R4) die möglichen Winkel zwischen Paaren von Wurzeln stark eingeschränkt.

Lemma 4.4 *Es sei R ein Wurzelsystem im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{E}$. Für jedes Paar $\alpha, \beta \in R$ mit $\beta \neq \pm\alpha$ gilt*

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Beweis: Nach (R4) ist $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$. Weiters gilt für den Winkel θ zwischen von Null verschiedenen $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ die Gleichung $(\alpha, \beta)^2 = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \cos^2 \theta$, womit

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta \leq 4.$$

Ist hier $\cos^2 \theta = 1$, dann ist θ ein ganzzahliges Vielfaches von π, womit α und β linear abhängig wären, im Widerspruch zur Voraussetzung. ∎

Mit Hilfe von Lemma 4.4 können wir alle möglichen Werte von $\langle \alpha, \beta \rangle$ bestimmen. Dazu seien α, β Wurzeln in einem Wurzelsystem R mit $\alpha \neq \pm\beta$. O.B.d.A. können wir weiters $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$ annehmen, womit

$$|\langle \beta, \alpha \rangle| = \frac{2|(\beta, \alpha)|}{(\alpha, \alpha)} \geq \frac{2|(\alpha, \beta)|}{(\beta, \beta)} = |\langle \alpha, \beta \rangle|.$$

Aus Lemma 4.4 folgt damit die folgende Tabelle an möglichen Werten für $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$(\beta, \beta)/(\alpha, \alpha)$
0	0	$\pi/2$	unbestimmt
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Aus dieser Tabelle ergibt sich auf einfache Weise das folgende Resultat über die Summe und Differenz von Wurzeln.

Lemma 4.5 *Es seien α, β Wurzeln in einem Wurzelsystem R mit $\alpha \neq \pm\beta$.*

(i) Ist $(\alpha, \beta) > 0$ (also θ ein spitzer Winkel), dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel.

(ii) Ist $(\alpha, \beta) < 0$ (also θ ein stumpfer Winkel), dann ist $\alpha + \beta$ eine Wurzel.

Beweis: Da (α, β) genau dann positiv ist, wenn $\langle \alpha, \beta \rangle$ positiv ist, folgt aus obiger Tabelle, dass entweder $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ oder $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ sein muss. Ist $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, dann ist $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in R$ nach (R3). Ist umgekehrt $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, dann ist $\beta - \alpha \in R$ und damit auch $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in R$, womit (i) gezeigt ist. Die Aussage (ii) folgt durch Anwendung von (i) auf $-\beta$. ■

Mit Hilfe von Lemma 4.5 können wir nun Aussage (ii) aus Satz 3.22 für abstrakte Wurzelsysteme beweisen.

Korollar 4.6 *Es seien α, β Wurzeln in einem Wurzelsystem R mit $\alpha \neq \pm\beta$. Sind $r, q \in \mathbb{N}$ die größten natürlichen Zahlen, sodass $\beta - r\alpha \in R$ und $\beta + q\alpha \in R$, dann ist $\beta + i\alpha \in R$ für alle $-r \leq i \leq q$ und $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$.*

Beweis: Angenommen es gibt ein i mit $-r < i < q$, sodass $\beta + i\alpha \notin R$. Dann gibt es $p, s \in \mathbb{Z}$ mit $-r \leq p < s \leq q$, sodass $\beta + p\alpha \in R$, $\beta + (p+1)\alpha \notin R$, $\beta + (s-1)\alpha \notin R$ und $\beta + s\alpha \in R$. Aus Lemma 4.5 folgt daher $(\alpha, \beta + p\alpha) \geq 0$ und $(\alpha, \beta + s\alpha) \leq 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $p < s$.

Es bleibt $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$ zu zeigen. Dazu beachte, dass die Spieglung σ_α bloß durch Addition von Vielfachen von α auf Wurzeln der Form $\beta + i\alpha$ wirkt. Ein einfaches geometrisches Argument zeigt daher insbesondere, dass

$$\beta - r\alpha = \sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha - q\alpha.$$

Durch Umformung ergibt sich daraus die gewünschte Behauptung. ■

Bemerkung:

(a) Die Menge der Wurzeln $\{\beta + i\alpha \,:\, -r \leq i \leq q\}$ heißt die *α-Wurzelkette durch β*. Aus Korollar 4.6 und obiger Tabelle folgt sofort, dass die Länge jeder Wurzelkette höchstens 4 ist.

Ist R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$, dann wird $\dim \mathbb{E}$ der *Rang* von R genannt. Die bisher gesammelten Resultate über Wurzelsysteme erlauben uns bereits in den folgenden Beispielen alle Wurzelsysteme vom Rang $\ell \leq 2$ zu beschreiben.

Beispiele:

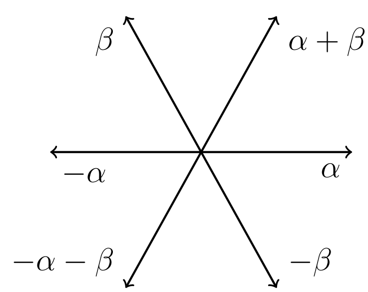
(a) Im Hinblick auf (R2), gibt es (bis auf Vielfache) nur ein Wurzelsystem vom Rang $\ell = 1$:

$$-\alpha \longleftarrow\!\cdot\!\longrightarrow \alpha$$

Man sagt dieses Wurzelsystem ist vom *Typ A_1*. In der Theorie der Lie Algebren gehört es zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

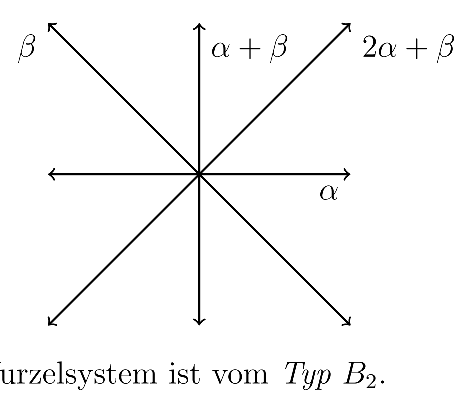
(b) Zur Bestimmung aller Wurzelsysteme vom Rang 2, wählen wir zunächst $\alpha \in R$ so kurz wie möglich. Da R ganz $\mathbb{E}$ aufspannt, muss R eine Wurzel $\beta \neq \pm\alpha$ enthalten. Indem wir falls notwendig $-\beta$ wählen, können wir annehmen, dass $(\alpha, \beta) \leq 0$ und der Winkel θ zwischen α und β so groß wie möglich ist. Nach obiger Tabelle müssen wir nun vier Fälle unterscheiden:

- Ist $\theta = 2\pi/3$, dann enthält R nach Lemma 4.5 die sechs Wurzeln:



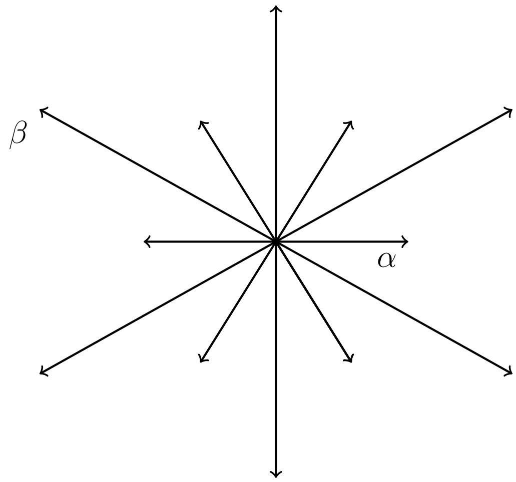
  Es ist leicht zu sehen, dass diese Menge tatsächlich ein Wurzelsystem bildet, welches vom *Typ A_2* genannt wird.

- Ist $\theta = 3\pi/4$, dann ist $\alpha + \beta$ nach Lemma 4.5 eine Wurzel. Anwendung von σ_α auf β liefert darüber hinaus die Wurzel $2\alpha + \beta$:



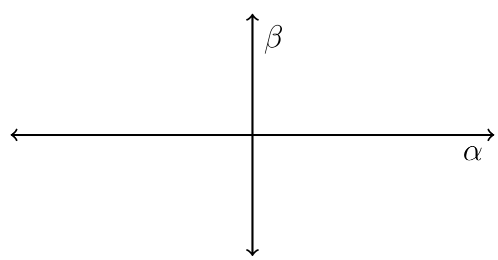
  Man sagt dieses Wurzelsystem ist vom *Typ B_2*.

- Ist $\theta = 5\pi/6$, so ergibt sich für R das folgende Bild:



  Man sagt dieses Wurzelsystem ist vom *Typ* G_2.

- Schließlich bleibt noch der Fall $\theta = \pi/2$, womit α und β orthogonal sind. Das liefert das Wurzelsystem vom *Typ* $A_1 \times A_1$:



Da im letzten Beispiel $(\alpha, \beta) = 0$, fixiert die Spiegelung σ_α die Wurzeln $\pm\beta$ und es gibt keine Interaktion zwischen $\pm\alpha$ und $\pm\beta$. Insbesondere, liefert die Länge von α keine Information über die Länge von β. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition. Ein Wurzelsystem R heißt *irreduzibel*, wenn R nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer Teilmengen $R = R_1 \dot\cup R_2$ geschrieben werden kann, wobei $(\alpha, \beta) = 0$ für alle $\alpha \in R_1$ und $\beta \in R_2$.

Bemerkungen:

(a) Wurzelsysteme vom Typ A_1, A_2, B_2 und G_2 sind irreduzibel, während ein Wurzelsystem vom Typ $A_1 \times A_1$ nicht irreduzibel ist.

(b) Ist $R = R_1 \dot\cup R_2$ mit $(\alpha, \beta) = 0$ für alle $\alpha \in R_1$ und $\beta \in R_2$, dann bilden R_1 und R_2 Wurzelsysteme in $\mathbb{E}_1 = \operatorname{span} R_1$ bzw. $\mathbb{E}_2 = \operatorname{span} R_2$.

Wie das nächste Resultat zeigt, genügt es sich zur Klassifikation aller Wurzelsysteme auf irreduzible zu konzentrieren.

Proposition 4.7 *Ist R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$, dann kann R als eine disjunkte Vereinigung $R = R_1 \dot\cup \cdots \dot\cup R_k$, geschrieben werden, wobei jedes R_i ein irreduzibles Wurzelsystem in $\mathbb{E}_i = \operatorname{span} R_i$ ist und $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_k$.*

Beweis: Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge R, wobei $\alpha \sim \beta$, wenn es $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in R$ gibt, sodass $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_k$ und $(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \neq 0$ für alle $1 \leq i < k$. Es bezeichne $R_1, \ldots, R_k$ die Äquivalenzklassen dieser Relation. Offenbar erfüllt jedes R_i die Axiome (R1), (R2) und (R4) eines Wurzelsystems in $\mathbb{E}_i = \operatorname{span} R_i$. Da aber $(\alpha, \beta) \neq 0$ stets $(\alpha, \sigma_\alpha(\beta)) \neq 0$ folgt, ist leicht zu sehen, dass R_i auch (R3) erfüllt, womit die R_i Wurzelsysteme bilden, die nach Konstruktion irreduzibel sind.

Es bleibt $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_k$ zu zeigen. Da jede Wurzel aus R in einem der Unterräume $\mathbb{E}_i$ liegt, spannt die Summe der $\mathbb{E}_i$ sicher ganz $\mathbb{E}$ auf. Da die Unterräume $\mathbb{E}_i$ darüber hinaus nach Konstruktion paarweise orthogonal sind, folgt die Behauptung. ■

Da ein Wurzelsystem R in $\mathbb{E}$ ganz $\mathbb{E}$ aufspannt, ist jede maximale linear unabhängige Teilmenge von R eine Basis von $\mathbb{E}$. Nach Lemma 4.5 wäre es nützlich eine solche Basis aus Wurzeln zu finden, bei der jedes Paar verschiedener Wurzeln einen stumpfen Winkel einschließt. Wie wir gleich sehen werden, ist sogar noch mehr möglich.

Definition. Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$. Eine Teilmenge Δ von R heißt eine *Basis* von R, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) Δ ist eine Vektorraumbasis von $\mathbb{E}$.

(B2) Jede Wurzel $\beta \in R$ kann in der Form $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ mit $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden, wobei alle von Null verschiedenen Koeffizienten k_α dasselbe Vorzeichen haben.

Die Elemente von Δ werden *einfache Wurzeln* genannt und die Spiegelungen σ_α mit $\alpha \in \Delta$ werden als *einfache Spiegelungen* bezeichnet.

Bemerkungen:

(a) Aus (B1) folgt $|\Delta| = \dim \mathbb{E}$ und die Eindeutigkeit der Koeffizienten k_α.

(b) Ist Δ eine Basis von R, dann ist auch die Menge $\{\sigma_\gamma(\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ eine Basis von R für beliebiges $\gamma \in R$.

Lemma 4.8 *Ist Δ Basis eines Wurzelsystems R, dann gilt $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle $\alpha \neq \beta$ aus Δ und $\alpha - \beta$ ist keine Wurzel.*

Beweis: Angenommen $(\alpha, \beta) > 0$. Da nach Voraussetzung $\alpha \neq \beta$ und offenbar $\alpha \neq -\beta$, folgt aus Lemma 4.5, dass $\alpha - \beta$ eine Wurzel ist, im Widerspruch zu (B2). ■

Beispiele:

(a) In den obigen Beispielen der Typen A_1, A_2, B_2, G_2 und A_1 bilden die Wurzeln α, β eine Basis des jeweiligen Wurzelsystems.

(b) Eine Basis des Wurzelsystems $R = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \leq i < j \leq n+1\}$ ist gegeben durch $\{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq n\}$.

Definition. Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Wir nennen eine Wurzel $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ *positiv* (in Bezug auf Δ), wenn alle $k_\alpha \geq 0$ und schreiben $\beta \succ 0$. Sind alle $k_\alpha \leq 0$, so nennen wir β *negativ* (in Bezug auf Δ) und schreiben $\beta \prec 0$. Wir bezeichnen mit R^+ die Menge der positiven Wurzeln und mit R^- die Menge der negativen Wurzeln aus R. Die *Höhe* von β (in Bezug auf Δ) ist definiert durch $\operatorname{ht}\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha$.

Bemerkungen:

(a) Offenbar ist $R^- = -R^+$ und $R = R^+ \dot\cup R^-$ eine disjunkte Vereinigung. Die Basis Δ ist Teilmenge von R^+.

(b) Die Basis Δ bestimmt eine *Halbordnung* auf R, welche mit der Notation $\alpha \succ 0$ verträglich ist: Wir schreiben $\alpha \prec \beta$, wenn $\beta - \alpha$ eine Summe positiver Wurzeln oder $\alpha = \beta$ ist.

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt. Der Beweis dieser Aussage wird sogar eine konkrete Methode zur Konstruktion aller möglichen Basen liefern, benötigt allerdings noch gewisse Vorbereitungen.

Eine naheliegende Möglichkeit die Elemente eines Wurzelsystems R in positive und negative Wurzeln einzuteilen, besteht in der Wahl einer Hyperebene in $\mathbb{E}$, welche keine Wurzeln enthält. Genauer definieren wir für jeden Vektor $\gamma \in \mathbb{E}$ die Menge

$$R^+(\gamma) = \{\alpha \in R : (\alpha, \gamma) > 0\}.$$

Wir nennen $\gamma \in \mathbb{E}$ *regulär*, wenn $\gamma \in \mathbb{E}\setminus \bigcup_{\alpha\in R} H_\alpha$ und sonst *singulär*. Da eine endliche Vereinigung von Hyperebenen niemals ganz $\mathbb{E}$ überdecken kann, gibt es stets reguläre $\gamma \in \mathbb{E}$ für die dann offenbar $R = R^+(\gamma) \,\dot\cup -R^+(\gamma)$. Wir nennen weiters $\alpha \in R^+(\gamma)$ *zerlegbar*, wenn $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ für geeignete β_1, $\beta_2 \in R^+(\gamma)$ und sonst *unzerlegbar*.

Satz 4.9 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$. Dann besitzt R eine Basis. Genauer bildet für jedes reguläre $\gamma \in \mathbb{E}$ die Menge $\Delta(\gamma)$ aller unzerlegbaren Wurzeln in $R^+(\gamma)$ eine Basis von R und jede Basis von R ist von dieser Form.*

Beweis: Wir können $\dim \mathbb{E} \geq 2$ annehmen, da der Fall $\dim \mathbb{E} = 1$ trivial ist. Um zu zeigen, dass $\Delta(\gamma)$ eine Basis ist, weisen wir zunächst (B2) nach. Dazu genügt es offenbar zu zeigen, dass jede Wurzel $\beta \in R^+(\gamma)$ in der Form $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} k_\alpha \alpha$ mit geeigneten nicht-negativen $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden kann. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es unter den Elementen, die nicht von dieser Form sind, ein $\beta \in R^+(\gamma)$, sodass (β, γ) minimal ist. Da $\beta \notin \Delta(\gamma)$, gibt es β_1, $\beta_2 \in R^+(\gamma)$, sodass $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Damit ist aber $(\beta, \gamma) = (\beta_1, \gamma) + (\beta_2, \gamma)$ eine Summe zweier positiver Zahlen, womit $0 < (\beta_i, \gamma) < (\beta, \gamma)$ für $i = 1, 2$. Da β keine nicht-negative $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Elementen aus $\Delta(\gamma)$ ist, muss mindestens ein β_i auch keine solche $\mathbb{Z}$-Linearkombination sein. Dies widerspricht aber der Minimalität von (β, γ).

Da $R = R^+(\gamma) \,\dot\cup\, -R^+(\gamma)$, folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass $\Delta(\gamma)$ ganz $\mathbb{E}$ aufspannt. Es bleibt also noch die lineare Unabhängigkeit der Elemente von $\Delta(\gamma)$ zu zeigen. Dazu beweisen wir zunächst, dass für verschiedene $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$ stets $(\alpha, \beta) \leq 0$. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel nach Lemma 4.5 und daher $\alpha - \beta$ oder $\beta - \alpha$ in $R^+(\gamma)$. Im ersten Fall ist $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$, womit α zerlegbar ist; im zweiten Fall ist $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ und damit β zerlegbar. In beiden Fällen erhalten wir also einen Widerspruch zu $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$.

Es sei nun $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha = 0$ für geeignete $r_\alpha \in \mathbb{R}$. Durch Zusammenfassen der Summanden mit positiven Koeffizienten definieren wir

$$\varepsilon := \sum_{\alpha\colon r_\alpha > 0} r_\alpha \alpha = \sum_{\beta\colon r_\beta < 0} (-r_\beta)\beta.$$

Es gilt dann

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{r_\alpha > 0;\, r_\beta < 0} r_\alpha (-r_\beta)(\alpha, \beta) \leq 0,$$

womit $\varepsilon = 0$. Daher folgt

$$0 = (\varepsilon, \gamma) = \sum_{\alpha\colon r_\alpha > 0} r_\alpha (\alpha, \gamma) = \sum_{\beta\colon r_\beta < 0} (-r_\beta)(\beta, \gamma)$$

wobei $(\alpha, \gamma) > 0$ und $(\beta, \gamma) > 0$, da alle α, $\beta \in R^+(\gamma)$. Dies ist nur möglich, wenn alle $r_\alpha = r_\beta = 0$ sind. Damit sind die Elemente von $\Delta(\gamma)$ linear unabhängig und $\Delta(\gamma)$ eine Basis von R.

Es sei nun Δ eine beliebige Basis von R. Da der Durchschnitt der offenen positiven Halbräume, die durch die Elemente einer Basis von $\mathbb{E}$ bestimmt werden, nicht leer ist, gibt es ein $\gamma \in \mathbb{E}$, sodass $(\alpha, \gamma) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Damit ist γ regulär und aus (B2) folgt $R^+ = R^+(\gamma)$ und $R^- = -R^+(\gamma)$. Als Basis von $\mathbb{E}$ besteht Δ daher offenbar aus unzerlegbaren Elementen, d.h. $\Delta \subseteq \Delta(\gamma)$. Da aber $|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = \dim \mathbb{E}$ folgt $\Delta = \Delta(\gamma)$. ■

Bemerkung.

(a) Das Argument zum Beweis der linearen Unabhängigkeit von $\Delta(\gamma)$ zeigt, dass jede Menge von Vektoren, die strikt auf einer Seite einer Hyperebene von $\mathbb{E}$ liegen und paarweise stumpfe Winkel einschließen, linear unabhängig ist.

Ist R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$, so teilen die Hyperebenen H_α, $\alpha \in R$, den Raum $\mathbb{E}$ in endlich viele zusammenhängende Regionen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition. Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{E} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$ heißen die (offenen) *Weyl Kammern* von $\mathbb{E}$. Ist $\gamma \in \mathbb{E}$ regulär, so bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Weyl Kammer die γ enthält mit $\mathfrak{C}(\gamma)$.

Proposition 4.10 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$. Die Weyl Kammern von $\mathbb{E}$ stehen in $1-1$ Beziehung zu den Basen von R.*

Beweis: Nach Satz 4.9 ist jede Basis von R von der Form $\Delta(\gamma)$ für ein reguläres $\gamma \in \mathbb{E}$. Offenbar gilt genau dann $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$, wenn $R^+(\gamma) = R^+(\gamma')$ bzw. wenn γ und γ' auf derselben Seite jeder der Hyperebenen H_α, $\alpha \in R$ liegen. Damit ist aber $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$. ■

Definition. Ist R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ mit Basis $\Delta = \Delta(\gamma)$ für ein reguläres $\gamma \in \mathbb{E}$, dann heißt $\mathfrak{C}(\Delta) := \mathfrak{C}(\gamma)$ die *fundamentale Weyl Kammer* in Bezug auf Δ.

Bemerkungen.

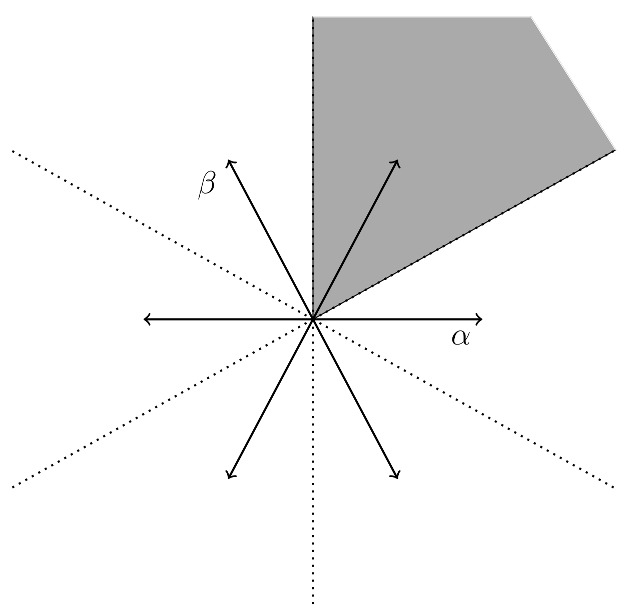
(a) Die fundamentale Weyl Kammer in Bezug auf eine Basis Δ ist die offene konvexe Menge gegeben durch $\mathfrak{C}(\Delta) = \{\gamma \in \mathbb{E} : (\alpha, \gamma) > 0 \text{ für alle } \alpha \in \Delta\}$.

(b) Die Weyl Gruppe $W(R)$ von R bildet einerseits Basen von R auf Basen von R ab und andererseits Weyl Kammern auf Weyl Kammern. Genauer gilt

$$\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma)) \qquad \text{und} \qquad \sigma(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma(\gamma))$$

für alle $\sigma \in W(R)$ und regulären $\gamma \in \mathbb{E}$. Die Wirkung von $W(R)$ ist also mit der $1-1$ Beziehung zwischen Weyl Kammern und Basen verträglich.

Beispiel.
Das folgende Bild zeigt die fundamentale Weyl Kammer des Wurzelsystems vom Typ A_2 in Bezug auf die Basis $\{\alpha, \beta\}$:



Es sei wieder R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Wir wollen als nächstes zeigen, dass wir alle Wurzeln durch sukzessive Anwendung einfacher Spiegelungen auf einfache Wurzeln erhalten können. Dazu benötigen wir einige Hilfsresultate über einfache Wurzeln.

Lemma 4.11 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R.*

(a) Ist $\alpha \in R^+$ nicht einfach, dann ist $\alpha - \beta \in R^+$ für ein $\beta \in \Delta$.

(b) Ist $\alpha \in \Delta$, dann permutiert σ_α die Menge der von α verschiedenen positiven Wurzeln.

(c) Ist $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ eine Darstellung von $\sigma \in W(R)$ als Produkt einfacher Spiegelungen mit t so klein wie möglich, dann ist $\sigma(\alpha_t) \prec 0$.

Beweis: Wir beginnen mit dem Beweis der Aussage (a). Angenommen es wäre $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle $\beta \in \Delta$. Da $\alpha \in R^+$, folgt dann aus der Bemerkung nach Satz 4.9, dass $\Delta \cup \{\alpha\}$ eine linear unabhängige Menge ist. Dies ist ein Widerspruch, da Δ bereits eine Basis von $\mathbb{E}$ ist. Es gibt also ein $\beta \in \Delta$, sodass $(\alpha, \beta) > 0$. Da α nicht einfach ist, kann β nicht proportional zu α sein, womit $\alpha - \beta \in R$ nach Lemma 4.5. Schreiben wir nun α in der Form $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$, dann sind alle $k_\gamma \geq 0$ und es gibt mindestens ein $\gamma \neq \beta$ mit $k_\gamma > 0$. Die Wurzel $\alpha - \beta$ hat daher eine Basisdarstellung bezüglich Δ in der mindestens ein Koeffizient positiv ist, womit alle Koeffizienten positiv sein müssen nach (B2). Damit ist $\alpha - \beta \in R^+$.

Zum Beweis von (b) sei $\beta \in R^+$ und $\beta \neq \alpha$. Dann können wir β darstellen in der Form $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ mit $k_\gamma \geq 0$ und $k_\gamma > 0$ für ein $\gamma \neq \alpha$. Da $\sigma_\alpha(\beta) \in R$ und $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$, ist der Koeffizient von γ in $\sigma_\alpha(\beta)$ immer noch k_γ und daher positiv. Eigenschaft (B2) impliziert daher, dass alle Koeffizienten in der Basisdarstellung von $\sigma_\alpha(\beta)$ positiv sein müssen, womit $\sigma_\alpha(\beta) \in R^+$. Außerdem ist $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$, da $\sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha$.

Schließlich seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ nicht notwendig verschieden. Dann genügt es zum Beweis von (c) zu zeigen, dass wenn $\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)$ negativ ist, es einen Index $1 \leq s < t$ gibt, sodass

$$\sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t} = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_{s-1}} \sigma_{\alpha_{s+1}} \cdots \sigma_{\alpha_{t-1}}. \tag{4.1}$$

Dazu definieren wir $\beta_i = \sigma_{\alpha_{i+1}} \cdots \sigma_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)$ für $0 \leq i \leq t-2$ und $\beta_{t-1} = \alpha_t$. Da $\beta_0 \prec 0$ und $\beta_{t-1} \succ 0$, gibt es einen kleinsten Index s für den $\beta_s \succ 0$. Dann ist $\sigma_{\alpha_s}(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$, womit aus Aussage (b) nun $\beta_s = \alpha_s$ folgt. Da nach Lemma 4.3 aber $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in W(R)$ und $\alpha \in R$, folgt nun insbesondere

$$\sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_s} = \sigma_{\alpha_{s+1}} \cdots \sigma_{\alpha_{t-1}} \sigma_{\alpha_t} \sigma_{\alpha_{t-1}} \cdots \sigma_{\alpha_{s+1}}$$

und daraus (4.1). ■

Korollar 4.12 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R.*

(a) Jedes $\alpha \in R^+$ kann in der Form $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_k$ mit nicht notwendig verschiedenen $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \Delta$ dargestellt werden, sodass jede der Teilsummen $\beta_1 + \cdots + \beta_i$ eine Wurzel ist.

(b) Ist $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \succ 0} \alpha$, dann gilt $\sigma_\beta(\delta) = \delta - \beta$ für jedes $\beta \in \Delta$.

Beweis: Die Aussage (a) folgt aus Lemma 4.11 (a) durch Induktion nach der Höhe von α. Aussage (b) ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 4.11 (b). ■

Wir sind nun in der Lage den Hauptsatz über die Weyl Gruppe eines Wurzelsystems zu beweisen. Davor erinneren wir noch daran, dass man die Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X *transitiv* nennt, wenn es zu jedem Paar $x, y \in X$ ein $g \in G$ gibt mit $g \cdot x = y$. Die Wirkung heißt *einfach transitiv*, wenn zusätzlich die Identität das einzige Gruppenelement mit Fixpunkten ist.

Satz 4.13 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R.*

(a) Die Weyl Gruppe wirkt einfach transitiv auf der Menge der Weyl Kammern.

(b) Die Weyl Gruppe wirkt einfach transitiv auf der Menge der Basen von R.

(c) Zu jedem $\alpha \in R$ gibt es ein $\sigma \in W(R)$ mit $\sigma(\alpha) \in \Delta$.

(d) Die Weyl Gruppe wird von den einfachen Spiegelungen erzeugt.

Beweis: Wir werden Aussagen (a), (b), (c) für die von den einfachen Spiegelungen erzeugte Untergruppe $W_0(R)$ von $W(R)$ zeigen und dann $W_0(R) = W(R)$ schließen.

Es sei $\gamma \in \mathbb{E}$ regulär. Um die Transitivität der Wirkung der Weyl Gruppe auf der Menge der Weyl Kammern zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, dass es zur Weyl Kammer $\mathfrak{C}(\gamma)$ ein $\sigma \in W_0(R)$ gibt, welches $\mathfrak{C}(\gamma)$ auf $\mathfrak{C}(\Delta)$ abbildet. Anders ausgedrückt wollen wir ein $\sigma \in W_0(R)$ finden, sodass $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Dazu betrachten wir den Vektor $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \succ 0} \alpha$ und wählen $\sigma \in W_0(R)$ so, dass $(\sigma(\gamma), \delta)$ maximal ist. Ist $\alpha \in \Delta$, dann ist auch $\sigma_\alpha \sigma \in W_0(R)$, womit aus der Maximalität von σ und Korollar 4.12 folgt

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha).$$

Damit ist $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \Delta$. Da γ aber regulär ist, kann $(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ für kein $\alpha \in \Delta$ gelten, da sonst γ orthogonal zu $\sigma^{-1}(\alpha)$ wäre. Es folgt $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta$ und damit die Behauptung. Aus Proposition 4.10 und den darauf folgenden Bemerkungen folgt nun auch die Transitivität der Wirkung auf Basen. Um die Beweise der Aussagen (a) und (b) abzuschließen, müssen wir noch zeigen, dass die entsprechenden Wirkungen *einfach* transitiv sind. Davor zeigen wir aber zunächst Aussagen (c) und (d).

Zum Beweis von (c) genügt es, aufgrund der transitiven Wirkung der Weyl Gruppe (bzw. $W_0(R)$) auf Basen, zu zeigen, dass jede Wurzel $\alpha \in R$ zu einer Basis gehört. Da $\pm\alpha$ die einzigen Wurzeln sind, die proportional zu α sind, sind die Hyperebenen H_β mit $\beta \in R$ und $\beta \neq \pm\alpha$ alle von H_α verschieden. Es gibt daher ein $\gamma \in H_\alpha$, sodass $\gamma \notin H_\beta$ für alle $\beta \in R$ und $\beta \neq \pm\alpha$. Wir wählen nun $\gamma' \in \mathbb{E}$ aus einer Umgebung von γ so, dass $(\gamma', \alpha) = \varepsilon > 0$ und $|(\gamma', \beta)| > \varepsilon$ für alle $\beta \in R$ und $\beta \neq \pm\alpha$. Dann ist γ' regulär und es ist leicht zu sehen, dass α zur Basis $\Delta(\gamma')$ gehört.

Um als nächstes $W_0(R) = W(R)$ zu zeigen, genügt es offenbar zu beweisen, dass jede Spiegelung σ_α mit $\alpha \in R$ in $W_0(R)$ liegt. Nach dem Beweis von (c) gibt es zu jedem $\alpha \in R$ ein $\sigma \in W_0(R)$, sodass $\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$. Dann ist aber nach Lemma 4.3, $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ und damit $\sigma_\alpha = \sigma^{-1} \sigma_\beta \sigma \in W_0(R)$.

Schließlich können wir jetzt noch die einfache Transitivität der Wirkung der Weyl Gruppe auf Basen und damit auf Weyl Kammern beweisen. Dazu müssen wir zeigen, dass $\sigma(\Delta) = \Delta$ für ein $\sigma \in W(R)$ nur für $\sigma = \mathrm{Id}$ gelten kann. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann können wir σ nach (d) als Produkt $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$ einfacher Spiegelungen schreiben mit $t \geq 1$ so klein wie möglich. Nach Lemma 4.11 (c) ist dann aber $\sigma(\alpha_t) \prec 0$, ein Widerspruch zu $\sigma(\Delta) = \Delta$. ■

Aussage (d) von Satz 4.13 motiviert die folgende Definition.

Definition. Es sei wieder R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Ist $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$ eine Darstellung von $\sigma \in W(R)$ mit t minimal, dann nennt man diese Darstellung *reduziert* und $l(\sigma) := t$ die *Länge* von σ in Bezug auf Δ. Dies wird ergänzt durch die Festlegung $l(\mathrm{Id}) = 0$.

Das folgende einfache Resultat erlaubt eine alternative Interpretation der Länge einer Spiegelung $\sigma \in W(R)$.

Proposition 4.14 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Dann stimmt für jedes $\sigma \in W(R)$ die Länge von σ mit der Anzahl positiver Wurzeln α überein, für die $\sigma(\alpha) \prec 0$, d.h. $l(\sigma) = |\{\alpha \in R^+ : \sigma(\alpha) \prec 0\}|$.*

Beweis: Für $\sigma \in W(R)$ sei $n(\sigma) := |\{\alpha \in R^+ : \sigma(\alpha) \prec 0\}|$. Der Beweis von $l(\sigma) = n(\sigma)$ erfolgt durch Induktion nach $l(\sigma)$. Ist $l(\sigma) = 0$, dann ist $\sigma = \mathrm{Id}$ und daher auch $n(\sigma) = 0$. Wir nehmen nun an, dass $l(\sigma) \geq 1$ und die Behauptung für alle $\tau \in W(R)$ mit $l(\tau) < l(\sigma)$ stimmt. Für den Induktionsschritt schreiben wir σ in reduzierter Form als Produkt $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_t}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$. Nach Lemma 4.11 (c) ist dann $\sigma(\alpha_t) \prec 0$, also $n(\sigma) \geq 1$. Nun folgt aus Lemma 4.11 (b) einerseits $n(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = n(\sigma) - 1$und aus aus der Produktdarstellung von σ andererseits $l(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = l(\sigma) - 1 < l(\sigma)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $l(\sigma\sigma_{\alpha_t}) = n(\sigma\sigma_{\alpha_t})$ und damit $l(\sigma) = n(\sigma)$. ■

Wir haben bereits gesehen, dass es zur Klassifikation aller Wurzelsyteme genügt sich auf irreduzible zu konzentrieren. Wir wollen daher vorbereitend noch einige Aussagen über irreduzible Wurzelsysteme beweisen.

Lemma 4.15 *Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Dann ist R genau dann irreduzibel, wenn sich Δ nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer Teilmengen $\Delta = \Delta_1 \dot\cup \Delta_2$ darstellen lässt, wobei $(\alpha, \beta) = 0$ für alle $\alpha \in \Delta_1$ und $\beta \in \Delta_2$.*

Beweis: Es sei zunächst $R = R_1 \dot\cup R_2$ für zwei nicht-leere Teilmengen R_1 und R_2 von R mit $(R_1, R_2) = 0$. Ist Δ nicht ganz in einer der Mengen R_1 oder R_2 enthalten, liefert dies sofort eine entsprechende Partition von Δ und wir sind fertig. Ist etwa $\Delta \subseteq R_1$, so folgt $(\Delta, R_2) = 0$ und damit $(\mathbb{E}, R_2) = 0$ da Δ ganz $\mathbb{E}$ aufspannt. Das kann nur für $R_2 = \{0\}$ erfüllt sein, ein Widerspruch.

Es sei nun umgekehrt R irreduzibel und $\Delta = \Delta_1 \dot\cup \Delta_2$ mit $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Wir wollen zeigen, dass $\Delta_1 = \emptyset$ oder $\Delta_2 = \emptyset$. Dazu definieren wir für $i = 1, 2$,

$$R_i = \{\alpha \in R : \sigma(\alpha) \in \Delta_i \text{ für ein } \sigma \in W(R)\}.$$

Nach Satz 4.13 (c) ist $R = R_1 \cup R_2$. Da für $(\alpha, \beta) = 0$ die zugehörigen Spiegelungen kommutieren, also $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_\beta \sigma_\alpha$ gilt, und $W(R) = W_0(R)$ nach Satz 4.13 (d), folgt, dass jede Wurzel in R_i durch Addition bzw. Subtraktion von Elementen aus $\operatorname{span} \Delta_i$ entsteht. Daher ist $R_i \subseteq \operatorname{span} \Delta_i$, womit $(R_1, R_2) = 0$. Daraus folgt $R_1 = \emptyset$ oder $R_2 = \emptyset$ und damit $\Delta_1 = \emptyset$ oder $\Delta_2 = \emptyset$. ■

Die für uns wichtigsten Hilfsaussagen über irreduzible Wurzelsysteme fassen wir in folgendem Lemma zusammen. Davor sei daran erinnert, dass eine *Darstellung* einer Gruppe G auf einem Vektorraum X ein Homomorphismus von G nach $\mathrm{GL}(X)$ ist. Ist $G \subseteq \mathrm{GL}(Y)$ für einen Vektorraum Y, dann nennt man die Inklusionsabbildung $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(Y)$ die *natürliche Darstellung* von G. Schließlich heißt eine Darstellung von G auf X *irreduzibel*, wenn X keine nicht-trivialen G-invarianten Unterräume hat.

Lemma 4.16 *Es sei R ein irreduzibles Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R.*

(a) In Bezug auf die Halbordnung $\prec$ gibt es eine eindeutige maximale Wurzel α. Ist $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \beta$, dann gilt $k_\beta > 0$ für alle $\beta \in \Delta$. Insbesondere ist $\operatorname{ht} \alpha > \operatorname{ht} \gamma$ *für alle $\gamma \in R$ mit $\gamma \neq \alpha$ und $(\alpha, \beta) \geq 0$ für alle $\beta \in \Delta$.*

(b) Die natürliche Darstellung der Weyl Gruppe auf $\mathbb{E}$ ist irreduzibel. Insbesondere spannt der $W(R)$-Orbit einer beliebigen Wurzel ganz $\mathbb{E}$ auf.

(c) Es gibt höchstens zwei verschiedene Möglichkeiten für die Längen der Wurzeln in R, man spricht daher von langen *und* kurzen *Wurzeln. Die Weyl Gruppe wirkt transitiv auf Wurzeln einer gegebenen Länge.*

(d) Kommen in R zwei verschiedene Wurzellängen vor, so gehört die maximale Wurzel α zu den langen Wurzeln.

Beweis: Zum Beweis von (a), sei $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} k_\beta \beta$ maximal in Bezug auf die partielle Ordnung $\prec$. Offenbar ist dann $\alpha \succ 0$. Bezeichnen wir mit

$$\Delta_1 = \{\beta \in \Delta : k_\beta > 0\} \qquad \text{und} \qquad \Delta_2 = \{\beta \in \Delta : k_\beta = 0\}.$$

Dann ist offenbar $\Delta = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2$. Angenommen Δ_2 ist nicht-leer. Aus Lemma 4.8 folgt $(\alpha, \beta) \leq 0$ für alle $\beta \in \Delta_2$. Da R irreduzibel ist, gibt es mindestens ein $\beta \in \Delta_2$, welches nicht orthogonal auf Δ_1 ist, d.h. es gibt ein $\beta' \in \Delta_1$ mit $(\beta, \beta') < 0$, womit $(\alpha, \beta) < 0$. Nach Lemma 4.5 ist daher $\alpha + \beta$ eine Wurzel, im Widerspruch zur Maximalität von α. Daher ist $\Delta_2 = \emptyset$ und es gilt $k_\beta > 0$ für alle $\beta \in \Delta$. Dieses Argument zeigt auch, dass $(\alpha, \beta) \geq 0$ für alle $\beta \in \Delta$ mit $(\alpha, \beta) > 0$ für mindestens ein β, da Δ ganz $\mathbb{E}$ aufspannt.

Es bleibt die Eindeutigkeit von α zu zeigen. Dazu sei α' eine weitere maximale Wurzel. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass die Basisdarstellung von α' eine einfache Wurzel $\beta \in \Delta$ mit positivem Koeffizienten enthält für die $(\alpha, \beta) > 0$. Daraus folgt $(\alpha', \alpha) > 0$, womit nach Lemma 4.5 entweder $\alpha - \alpha'$ eine Wurzel ist oder $\alpha = \alpha'$. Ist $\alpha - \alpha'$ eine Wurzel, dann ist aber $\alpha \prec \alpha'$ oder $\alpha' \prec \alpha$, ein Widerspruch.

Wir kommen nun zum Beweis der Aussage (b). Da der $W(R)$-Orbit jeder Wurzel ein nicht-trivialer $W(R)$-invarianter Unterraum von $\mathbb{E}$ ist, müssen wir nur die erste Behauptung zeigen. Es sei dazu U ein von Null verschiedener $W(R)$-invarianter Unterraum von $\mathbb{E}$. Dann ist $U^\perp$ auch $W(R)$-invariant und $\mathbb{E} = U \oplus U^\perp$. Da aber $\sigma_\alpha(U) = U$ für alle $\alpha \in R$, folgt auf einfache Weise, dass eine Wurzel α entweder in U liegt oder $U \subseteq H_\alpha$ gilt. Ist daher $\alpha \notin U$, dann ist $\alpha \in U^\perp$. Damit induziert die orthogonale Zerlegung von $\mathbb{E}$ eine Partition von R in orthogonale Teilmengen, womit eine der beiden leer sein muss. Da R ganz $\mathbb{E}$ aufspannt, folgt $\mathbb{E} = U$.

Zum Beweis von (c), seien $\alpha, \beta \in R$ beliebig aber verschieden. Da nach (b) die Menge $\{\sigma(\alpha) : \sigma \in W(R)\}$ ganz $\mathbb{E}$ aufspannt und Spiegelungen längenerhaltend sind, können wir $(\alpha, \beta) \neq 0$ annehmen. In diesem Fall sind nach der Tabelle auf Seite 64 die möglichen Quotienten der Längenquadrate von α und β gegegeben durch $1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Dies impliziert die erste Behauptung, da eine dritte Wurzellänge auch den Quotienten $3/2$ ergeben würde.

Haben nun α und β dieselbe Länge, dann können wir wieder annehmen, dass sie nicht orthogonal und verschieden sind. In diesem Fall ist $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Ersetzen wir β falls notwendig durch $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$, können wir $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ annehmen. Dann ist aber

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) = \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha.$$

Es bleibt noch Aussage (d) zu beweisen. Wir wollen zeigen, dass $(\alpha, \alpha) \geq (\beta, \beta)$ für alle $\beta \in R$. Dazu können wir β durch $\sigma(\beta)$ mit $\sigma \in W(R)$ ersetzen, sodass $\sigma(\beta)$ im Abschluss der fundamentalen Weyl Kammer liegt. Da nach (a) $\alpha - \beta \succ 0$, folgt $(\alpha - \beta, \gamma) \geq 0$ für alle $\gamma \in \operatorname{cl} \mathfrak{C}(\Delta)$. Setzen wir nun $\gamma = \alpha$ und $\gamma = \beta$, so erhalten wir $(\alpha, \alpha) \geq (\alpha, \beta) \geq (\beta, \beta)$. ■

Bevor wir den Klassifikationssatz für irreduzible Wurzelsysteme formulieren können, benötigen wir noch zwei zentrale Begriffsbildungen, die zur praktischen Speicherung der essentiellen Informationen über ein Wurzelsystem dienen.

Definition. Es sei R ein Wurzelsystem vom Rang ℓ in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Fixieren wir eine Ordnung der einfachen Wurzeln, etwa $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$, dann heißt die $\ell \times \ell$ Matrix $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{i,j=1}^{\ell}$ die *Cartan Matrix* von R und ihre Einträge heißen *Cartan Zahlen.*

Bemerkungen.

(a) Da für jede Wurzel $\beta \in R$ gilt

$$\langle \sigma_\beta(\alpha_i), \sigma_\beta(\alpha_j) \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle,$$

folgt aus der Transitivität der Aktion der Weyl Gruppe auf Basen (Satz 4.13), dass die Cartan Matrix von R nur von der gewählten Ordnung der einfachen Wurzeln und nicht von Δ selbst abhängt.

(b) Da Δ eine Basis von $\mathbb{E}$ ist, ist die Cartan Matrix von R nicht-singulär.

(c) Die Cartan Zahlen sind aufgrund von (R4) stets ganzzahlig.

Beispiele.

Die Cartan Matrizen der Wurzelsysteme vom Rang 2 sind gegeben durch:

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \ A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \ B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \ G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Unser nächstes Resultat zeigt, dass die Cartan Matrix eines Wurzelsystems dieses bis auf Isomorphie bestimmt.

Satz 4.17 *Es seien R und R' Wurzelsysteme vom Rang ℓ in $\mathbb{E}$ bzw. $\mathbb{E}'$ mit Basen $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ und $\Delta' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell\}$. Ist $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq \ell$, dann bestimmt die Abbildung $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ (eindeutig) einen Isomorphismus zwischen den Wurzelsytemen R und R'. Insbesondere sind Wurzelsysteme mit derselben Cartan Matrix isomorph.*

Beweis: Da Δ und Δ' Basen von $\mathbb{E}$ bzw. $\mathbb{E}'$ sind, bestimmt die Abbildung $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ einen eindeutigen Isomorphismus $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ mit $\phi(\alpha_i) = \alpha'_i$ für $1 \leq i \leq \ell$ und nach Voraussetzung gilt $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \phi(\alpha_i), \phi(\alpha_j) \rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq \ell$. Für $\alpha, \beta \in \Delta$ folgt

$$\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \phi(\alpha) = \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \phi(\sigma_\alpha(\beta)).$$

Da ϕ linear ist, kommutiert also das folgende Diagramm für jedes $\alpha \in \Delta$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma_\alpha"'] & \mathbb{E}' \arrow[d, "\sigma_{\phi(\alpha)}"] \\ \mathbb{E} \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{E}' \end{tikzcd}$$

Da nach Satz 4.13 (d) die Weyl Gruppen $W(R)$ und $W(R')$ von den einfachen Spiegelungen erzeugt werden, folgt, dass die Abbildung $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus zwischen $W(R)$ und $W(R')$ ist, unter dem σ_α auf $\sigma_{\phi(\alpha)}$, $\alpha \in \Delta$, abgebildet wird. Nun gibt es nach Satz 4.13 (c) zu jeder Wurzel $\beta \in R$ ein $\sigma \in W(R)$, sodass $\beta = \sigma(\alpha)$ für ein $\alpha \in \Delta$. Daraus folgt $\phi(\beta) = (\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha)) \in R'$, womit $\phi(R) \subseteq R'$. Wiederholung dieses Arguments für ϕ^{-1} liefert $\phi^{-1}(R') \subseteq R$ und damit insgesamt $\phi(R) = R'$.

Sind nun $\alpha \in R$ und $\beta \in \Delta$ beliebig, dann gilt aufgrund der Linearität von ϕ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im ersten Argument offenbar $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle$. Sind beide $\alpha, \beta \in R$ beliebig, dann gibt es nach Satz 4.13 (c) ein $\sigma \in W(R)$, sodass $\sigma(\beta) \in \Delta$. Es folgt

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle = \langle \phi(\sigma(\alpha)), \phi(\sigma(\beta)) \rangle = \langle \sigma'(\phi(\alpha)), \sigma'(\phi(\beta)) \rangle = \langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle,$$

wobei $\sigma' = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$. Damit ist ϕ ein Isomorphismus zwischen den Wurzelsystemen R und R'. ■

Bemerkung.

(a) Es ist nicht schwierig aus der Kenntnis der Cartan Matrix eines Wurzelsystems die (positiven) Wurzeln durch einen praktischen Algorithmus zu erhalten. Dazu betrachtet man Wurzelketten und verwendet Korollar 4.12 (a).

Eine Alternative zur Speicherung der Informationen einer Cartan Matrix stellen die sogenannten Dynkin Diagramme dar.

Definition. Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Das Dynkin Diagramm von R ist der Graph $D(R)$ definiert wie folgt: Die Ecken von $D(R)$ werden mit den einfachen Wurzeln beschriftet. Zwischen zwei Ecken α und β zeichnen wir

$$d_{\alpha\beta} := \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Kanten. Ist $d_{\alpha\beta} > 1$ (dies ist immer dann der Fall, wenn α und β verschiedene Längen haben und nicht orthogonal sind), dann zeichnen wir einen Pfeil von der längeren zur kürzeren Wurzel.

Der Graph mit denselben Ecken und Kanten, aber ohne Pfeile heißt der *Coxeter Graph* von R.

Bemerkungen.

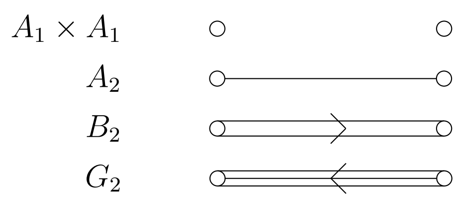
(a) Das Dynkin Diagramm und der Coxeter Graph von R hängen nicht von der Wahl der Basis Δ ab.

(b) Da aus dem Dynkin Diagramm $D(R)$ die Zahlen $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ abgelesen werden können, bestimmt $D(R)$ das Wurzelsystem R bis auf Isomorphie.

(c) Der Coxeter Graph bestimmt die Zahlen $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ nur im Fall, dass alle Wurzeln gleiche Länge besitzen. Man kann jedoch zeigen, dass der Coxeter Graph stets die Weyl Gruppe $W(R)$ vollständig bestimmt.

Beispiele.

Die Dynkin Diagramme der Wurzelsysteme vom Rang 2 sind gegeben durch:



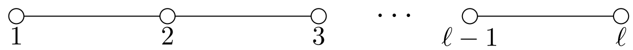
Aus der Definition von Dynkin Diagrammen und Coxeter Graphen folgt sofort:

Proposition 4.18 *Ein Wurzelsystem R ist genau dann irreduzibel, wenn das Dynkin Diagramm bzw. der Coxeter Graph von R zusammenhängend sind.*

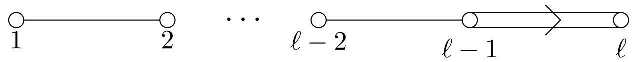
Proposition 4.7 zeigt, dass zur Klassifikation aller Wurzelysteme, eine Klassifikation der irreduziblen Wurzelsysteme bzw., äquivalent dazu, aller zusammenhängenden Dynkin Diagramme ausreicht. Dies ist der Inhalt des folgenden Hauptsatzes über Wurzelsysteme.

Satz 4.19 *Ist R ein irreduzibles Wurzelsystem vom Rang ℓ, dann gehört das Dynkin Diagramm von R entweder zu einer der folgenden vier Familien*

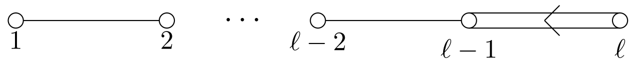
A_ℓ *für* $\ell \geq 1$:



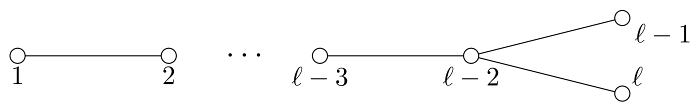
B_ℓ *für* $\ell \geq 2$:



C_ℓ *für* $\ell \geq 3$:

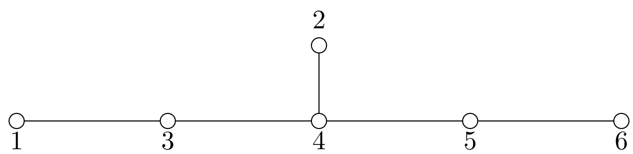


D_ℓ *für* $\ell \geq 4$:

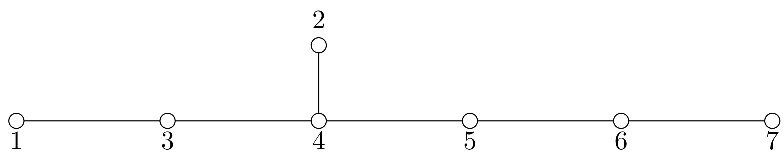


oder zu einem der folgenden fünf Diagrammen

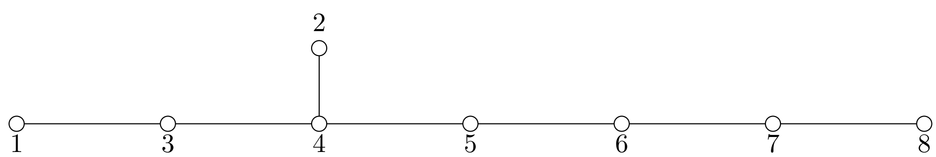
E_6 :



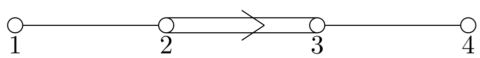
E_7 :



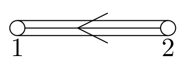
E_8 :



F_4 :



G_2 :



Bemerkungen.

(a) Die Bedingungen an ℓ bei den Typen A_ℓ bis D_ℓ dienen dazu Wiederholungen zu vermeiden. So kommt etwa das Diagramm C_2 nicht in der Liste vor, da es mit B_2 übereinstimmt, womit die assoziierten Wurzelsysteme isomorph sind.

(b) Aus obiger Liste erkennt man, dass die Coxeter Graphen der Typen B_ℓ und C_ℓ übereinstimmen, die assoziierten Wurzelsysteme sich allerdings in der relativen Anzahl langer und kurzer Wurzeln unterscheiden. Es lässt sich zeigen, dass B_ℓ und C_ℓ dual zueinander sind.

Zum Beweis von Satz 4.19 klassifizieren wir im ersten Schritt alle möglichen Coxeter Graphen irreduzibler Wurzelsysteme. Um diese Graphen aufzufinden, müssen wir zunächst nicht wissen, dass sie von Wurzelsytemen kommen und wir können daher allgemeinere Mengen von Vektoren betrachten.

Definition. Eine Menge A bestehend aus linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ eines Euklidischen Vektorraumes $\mathbb{E}$ heißt *zulässig*, wenn gilt:

(i) Es ist $(v_i, v_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $(v_i, v_j) \leq 0$ für $i \neq j$;

(ii) Für $i \neq j$ ist $4(v_i, v_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Einer zulässigen Teilmenge A von $\mathbb{E}$ ordnen wir den Graphen Γ zu, dessen Ecken mit den Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ beschriftet sind und mit $d_{ij} = 4(v_i, v_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ Kanten zwischen v_i und v_j für $i \neq j$.

Beispiel.
Es sei R ein Wurzelsystem in $\mathbb{E}$ und Δ eine Basis von R. Dann ist die Menge

$$A = \left\{ \frac{\alpha}{\|\alpha\|} : \alpha \in \Delta \right\}.$$

zulässig und der Graph Γ gerade der Coxeter Graph von R.

Wir wollen nun alle zusammenhängenden Graphen finden, die mit zulässigen Mengen assoziiert sind. Dies erreichen wir mit Hilfe einer Reihe von Lemmata.

Lemma 4.20 *Es sei A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Jede Teilmenge von A ist zulässig.

(b) Die Anzahl der Paare von Ecken in Γ, die durch mindestens eine Kante verbunden sind, ist höchstens $|A| - 1$.

(c) Der Graph Γ ist zyklenfrei.

(d) Keine Ecke von Γ ist inzident zu vier oder mehr Kanten.

Beweis: Aussage (a) ist eine direkte Folgerung aus der Definition zulässiger Mengen.

Zum Beweis von (b) sei $A = \{v_1, \ldots, v_m\}$ und $v = \sum_{i=1}^{m} v_i$. Da A aus linear unabhängigen Vektoren besteht, ist $v \neq 0$ und daher

$$(v, v) = m + 2\sum_{i<j} (v_i, v_j) > 0.$$

Aus $(v_i, v_j) \leq 0$ folgt nun

$$m > \sum_{i<j} -2(v_i, v_j) = \sum_{i<j} \sqrt{d_{ij}} \geq N,$$

wobei N die Anzahl von Paaren $\{v_i, v_j\}$ bezeichnet, sodass $d_{ij} \geq 1$. Dies ist aber gerade die Anzahl der Paare von Ecken in Γ, die durch mindestens eine Kante verbunden sind.

Nehmen wir nun an, dass Γ ein zyklischer Graph ist und es sei A' die Teilmenge von A, bestehend aus den Vektoren eines Zyklus in Γ. Dann ist A' nach (a) eine zulässige Menge mit derselben (oder größerer) Anzahl an Kanten wie Ecken, im Widerspruch zu (b). Dies liefert Aussage (c).

Zum Beweis von (d), sei schließlich v eine Ecke von Γ und $v_1, \ldots, v_k$ alle Ecken in Γ, die durch $1, 2$ oder 3 Kanten mit v verbunden sind, d.h. insbesondere, dass $(v, v_i) < 0$ für $1 \leq i \leq k$. Da Γ zyklenfrei ist, muss $(v_i, v_j) = 0$ für $1 \leq i \neq j \leq k$. Es sei nun U der Unterraum von $\mathbb{E}$ mit Basis $\{v_1, \ldots, v_k, v\}$. Durch das Gram–Schmidt Verfahren, können wir $v_1, \ldots, v_k$ zu einer Orthogonalbasis von U erweitern, etwa durch hinzufügen von v_0. Offenbar ist dann $(v, v_0) \neq 0$. Verwenden wir nun die Basisdarstellung $v = \sum_{i=0}^{k} (v, v_i) v_i$ und den Umstand, dass v ein Einheitsvektor ist, so erhalten wir

$$1 = (v, v) = \sum_{i=0}^{k} (v, v_i)^2.$$

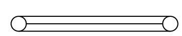
Da aber $(v, v_0)^2 > 0$, folgt

$$\sum_{i=1}^{k} (v, v_i)^2 < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{i=1}^{k} 4(v, v_i)^2 < 4,$$

wobei $4(v, v_i)^2$ aber gerade die Anzahl der Kanten ist, die v mit v_i in Γ verbindet. ■

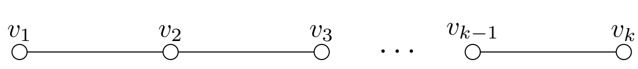
Eine direkte Konsequenz aus Lemma 4.20 (d) ist die folgende Charakterisierung des Coxeter Graphen von G_2.

Korollar 4.21 *Ist A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist und eine Dreifachkante besitzt, dann ist Γ von der Form*



Das folgende wichtige Lemma wird uns helfen, die möglichen Graphen zulässiger Mengen stark einzuschränken.

Lemma 4.22 *Es sei A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist und eine einfache Kette enthält, d.h. einen Teilgraphen der Form*



Dann ist die Menge $A' = (A \backslash \{v_1, \ldots, v_k\}) \cup \{v\}$ mit $v = \sum_{i=1}^{k} v_i$ zulässig und der zu A' assoziierte Graph Γ' entsteht aus Γ durch zusammenziehen der einfachen Kette auf eine Ecke.

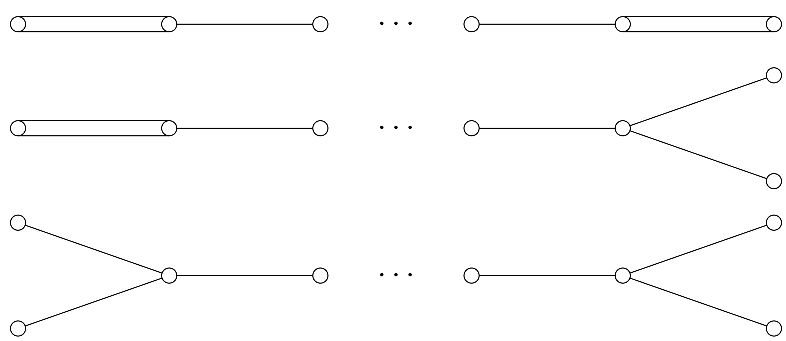
Beweis: Offenbar besteht A' aus linear unabhängigen Vektoren, womit wir nur die Bedingungen an die inneren Produkte der Vektoren aus A' nachweisen müssen. Nach Voraussetzung gilt $2(v_i, v_{i+1}) = -1$ für $1 \le i \le k-1$ und $(v_i, v_j) = 0$ für $i \ne j$ sonst. Damit ist

$$(v,v) = k + 2\sum_{i=1}^{k-1}(v_i, v_{i+1}) = k - (k-1) = 1.$$

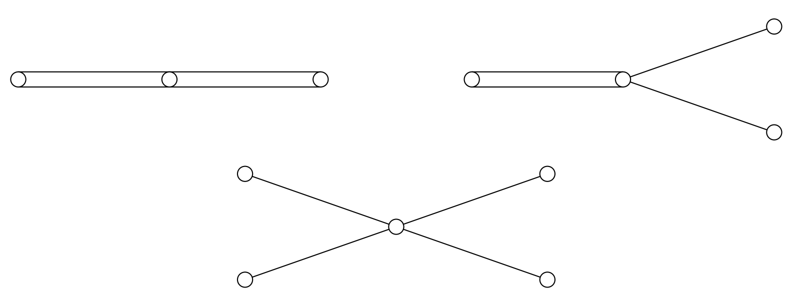
Ist $w \in A$ und $w \ne v_i$ für $1 \le i \le k$, dann kann w nach Lemma 4.20 (c) höchstens mit einem der v_i verbunden sein. Damit ist entweder $(w,v) = 0$ oder $(w,v) = (w,v_i)$ für ein $i \in \{1,\dots,k\}$ und daher $4(w,v)^2 \in \{0,1,2,3\}$. Damit ist A' zulässig und obige Argumente liefern auch die Behauptung über den Graphen Γ' von A'. ■

Als erste Konsequenz von Lemma 4.22 erhalten wir nun das folgende Resultat.

Lemma 4.23 *Es sei A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist. Dann enthält Γ keine Teilgraphen der Form*



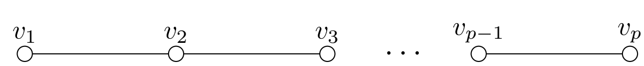
Beweis: Angenommen Γ enthält einen dieser Teilgraphen. Dann ist dieser Teilgraph nach Lemma 4.20 (a) wiederum Graph einer zulässigen Menge. Anwendung von Lemma 4.22 auf die im jeweiligen Graphen enthaltene einfache Kette liefert dann die folgenden Graphen zulässiger Mengen:



Diese Graphen stehen aber im Widerspruch zu Lemma 4.20 (d). ■

Für die letzten Schritte im Beweis von Satz 4.19 benötigen wir noch

Lemma 4.24 *Es sei A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist und eine einfache Kette enthält, etwa*



Dann gilt für den Vektor $v = \sum_{i=1}^{p} i v_i$ die Beziehung $(v,v) = \frac{p(p+1)}{2}$.

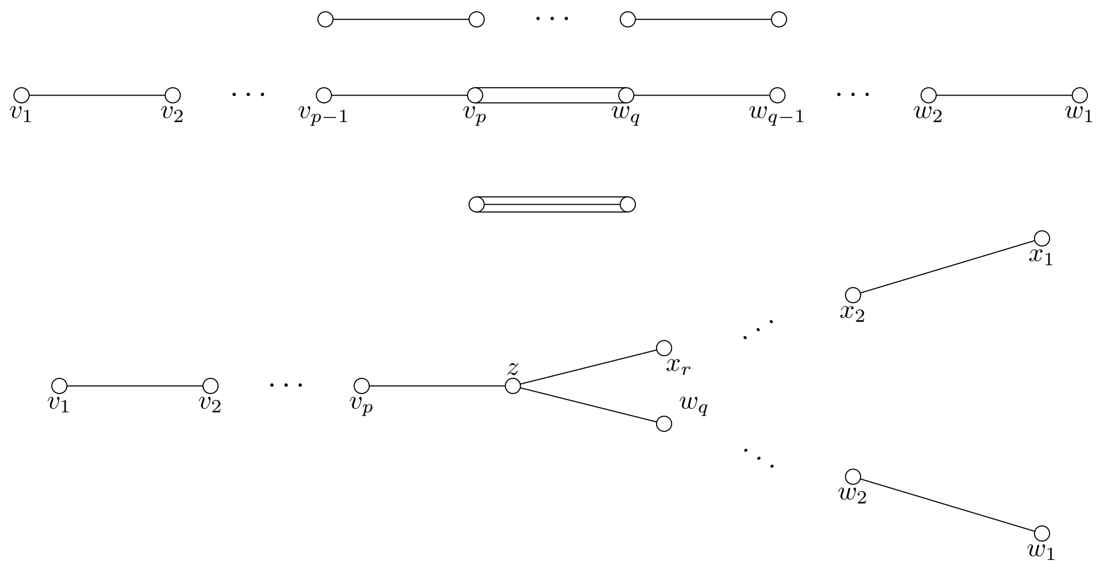
Beweis: Die Form des Teilgraphen impliziert $2(v_i, v_{i+1}) = -1$ für $1 \leq i \leq p-1$ und $(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ sonst. Damit ist

$$(v, v) = \sum_{i=1}^{p} i^2 + 2\sum_{i=1}^{p-1} (v_i, v_{i+1}) i(i+1) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}.$$

■

Wir fassen zunächst zusammen, was wir bisher wissen:

Korollar 4.25 *Ist A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist, dann hat Γ eine der folgenden Formen:*



Beweis: Besitzt Γ eine Dreifachkante, dann stimmt Γ nach Korollar 4.21 mit dem Coxeter Graph von G_2 überein. Enthält Γ mehr als eine Doppelkante, so enthält Γ einen Teilgraphen der Form

Dies ist aber nach Lemma 4.23 ausgeschlossen, womit höchstens eine Doppelkante auftritt. Hat Γ eine Doppelkante, so kann Γ nach Lemma 4.23 nicht auch noch eine Verzweigungsecke haben, womit die zweite Form die einzig mögliche ist (da Zyklen nicht erlaubt sind).

Hat Γ nur Einfachkanten, so ist Γ entweder eine einfache Kette (da Zyklen nicht erlaubt sind) oder hat eine Verzweigungsecke. Da nach Lemma 4.23 keine zweite Verzweigungsecke auftreten kann, bleibt nur die letzte Form. ■

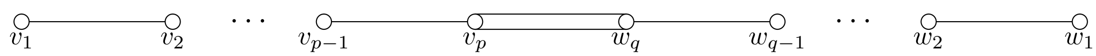
Wir sind nun in der Lage die Klassifikation der Graphen von zulässigen Mengen abzuschließen:

Proposition 4.26 *Es sei A eine zulässige Teilmenge von $\mathbb{E}$, deren assoziierter Graph Γ zusammenhängend ist.*

(a) Hat Γ eine Doppelkante, so stimmt Γ mit dem Coxeter Graph von F_4 oder von $B_n(= C_n)$ für ein passendes $n \geq 2$ überein.

(b) Hat Γ eine Verzweigungsecke, dann stimmt Γ mit dem Coxeter Graph von E_6, E_7, E_8 oder von D_n für ein passendes $n \geq 4$ überein.

Beweis: Wir beginnen mit dem Beweis von (a). Nach Korollar 4.25 hat Γ die Form



wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass $p \geq q$. Es seien $v = \sum_{i=1}^{p} iv_i$ und $w = \sum_{i=1}^{q} iw_i$. Dann gilt nach Lemma 4.24,

$$(v, v) = \frac{p(p+1)}{2} \qquad \text{und} \qquad (w, w) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Aus der Form des Graphen können wir ablesen, dass weiters $4(v_p, w_q)^2 = 2$ und $(v_i, w_j) = 0$ sonst gilt. Daher folgt

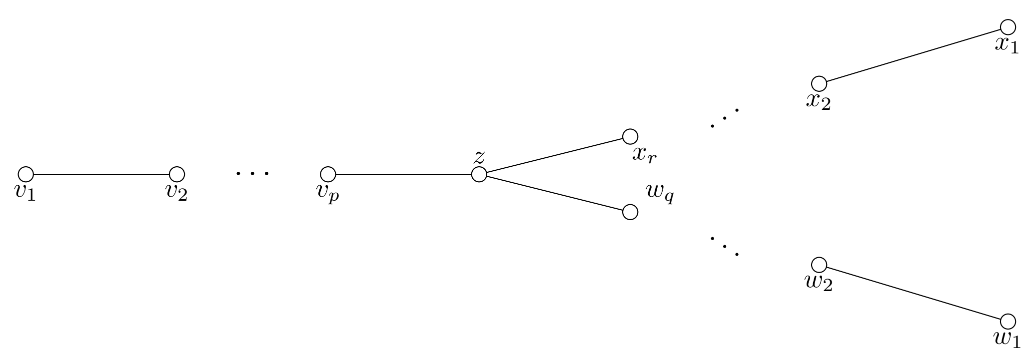
$$(v, w)^2 = (pv_p, qw_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}.$$

Da v und w linear unabhängig sind, folgt aus der Ungleichung von Cauchy–Schwarz $(v, w)^2 < (v, v)(w, w)$ und damit $2pq < (p+1)(q+1)$ oder

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 < 2.$$

Damit erhalten wir entweder $q = 1$ oder $p = q = 2$ und damit das gewünschte Resultat.

Nun zum Beweis von (b). Nach Korollar 4.25 hat Γ die Form



wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass $p \geq q \geq r$ gilt. Wir müssen zeigen, dass entweder $q = r = 1$ oder $q = 2, r = 1$ und $p \leq 4$ gilt. Dazu betrachten wir $v = \sum_{i=1}^{p} iv_i$, $w = \sum_{i=1}^{q} iw_i$ und $x = \sum_{i=1}^{r} ix_i$. Dann sind v, w und x paarweise orthogonal. Es bezeichne weiters $\hat{v} = v/\|v\|$, $\hat{w} = w/\|w\|$ und $\hat{x} = x/\|x\|$. Der von $\{v, w, x, z\}$ aufgespannte Unterraum U hat eine Orthonormalbasis $\{\hat{v}, \hat{w}, \hat{x}, z_0\}$, wobei $(z, z_0) \neq 0$. Schreiben wir z in der Form

$$z = (z, \hat{v})\hat{v} + (z, \hat{w})\hat{w} + (z, \hat{x})\hat{x} + (z, z_0)z_0,$$

so folgt aus $(z, z) = 1$ und $(z, z_0) \neq 0$, dass

$$(z, \hat{v})^2 + (z, \hat{w})^2 + (z, \hat{x})^2 < 1.$$

Da weiters

$$(z, v)^2 = (z, pv_p)^2 = \frac{p^2}{4}, \qquad (z, w)^2 = \frac{q^2}{4}, \qquad (z, x)^2 = \frac{r^2}{4},$$

erhalten wir aus Lemma 4.24 die Ungleichung

$$\frac{2p^2}{4p(p+1)} + \frac{2q^2}{4q(q+1)} + \frac{2r^2}{4r(r+1)} < 1$$

bzw. durch Umformung

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1.$$

Da $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{2}$, folgt $1 < \frac{3}{r+1}$ und damit $r < 2$, also $r = 1$. Wiederholen wir dieses Argument nun für q, so erhalten wir $q < 3$, also $q = 1$ oder $q = 2$. Ist $q = 2$, so muss $p < 5$ gelten. Ist $q = 1$, dann gibt es keine Einschränkung für p. ■

Wir sind nun in der Lage den Beweis von Satz 4.19 abzuschließen.

Beweis von Satz 4.19: Es bezeichne $D(R)$ das Dynkin Diagramm des irreduziblen Wurzelsystems R und $C(R)$ den Coxeter Graphen von R. Besitzt $C(R)$ keine Doppelkanten, so folgt aus Proposition 4.26 (b) sofort, dass $D(R)$ eines der angegebenen Diagramme sein muss. Hat $C(R)$ eine Dreifachkante, so zeigt Korollar 4.21, dass $D(R)$ mit G_2 übereinstimmen muss.

Es bleibt der Fall zu betrachten, wo $C(R)$ eine Doppelkante besitzt. Dann folgt aus Proposition 4.26 (a), dass es zwei Möglichkeiten für $D(R)$ gibt, je nachdem in welche Richtung wir den Pfeil zeichnen. Im Fall B_2 und F_4 liefern beide Richtungen im wesentlichen denselben Graphen. In allen anderen Fällen erhalten wir entweder B_ℓ oder C_ℓ mit $\ell \geq 3$. ■

Das letzte Resultat dieses Kapitels zeigt, dass jedes der in Satz 4.19 aufgelisteten Dynkin Diagramme auch zu einem Wurzelsystem gehört. Für die Typen A, B, C und D werden wir noch sehen, dass die Dynkin Diagramme der Wurzelsysteme der klassischen Lie Algebren $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$, $\mathfrak{so}_{2\ell+1}$, $\mathfrak{sp}_{2\ell}$ und $\mathfrak{so}_{2\ell}$ jeweils auf einen dieser Typen führen. Zunächst wählen wir aber einen anderen Weg und geben eine direkte Konstruktion von Wurzelsystemen an, die zu einem vorgelegten Dynkin Diagramm gehören.

Satz 4.27 *Ist T eines der Dynkin Diagramme vom Typ A bis G, dann existiert ein Wurzelsystem R mit $D(R) = T$.*

Beweis: Wir skizzieren zunächst die Strategie bei den folgenden Konstruktionen. In jedem Fall werden wir als Euklidischen Raum $\mathbb{E}$ einen Unterraum des $\mathbb{R}^m$ mit dem gewöhnlichen inneren Produkt wählen. Die Vektoren $e_1, \ldots, e_m$ sollen wieder die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^m$ bezeichnen. Die durch $\mathbb{Z}$-Kombinationen der Vektoren $e_1, \ldots, e_m$ erzeugte diskrete Untergruppe des $\mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit I. Wir definieren dann verschiedene Wurzelsysteme als eine Teilmenge von Vektoren in I (oder einer eng verwandten Untergruppe J von I) mit vorgegebenen Längen.

Da I bzw. J diskrete Untergruppen sind und die Menge der Vektoren im $\mathbb{R}^m$ mit einer oder zwei vorgegebenen Längen kompakt ist, wird R automatisch endlich sein und nach Definition 0 nicht enthalten. In jedem Fall wird auch klar sein, dass R ganz $\mathbb{E}$ aufspannt (wir werden stets eine Basis von R angeben). Somit ist nach Spezifikation von R die Bedingung (R1) stets erfüllt. Die Wahl der Längen wird auch sofort (R2) implizieren.

Zum Beweis von (R3) genügt es nach unserer Konstruktion zu zeigen, dass die Spiegelungen σ_α, $\alpha \in R$, die Menge R wieder in J abbilden, da dann σ_α automatisch aus Vektoren der richtigen Länge besteht, womit (R3) aus (R4) folgt. Um schließlich (R4) zu erfüllen, werden wir die Längenquadrate der Vektoren in R als Teiler von 2 wählen, da nach Konstruktion die inneren Produkte $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in I$.

Nach diesen Bemerkungen kommen wir nun zu den einzelnen Wurzelsystemen:

- A_ℓ für $\ell \geq 1$:

  Es sei $\mathbb{E}$ der ℓ-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^{\ell+1}$ orthogonal zu $e_1 + \cdots + e_{\ell+1}$. Weiters sei $J = I \cap \mathbb{E}$ und R die Menge aller Vektoren in J mit $(\alpha, \alpha) = 2$. Offenbar ist dann

  $$R = \{e_i - e_j : 1 \leq i \neq j \leq \ell + 1\}.$$

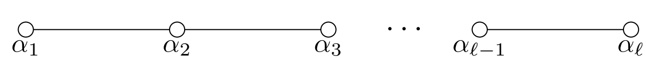
  Da die Vektoren $\alpha_i := e_i - e_{i+1}$, $1 \leq i \leq \ell$, linear unabhängig sind und für $i < j$ gilt

  $$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \cdots + (e_{j-1} - e_j),$$

  folgt, dass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von R bildet. Aus

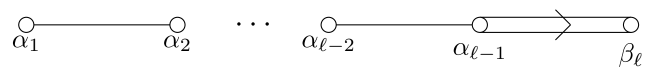
  $$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & i = j, \\ -1 & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  sehen wir, dass die Cartan Matrix von R und das zugehörige Dynkin Diagramm

  mit jenen von A_ℓ übereinstimmen. Beachte schließlich, dass die Spiegelungen σ_{α_i} die Subskripts i und $i+1$ permutieren und alle anderen Subskripts fest lassen. Da die Transpositionen von i und $i+1$ die gesamte symmetrische Gruppe $S(\ell)$ erzeugen, folgt, dass die Weyl Gruppe von R bzw. A_ℓ isomorph zur symmetrischen Gruppe $S(\ell)$ ist.

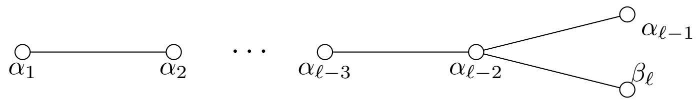
- B_ℓ für $\ell \geq 2$:
  Es sei $\mathbb{E} = \mathbb{R}^\ell$ und $R = \{\alpha \in I : (\alpha, \alpha) = 1 \text{ oder } 2\}$. Offenbar ist dann
  $$R = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$
  Da die Vektoren $\alpha_i := e_i - e_{i+1}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$, und $\beta_\ell = e_\ell$ linear unabhängig sind und jede der Wurzeln e_i, $e_i - e_j$ und $e_i + e_j$ als positive $\mathbb{Z}$-Kombination dieser Vektoren darstellbar ist, folgt, dass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}, \beta_\ell\}$ eine Basis von R bildet. Aus
  $$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & i = j, \\ -1 & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  sowie
  $$\langle \alpha_i, \beta_\ell \rangle = \begin{cases} -2 & i = \ell - 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \langle \beta_\ell, \alpha_i \rangle = \begin{cases} -1 & i = \ell - 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  sehen wir, dass die Cartan Matrix von R und das zugehörige Dynkin Diagramm

  mit jenen von B_ℓ übereinstimmen. Die Weyl Gruppe von R bzw. B_ℓ wirkt als die Gruppe aller Permutationen und Vorzeichenwechsel der Menge $\{e_1, \dots, e_\ell\}$, womit $W(R)$ isomorph zum semidirekten Produkt von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\ell$ und der symmetrischen Gruppe $S(\ell)$ (letztere wirkt dabei auf der ersteren) ist.

- C_ℓ für $\ell \geq 3$:
  Wie schon früher erwähnt ist das Wurzelsystem C_ℓ dual zu B_ℓ. Es sei daher wieder $\mathbb{E} = \mathbb{R}^\ell$ und
  $$R = \{\pm 2e_i : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$
  Eine Basis von R ist gegeben durch $\{e_1 - e_2, \dots, e_{\ell-1} - e_\ell, 2e_\ell\}$. Die Cartan Matrix von R und das zugehörige Dynkin Diagramm stimmen dann mit jenen von C_ℓ überein. Die Weyl Gruppe von R bzw. C_ℓ ist natürlich isomorph zu jener von B_ℓ.

- D_ℓ für $\ell \geq 4$:
  Es sei wieder $\mathbb{E} = \mathbb{R}^\ell$ und
  $$R = \{\alpha \in I : (\alpha, \alpha) = 2\} = \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$
  Da die Vektoren $\alpha_i := e_i - e_{i+1}$, $1 \leq i \leq \ell - 1$, und $\beta_\ell = e_{\ell-1} + e_\ell$ linear unabhängig sind und jede der Wurzeln $\pm(e_i \pm e_j)$ als positive $\mathbb{Z}$-Kombination dieser Vektoren darstellbar ist, folgt, dass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}, \beta_\ell\}$ eine Basis von R bildet. Aus
  $$\langle \alpha_i, \beta_\ell \rangle = \begin{cases} -1 & i = \ell - 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \langle \beta_\ell, \alpha_i \rangle = \begin{cases} -1 & i = \ell - 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  sehen wir, dass die Cartan Matrix von R und das zugehörige Dynkin Diagramm



mit jenen von D_ℓ übereinstimmen. Die Weyl Gruppe von R bzw. D_ℓ wirkt als Gruppe aller Permutationen und Vorzeichenwechsel, die nur eine gerade Anzahl von Vorzeichen involvieren, der Menge $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$. Damit ist $W(R)$ isomorph zum semidirekten Produkt von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell-1}$ und der symmetrischen Gruppe $S(\ell)$.

- G_2:

  Es sei $\mathbb{E}$ der Unterraum von $\mathbb{R}^3$ orthogonal zu $e_1+e_2+e_3$. Weiters sei $J = I \cap \mathbb{E}$ und R die Menge aller Vektoren in J mit $(\alpha, \alpha) = 2$ oder 6. Offenbar ist dann

$$R = \{e_i - e_j : 1 \leq i \neq j \leq 3\} \cup \{\pm(2e_i - e_j - e_k) : \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\}.$$

  Es ist leicht zu sehen, dass $\{e_1 - e_2, -2e_1 + e_2 + e_3\}$ eine Basis von R bildet. Die Weyl Gruppe von G_2 ist isomorph zur Diedergruppe der Ordnung 12.

- F_4:

  Es sei $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ und $J = I + \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)/2$. Wir definieren R als die Menge der Vektoren in J mit $(\alpha, \alpha) = 1$ oder 2. Daraus erhalten wir

$$R = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i \neq j \leq 4\} \cup \{\tfrac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}.$$

  Es ist nicht schwer nachzuprüfen, dass eine Basis von R gegeben ist durch $\{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}$, womit das Dynkin Diagramm von R mit jenem von F_4 übereinstimmt. Die Weyl Gruppe von R bzw. F_4 hat $2^7 3^2 = 1152$ Elemente und ihre Struktur ist zu kompliziert, um sie im Rahmen dieser Vorlesung zu besprechen.

- E_6, E_7, E_8:

  Da die Inklusion eines Dynkin Diagramms in einem anderen (z.B. E_6 in E_7 oder E_7 in E_8) eine Inklusion der entsprechenden Wurzelsysteme induziert, werden wir zunächst das Wurzelsystem E_8 konstruieren und dann andeuten, wie daraus E_7 und E_6 erhalten werden können.

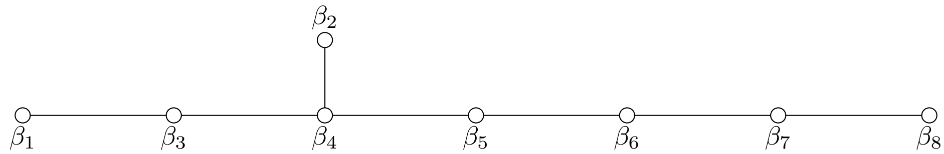
  Es sei $\mathbb{E} = \mathbb{R}^8$ und

$$R = \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i \neq j \leq 8\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (-1)^{k(i)} e_i \right\},$$

  wobei die $k(i) = 0, 1$ auf eine gerade Zahl aufaddieren. Als Basis von R kann man die Menge $\{\beta_1, \ldots, \beta_8\}$ wählen, mit

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\left(-e_1 - e_8 + \sum_{i=2}^{7} e_i\right), \quad \beta_2 = -e_1 - e_2, \quad \beta_i = e_{i-2} - e_{i-1} \text{ für } 3 \leq i \leq 8.$$

Daraus ergibt sich das Dynkin Diagramm



welches mit jenem von E_8 übereinstimmt. Die Weyl Gruppe $W(R)$ hat in diesem Fall $2^{14}3^5 5^2 7$ Elemente.

Eine Basis für E_7 erhält man, indem die Wurzel β_8 weggelassen wird und eine Basis für E_6 durch Weglassen der Wurzeln β_7 und β_8. Wir überlassen es dem Leser die resultierenden Wurzelsysteme explizit anzugeben. ■

Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns nun wieder Wurzelsystemen halbeinfacher Lie Algebren zu. Genauer wollen wir die Wurzelsysteme und assoziierten Dynkin Diagramme, sowie die Killing Formen der klassischen Lie Algebren $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ für $n \geq 2$ bestimmen. Wir wissen aber bisher noch nicht einmal, dass diese Lie Algebren halbeinfach sind. Wir werden daher in weiterer Folge auch nachweisen, dass die klassischen Lie Algebren mit Ausnahme von $\mathfrak{o}(2,\mathbb{C})$ (welche 1-dimensional ist) alle halbeinfach und mit weiterer Ausnahme von $\mathfrak{o}(4,\mathbb{C})$ sogar alle einfach sind. Dazu verwenden wir das folgende Resultat.

Satz 4.28 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ das Wurzelsystem von L bezüglich H. Dann ist L genau dann einfach, wenn Φ irreduzibel ist.*

Beweis: Wir wollen zunächst L als einfach voraussetzen und annehmen, dass Φ nicht irreduzibel ist. Dann können wir Φ schreiben in der Form $\Phi = \Phi_1 \dot\cup \Phi_2$ mit nicht-leeren orthogonalen Mengen Φ_1 und Φ_2. Sind nun $\alpha \in \Phi_1$ und $\beta \in \Phi_2$, dann ist

$$(\alpha+\beta,\alpha) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad (\alpha+\beta,\beta) \neq 0.$$

Da $\Phi = \Phi_1 \dot\cup \Phi_2$, kann daher $\alpha+\beta$ keine Wurzel sein und aus Lemma 3.15 (i) folgt, dass $[L_\alpha, L_\beta] = 0$. Dies zeigt, dass für die Unteralgebra K von L, welche von allen L_α, $\alpha \in \Phi_1$, erzeugt wird, gilt $[K, L_\beta] = 0$ für alle $\beta \in \Phi_2$. Speziell ist K eine echte Unteralgebra von L, da $Z(L) = 0$. Da weiters offenbar $[K, L_\alpha] \subseteq K$ für alle $\alpha \in \Phi_1$, folgt $[K, L_\alpha] \subseteq K$ für alle $\alpha \in \Phi$. Schließlich folgt aus den Sätzen 3.21 bis 3.24 aber, dass L als Lie Algebra von den Wurzelräumen L_α, $\alpha \in \Phi$, erzeugt wird. Daher ist auch $[K, L] \subseteq K$ und K ein Ideal, ein Widerspruch.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass I ein nicht-triviales Ideal von L ist und betrachten die Wurzelraumzerlegung von L:

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha.$$

Da H aus halbeinfachen Elementen besteht, sind die Abbildungen $\operatorname{ad} h : I \to I$ für $h \in H$ simultan diagonalisierbar, womit I eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren für die Elemente von $\operatorname{ad} H$ hat. Da wir schon wissen, dass jeder Wurzelraum L_α 1-dimensional ist, folgt daher

$$I = H_1 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1} L_\alpha$$

für einen geeigneten Unterraum H_1 von $H = L_0$ und eine geeignete Teilmenge Φ_1 von Φ. Analog folgt

$$I^\perp = H_2 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_2} L_\alpha$$

für den Orthogonalraum $I^\perp$ von I bezüglich der Killingform von L. Da wir aber wissen, dass $I \oplus I^\perp = L$, muss gelten

$$H_1 \oplus H_2 = H, \qquad \Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset, \qquad \Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi.$$

Angenommen $\Phi_2 = \emptyset$. Dann ist $L_\alpha \subseteq I$ für alle $\alpha \in \Phi$. Da aber L von seinen Wurzelräumen erzeugt wird, folgt $I = L$, ein Widerspruch. Analog folgt, dass Φ_1 nicht leer sein kann. Sind nun $\alpha \in \Phi_1$ und $\beta \in \Phi_2$, dann gilt nach Bemerkung (b) vor Satz 3.25,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(z_\beta) = 0,$$

da $\alpha(z_\beta)x_\alpha = [z_\beta, x_\alpha] \in I^\perp \cap I = 0$, womit $(\alpha, \beta) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_1$ und $\beta \in \Phi_2$, womit Φ irrduzibel ist. ■

Als Konsequenz von Satz 4.28 notieren wir das folgende Korollar.

Korollar 4.29 *Es sei L eine halbeinfache Lie Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ das Wurzelsystem von L bezüglich H. Ist $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$ die Zerlegung von L in einfache Ideale, dann ist $H_i = H \cap L_i$ eine Cartan Unteralgebra von L_i und das zugehörige (irreduzible) Wurzelsystem Φ_i kann kanonisch als Teilsystem von Φ aufgefasst werden, sodass $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_m$ die Zerlegung von Φ in irreduzible Komponenten ist.*

Beweis: Für $x \in L$ implizert die Zerlegung $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$, dass die halbeinfachen und nilpotenten Anteile von x gerade die Summe der halbeinfachen und nilpotenten Anteile von x aus den jeweiligen L_i sind. Daher erhalten wir eine Zerlegung der Cartan Unteralgebra $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$ mit $H_i = L_i \cap H$. Offensichtlich ist jedes H_i eine Unteralgebra von L_i bestehend aus halbeinfachen Elementen. Tatsächlich ist H_i auch maximal in Bezug auf diese Eigenschaft, da jede torale Unteralgebra von L_i die H_i echt enthält auch automatisch toral in L wäre, womit durch Zentralisierung aller H_j, $i \neq j$, eine torale Unteralgebra von L erzeugt werden kann, welche H echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von H.

Es sei Φ_i das Wurzelsystem von L_i in Bezug auf die Cartan Unteralgebra H_i im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{E}_i$. Ist $\alpha \in \Phi_i$, so können wir α durch die Festsetzung $\alpha(H_j) = 0$ für $j \neq i$ auch als lineares Funktional auf H auffassen. Dann ist α offenbar eine Wurzel von L in Bezug auf H mit $L_\alpha \subset L_i$. Ist umgekehrt $\alpha \in \Phi$, dann muss für geeignetes i offenbar $[H_i, L_\alpha] \neq 0$ und daher $L_\alpha \subseteq L_i$, womit $\alpha|_{H_i}$ eine Wurzel von L_i in Bezug auf H_i ist. Zusammenfassend erhalten wir daher die Zerlegungen $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_m$ und $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}_m$. ■

Beachte, dass durch Korollar 4.29 das Problem der Klassifikation halbeinfacher Lie Algebren duch ihre Wurzelsysteme reduziert wird auf das Problem der Klassifikation einfacher Lie Algebren durch ihre irreduziblen Wurzelsysteme.

Um mit Hilfe von Satz 4.28 nachzuweisen, dass die klassischen Lie Algebren (mit Ausnahme von $\mathfrak{o}(2,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{o}(4,\mathbb{C})$) einfach sind, müssen wir deren Wurzelraumzerlegung bezüglich einer geeigneten Cartan Unteralgebra bestimmen. Das folgende Kriterium zeigt, dass die Existenz einer solchen „Wurzelraumzerlegung" dann auch schon genügt, um zu schließen, dass die jeweilige Lie Algebra halbeinfach ist.

Proposition 4.30 *Es sei L eine komplexe Lie Algebra und $H \subseteq L$ eine nicht leere maximale torale Unteralgebra von L. Weiters sei*

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha \tag{4.2}$$

die Zerlegung von L in simultane Eigenräume für die Elemente von $\operatorname{ad} H$, wobei Φ die Menge der von Null verschiedenen $\alpha \in H^*$ mit $L_\alpha \neq 0$ bezeichnet. Sind die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Zu jedem von Null verschiedenen $h \in H$ gibt es ein $\alpha \in \Phi$ mit $\alpha(h) \neq 0$.

(ii) Für jedes $\alpha \in \Phi$ ist L_α 1-dimensional.

(iii) Ist $\alpha \in \Phi$, dann ist auch $-\alpha \in \Phi$ und wird L_α von x_α aufgespannt, dann gilt $[[x_\alpha, x_{-\alpha}], x_\alpha] \neq 0$.

Dann ist L halbeinfach.

Beweis: Da L genau dann halbeinfach ist, wenn L keine von Null verschiedenen abelschen Ideale enthält, wollen wir annehmen, dass A ein abelsches Ideal von L ist und zeigen, dass dann $A = 0$ folgt.

Nach Voraussetzung besteht $\operatorname{ad} H$ aus simultan diagonalisierbaren Abbildungen und es gilt $[H, A] \subseteq A$, was impliziert, dass H auch diagonalisierbar auf A wirkt. Damit zerfällt A in eine direkte Summe der Form

$$A = (A \cap H) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} (A \cap L_\alpha).$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass $A = A \cap H$ und nehmen dazu an, dass $A \cap L_\alpha \neq 0$ für ein $\alpha \in \Phi$. Da L_α nach (ii) 1-dimensional ist, muss $L_\alpha \subseteq A$ gelten. Da A ein Ideal ist, folgt auch $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subseteq A$, womit A ein Element h der Form $h = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$ enthält, wobei $L_\alpha = \operatorname{span}\{x_\alpha\}$ und $L_{-\alpha} = \operatorname{span}\{x_{-\alpha}\}$. Da A abelsch ist und sowohl x_α als auch h in A liegen, folgt aber $[h, x_\alpha] = 0$ im Widerspruch zu Bedingung (iii).

Wir wissen also, dass $A = A \cap H$ bzw. $A \subseteq H$. Enthält A ein von Null verschiedenes Element h, dann gibt es nach (i) ein $\alpha \in \Phi$, sodass $\alpha(h) \neq 0$. Dann ist aber

$$[h, x_\alpha] = \alpha(h)x_\alpha \in L_\alpha \cap A$$

im Widerspruch zum zuvor gezeigten. Daher muss $A = 0$ sein. ∎

Bemerkung.

(a) Da $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subseteq L_0 = H$ ist Bedingung (iii) genau dann erfüllt, wenn $\alpha([L_\alpha, L_{-\alpha}]) \neq 0$. Um (iii) nachzuweisen, genügt es daher $[[L_\alpha, L_{-\alpha}], L_\alpha] \neq 0$ für je eine Wurzel des Paares $\pm\alpha$ nachzuweisen.

Die Existenz einer wie in Proposition 4.30 geforderten maximalen toralen Unteralgebra ist für die klassischen Lie Algebren leicht nachzuweisen.

Proposition 4.31 *Es sei $L \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ eine der klassischen Lie Algebren. Dann ist die Unteralgebra H von L bestehend aus den Diagonalmatrizen in L eine maximale torale Unteralgebra von L.*

Beweis: Da H aus Diagonalmatrizen besteht, ist H abelsch und die Elemente von H diagonalisierbar. Nach Korollar 2.7 sind dann auch die Element von $\operatorname{ad} H$ diagonalisierbar, womit H toral ist. Es bleibt zu zeigen, dass H auch eine *maximale* torale Unteralgebra ist.

Dazu beachten wir, dass der Unterraum $L \cap \operatorname{span}\{e_{ij} : i \neq j\}$ von L, bestehend aus Matrizen mit Einträgen außerhalb der Diagonale, invariant unter $\operatorname{ad} H$ ist und damit alle $\operatorname{ad} h$ für $h \in H$ auf diesem Unterraum simultan diagonalisierbar sind. Es sei

$$L \cap \operatorname{span}\{e_{ij} : i \neq j\} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha,$$

wobei $\alpha \in H^*$, L_α der α-Eigenraum von H und

$$\Phi = \{\alpha \in H^* : \alpha \neq 0, L_\alpha \neq 0\}.$$

Dann kann L offenbar zerlegt werden in der Form

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \tag{4.3}$$

Da $L_0 = C_L(H)$ der Zentralisator von H ist, genügt es zu zeigen, dass $H = L_0$ (vgl. Bemerkung (b) nach Proposition 3.16).

Es sei nun $x \in L_0$, also $[H, x] = 0$. Nach (4.3) besitzt x eine Darstellung der Form

$$x = h_x + \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha x_\alpha$$

mit $h_x \in H$, $x_\alpha \in L_\alpha$ und $c_\alpha \in \mathbb{C}$. Daraus folgt aber für alle $h \in H$,

$$0 = [h, x] = \sum_{\alpha \in \Phi} c_\alpha \alpha(h) x_\alpha.$$

Für die klassischen Lie Algebren lässt sich leicht zeigen (wir überlassen es als Übungsbeispiel), dass es zu jedem $\alpha \in \Phi$ ein $h \in H$ gibt, sodass $\alpha(h) \neq 0$. Es folgt, dass $c_\alpha = 0$ für jedes $\alpha \in \Phi$ und damit $x \in H$. ■

Nachdem wir mit Hilfe von Proposition 4.31 eine maximale torale Unteralgebra jeder klassischen Lie Algebra identifiziert haben, können wir Proposition 4.30 verwenden, um zu schließen, dass jede dieser Lie Algebren halbeinfach ist. Danach bleibt die zugehörigen Wurzelsysteme und ihre Basen zu bestimmen, um dann schließlich die Cartanzahlen mit Hilfe von $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(z_\beta)$ (siehe Bemerkung (b) vor Satz 3.25) zu berechnen und so die jeweiligen Dynkin Diagramme zu erhalten.

Wir können unsere Vorgehensweise zum Beweis, dass die klassischen Lie Algebren (mit Ausnahme von $\mathfrak{o}(2,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{o}(4,\mathbb{C})$) einfach sind, wie folgt zusammenfassen:

(i) Identifiziere die Unteralgebra H der Diagonalmatrizen in L und bestimme die Zerlegung (4.3). Daraus wird sich leicht schließen lassen, dass Bedingungen (i) und (ii) aus Proposition 4.30 erfüllt sind.

(ii) Überprüfe, dass $[[L_\alpha, L_{-\alpha}], L_\alpha] \neq 0$ für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$, womit auch Bedingung (iii) aus Proposition 4.30 erfüllt und L halbeinfach mit Cartan Unteralgebra H ist.

(iii) Bestimme eine Basis für Φ.

(iv) Für α, β aus der Basis von Φ, finde z_β und bestimme $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(z_\beta)$ sowie daraus das Dynkin Diagramm von L. Entscheide mit Hilfe von Satz 4.28, ob L einfach ist.

Wir geben nun die Wurzelsysteme der klassischen Lie Algebren an, gehen das obige Programm allerdings nur für $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ im Detail durch, da in den anderen Fällen die Rechnungen (in Koordinaten) etwas aufwendig, wenn auch nicht schwer, sind.

Die klassischen Lie Algebren.

(a) $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$, $\ell \geq 1$:

Es sei H die Unteralgebra der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$, also der Diagonalmatrizen mit Spur 0. Weiters sei $\varepsilon_i : H \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq \ell+1$, das lineare Funktional, welches $h \in H$ auf den i-ten Diagonaleintrag von h abbildet. Da $(\operatorname{ad} h)(e_{ij}) = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)(e_{ij})$, erhalten wir die Zerlegung

$$\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C}) = H \oplus \bigoplus_{i \neq j} L_{\varepsilon_i - \varepsilon_j},$$

wobei

$$L_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \operatorname{span}\{e_{ij} : i \neq j\}$$

und damit

$$\Phi = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq \ell+1\}.$$

Wir sehen sofort, dass die Bedingungen (i) und (ii) aus Proposition 4.30 erfüllt sind. Da für $i < j$ weiters $[e_{ij}, e_{ji}] = e_{ii} - e_{jj}$, folgt

$$[[e_{ij}, e_{ji}], e_{ij}] = 2e_{ij} \neq 0,$$

womit auch Bedingung (iii) aus Proposition 4.30 erfüllt und $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ halbeinfach ist.

Aus dem Beweis von Satz 4.27 wissen wir, dass eine Basis von Φ gegeben ist durch

$$\{\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} : 1 \leq i \leq \ell\}.$$

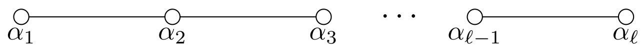
Als Standardbasis für die Unteralgebra $\mathfrak{sl}(\alpha_i)$ können wir daher

$$\{x_{\alpha_i} = e_{i,i+1}, y_{\alpha_i} = e_{i+1,i}, z_{\alpha_i} = e_{ii} - e_{i+1,i+1}\}$$

wählen. Daraus ergibt sich

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \alpha_i(z_{\alpha_j}) = \begin{cases} 2 & i = j, \\ -1 & |i-j| = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit das Dynkin Diagramm A_ℓ:



Damit ist $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ einfach.

(b) $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$, $\ell \geq 1$:
Da $\mathfrak{o}(3, \mathbb{C})$ isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist, wollen wir $\ell \geq 2$ annehmen. Es sei H die Unteralgebra der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$ der Form

$$H = \{\text{diag}(0, a_1, \ldots, a_\ell, -a_1, \ldots, -a_\ell) : a_i \in \mathbb{C}\}.$$

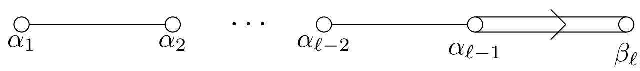
Weiters sei für $1 \leq i \leq \ell$ das lineare Funktional $\varepsilon_i \in H^*$ gegeben durch $\varepsilon_i(h) = a_i$. Dann ergibt sich

$$\Phi = \{\pm\varepsilon_i : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) : 1 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$

Wählen wir als Basis von Φ die Menge

$$\{\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq \ell - 1, \beta_\ell := \varepsilon_\ell\},$$

so erhält man nach weiterer Rechnung (vgl. den Beweis von Satz 4.27) das Dynkin Diagramm B_ℓ:



Damit ist $\mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C})$ für alle $\ell \geq 1$ einfach.

(c) $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 1$:
Da $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ 1-dimensional und damit weder einfach noch halbeinfach ist können wir $\ell \geq 2$ annehmen. Es sei H die Unteralgebra der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$ der Form

$$H = \{\text{diag}(a_1, \ldots, a_\ell, -a_1, \ldots, -a_\ell) : a_i \in \mathbb{C}\}.$$

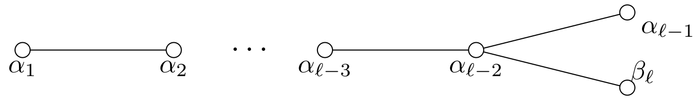
Weiters sei für $1 \leq i \leq \ell$ das lineare Funktional $\varepsilon_i \in H^*$ gegeben durch $\varepsilon_i(h) = a_i$. Dann ergibt sich

$$\Phi = \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) : 1 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$

Als Basis von Φ wählen wir die Menge

$$\{\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq \ell - 1, \beta_\ell := \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell\}.$$

Ist $\ell = 2$, dann besteht die Basis aus zwei orthogonalen Wurzelen α_1 und β_2, womit Φ reduzibel ist. In der Tat ist $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und damit halbeinfach aber nicht einfach. Für $\ell \geq 3$ erhält man nach weiterer Rechnung (vgl. den Beweis von Satz 4.27) das Dynkin Diagramm D_ℓ:



Damit ist $\mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C})$ für $\ell \geq 3$ einfach.

(d) $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$, $\ell \geq 1$:
Da $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$ isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist, wollen wir $\ell \geq 2$ annehmen. Es sei H die Unteralgebra der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$ der Form

$$H = \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_\ell, -a_1, \ldots, -a_\ell) : a_i \in \mathbb{C}\}.$$

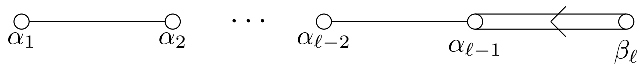
Weiters sei für $1 \leq i \leq \ell$ das lineare Funktional $\varepsilon_i \in H^*$ gegeben durch $\varepsilon_i(h) = a_i$. Dann ergibt sich

$$\Phi = \{\pm 2\varepsilon_i : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) : 1 \leq i \neq j \leq \ell\}.$$

Wählen wir als Basis von Φ die Menge

$$\{\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq \ell - 1, \beta_\ell := 2\varepsilon_\ell\},$$

so erhält man nach weiterer Rechnung (vgl. den Beweis von Satz 4.27) das Dynkin Diagramm C_ℓ:



Damit ist $\mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$ für alle $\ell \geq 1$ einfach.

Als Konsequenz der obigen Ergebnisse notieren wir das angekündigte Resultat:

Korollar 4.32 *Die klassischen Lie Algebren mit Ausnahme von $\mathfrak{o}(2, \mathbb{C})$ sind halbeinfach und mit weiterer Ausnahme von $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C})$ sogar einfach.*

Schließlich wollen wir noch die Killing Formen der klassischen Lie Algebren bestimmen. Dazu benötigen wir das folgende Hilfsresultat:

Lemma 4.33 *Es sei L eine einfache komplexe Lie Algebra mit Killing Form κ. Ist $\beta : L \times L \to \mathbb{C}$ eine symmetrische, assoziative und nicht ausgeartete Bilinearform, dann gibt es ein von Null verschiedenes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\kappa = \lambda\beta$.*

Beweis: Durch die adjungierte Darstellung wird L zu einem L-Modul, womit auch der Dualraum eine L-Modul Struktur trägt. Nach Voraussetzung induziert die Bilinearform β einen Vektorraum Isomorphismus $\theta_\beta : L \to L^*$ und es ist leicht nachzurechnen, dass θ_β sogar ein L-Modul Isomorphismus ist. Dasselbe gilt nach dem Kriterium von Cartan auch für die Killing Form κ.

Wir betrachten nun den L-Modul Homomorphismus $\theta_\kappa^{-1}\theta_\beta : L \to L$. Da L einfach ist, ist L irreduzibel als L-Modul via der adjungierten Darstellung. Damit folgt aber aus dem Lemma von Schur, dass es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $\theta_\kappa^{-1}\theta_\beta = \lambda \mathrm{Id}$ bzw. äquivalent dazu $\theta_\kappa = \lambda\theta_\beta$. Aus der Definition der Abbildungen θ_κ und θ_β folgt nun

$$\kappa(x, y) = \theta_\kappa(x)(y) = \lambda\theta_\beta(x)(y) = \lambda\beta(x, y)$$

für alle $x, y \in L$. ■

Satz 4.34 *Ist L eine der einfachen klassichen Lie Algebren, dann ist die Killing Form von L gegeben durch*

$$\kappa(x, y) = \lambda \operatorname{tr}(xy),$$

wobei

$$\lambda = \begin{cases} 2(\ell+1) & L = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C}), \\ 2\ell - 1 & L = \mathfrak{o}(2\ell+1, \mathbb{C}), \\ 2(\ell+1) & L = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}), \\ 2(\ell-1) & L = \mathfrak{o}(2\ell, \mathbb{C}). \end{cases}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die Bilinearform $\beta : L \times L \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\beta(x, y) := \operatorname{tr}(xy)$$

nicht ausgeartet ist. Dazu betrachten wir

$$J = \{x \in L : \beta(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in L\}.$$

Genau wie in Lemma 2.14 folgt aus der Assoziativitätseigenschaft der Spur, dass J ein Ideal von L. Da L aber einfach und β augenscheinlich nicht identisch Null ist, folgt $J = 0$ wie gewünscht. Nach Lemma 4.33 gibt es daher für jede der einfachen klassischen Lie Algebren ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $\kappa = \lambda\beta$.

Zur Bestimmung von λ verwenden wir die Wurzelraumzerlegung von L und berechnen $\kappa(h, h')$ für $h, h' \in H$. Wir gehen wieder nur auf den Fall $L = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ im Detail ein. Es seien also $h = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{\ell+1})$ und $h' = \operatorname{diag}(a'_1, \ldots, a'_{\ell+1})$. Dann folgt aus der Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$:

$$\kappa(h, h') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h') = 2\sum_{i<j}(a_i - a_j)(a'_i - a'_j).$$

Setzen wir nun $h = h'$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ und die restlichen $a_i = 0$, dann erhalten wir einerseits $\kappa(h, h) = 4(\ell+1)$. Da andererseits $\operatorname{tr} h^2 = 2$ folgt $\lambda = 2(\ell+1)$ für $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$. Die Bestimmung von λ für die restlichen einfachen klassischen Lie Algebren erfolgt analog, wenn auch die Rechnungen etwas aufwendiger sind. ■

5 Isomorphie- und Konjugationssätze

In diesem kürzeren Kapitel wollen wir zunächst zeigen, dass zwei halbeinfache Lie Algebren mit demselben Wurzelsystem isomorph sind (tatsächlich werden wir eine etwas stärkere Aussage beweisen). Wissen wir dann, dass ein Paar (L, H) bestehend aus einer halbeinfachen Lie Algebra L und einer Cartan Unteralgebra H bis auf Isomorphie durch das zugehörige Wurzelsystem Φ bestimmt ist, so müssen wir noch klären, was die Wahl einer von H verschiedenen Cartan Unteralgebra bewirkt. Wir werden hier sehen, dass bereits L allein das Wurzelsystem Φ bestimmt, da alle Cartan Unteralgebren „konjugiert" sind unter der Automorphismen Gruppe $\operatorname{Aut} L$. Das beweisen wir sogar im größeren Kontext einer allgemeinen komplexen Lie Algebra, wo der Beweis einfacher wird.

Wir beginnen mit dem folgenden Hilfsresultat, welches die bereits bekannte Aussage, dass eine halbeinfache Lie Algebra von ihren Wurzelräumen erzeugt wird, verschärft.

Proposition 5.1 *Es sei L eine halbeinfache komplexe Lie Algebra, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ das zugehörige Wurzelsystem von L. Ist Δ eine Basis von Φ, dann wird L von den Wurzelräumen L_α, $L_{-\alpha}$ mit $\alpha \in \Delta$ bzw. äquivalent dazu von beliebigen von Null verschiedenen $x_\alpha \in L_\alpha$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ mit $\alpha \in \Delta$ erzeugt.*

Beweis: Sei $\beta \in \Phi$ eine beliebige positive Wurzel bezüglich Δ. Nach Korollar 4.12 (a) kann dann β in der Form $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ mit $\alpha_i \in \Delta$ dargestellt werden, wobei jede der Teilsummen $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $1 \leq i \leq s$, eine Wurzel ist. Da weiters aber nach Satz 3.22 (iii) $[L_\gamma, L_\delta] = L_{\gamma+\delta}$ wann immer γ, δ und $\gamma + \delta \in \Phi$, folgt durch Induktion nach s leicht, dass L_β in der von den L_α, $\alpha \in \Delta$, erzeugten Unteralgebra von L liegt. Analog sehen wir, dass für negatives $\beta \in \Phi$ der Wurzelraum L_β in der von den $L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$, erzeugten Unteralgebra von L liegt. Da L von den Wurzelräumen erzeugt wird, folgt damit die Behauptung. ∎

Proposition 5.1 motiviert folgende Begriffsbildung:

Definition. Es sei L eine halbeinfache komplexe Lie Algebra, H eine Cartan Unteralgebra von L und Φ das zugehörige Wurzelsystem von L mit Basis Δ. Bezeichnet z_α für $\alpha \in \Delta$ das eindeutig bestimmte Element von $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ mit $\alpha(z_\alpha) = 2$, so nennen wir für beliebige $x_\alpha \in L_\alpha$ und $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha$ die Menge $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ eine *Standardmenge von Erzeugern* von L.

Bevor wir zum ersten Hauptresultat dieses Kapitels kommen, benötigen wir noch ein wenig Vorbereitung: Wir betrachten im Folgenden zwei Paare (L, H) und (L', H') bestehend aus einer halbeinfachen Lie Algebra und einer Cartan Unteralgebra. Gibt es einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Wurzelsystemen Φ und Φ', so wird dieser nach Definition von einem Isomorphismus zwischen den umgebenden Euklidischen Räumen $\mathbb{E}$ und $\mathbb{E}'$ induziert. Letzterer muss keine Isometrie sein, da aber (wie schon früher bemerkt) die Axiome eines Wurzelsystems unberührt bleiben, wenn das gegebene innere Produkt durch ein positives Vielfaches ersetzt wird und es höchstens zwei Wurzellängen gibt, deren Verhältnis bereits durch die Cartanzahlen bestimmt wird, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\mathbb{E}$ und $\mathbb{E}'$ isometrisch sind.

Als nächstes beachte, dass der Isomorphismus $\Phi \to \Phi'$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem Vektorraum Isomorphismus $\psi : H^* \to H'^*$ besitzt, da Φ ganz H^* und Φ' ganz H'^* aufspannen. Der Isomorphismus ψ widerum induziert einen Isomorphismus $\pi : H \to H'$ via der Killing Form Identifikation von H bzw. H' mit ihren jeweiligen Dualräumen. Explizit bedeutet das, wenn $\alpha \in \Phi$ unter dem Isomorphismus $\Phi \to \Phi'$ auf α' abgebildet wird, dann ist $\pi(t_\alpha) = t'_{\alpha'}$ (siehe Satz 3.19). Da wir annehmen, dass $\Phi \to \Phi'$ von einer Isometrie induziert wird, haben auch $\pi(z_\alpha) = z'_{\alpha'}$, da nach Satz 3.24 (i) $z_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha, \alpha)$.

Da H und H' abelsche Lie Algebren sind, können wir π auch als einen Lie Algebren Isomorphismus auffassen, den wir nun gerne zu einem Isomorphismus zwischen L und L' fortsetzen möchten. Existiert so eine Fortsetzung, muss offensichtlich L_α auf $L_{\alpha'}$ abgebildet werden für alle $\alpha \in \Phi$. Dies führt zur Frage, inwieweit diese Abbildungen zwischen Wurzelräumen frei wählbar sind. Der folgende Satz zeigt, dass hier komplette Freiheit besteht, solange wir uns auf einfache Wurzeln beschränken.

Satz 5.2 *Es seien L und L' halbeinfache komplexe Lie Algebren mit Cartan Unteralgebren H bzw. H' und zugehörigen Wurzelsystemen Φ und Φ'. Angenommen es gibt einen Isomorphismus zwischen Φ und Φ', der einen Isomorphismus $\pi : H \to H'$ induziert. Weiters sei Δ eine Basis von Φ und Δ' die Basis von Φ' welche Bild von Δ unter dem Isomorphismus zwischen Φ und Φ' ist. Wählen wir nun zu jedem $\alpha \in \Delta$ und jedem $\alpha' \in \Delta'$ beliebige von Null verschiedene $x_\alpha \in L_\alpha$ und $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$, d.h. wir wählen einen beliebigen Lie Algebren Isomorphismus $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$, dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung von $\pi : H \to H'$ und aller π_α, $\alpha \in \Delta$, zu einem Lie Algebren Isomorphismus $\pi : L \to L'$.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen mit Hilfe von Satz 4.28, dass wir L und L' als einfach voraussetzen können. Dann ist $L \oplus L'$ eine halbeinfache Lie Algebra mit den eindeutigen einfachen Idealen L und L'. Wir wollen nun in $L \oplus L'$ eine Art „Diagonalunteralgebra" (analog zu $\{(x, x) : x \in L\} \subseteq L \oplus L$) finden, welche isomorph ist unter der Projektion zu jedem der beiden Summanden. Die Konstruktion dieser Unteralgebra von $L \oplus L'$ ist auch nicht schwer: Es sei $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ eine Menge von Standarderzeugern von L und $\{x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}, z'_{\alpha'} : \alpha' \in \Delta'\}$ die zugehörige Menge von Standarderzeugern in L'. Wir definieren nun $D \subseteq L \oplus L'$ als die Unteralgebra erzeugt von

$$\{\bar{x}_\alpha := (x_\alpha, x'_{\alpha'}), \bar{y}_\alpha := (y_\alpha, y'_{\alpha'}), \bar{z}_\alpha := (z_\alpha, z'_{\alpha'}) : \alpha \in \Delta, \alpha' \in \Delta'\}.$$

Die Hauptarbeit im Beweis ist nun zu zeigen, dass D eine echte Unteralgbra ist. Dazu beachten wir zunächst, dass wegen der Einfachheit von L und L' die Wurzelsysteme Φ und Φ' nach Satz 4.28 irreduzibel sind. Nach Lemma 4.16 (a) gibt es daher eindeutige maximale Wurzeln β und β' (in Bezug auf Δ und Δ'), welche unter dem Isomorphismus $\Phi \to \Phi'$ aufeinander abgebildet werden. Wir wählen nun beliebige von Null verschiedene Elemente $x \in L_\beta$ und $x' \in L'_{\beta'}$ und setzen $\bar{x} := (x, x') \in L \oplus L'$. Weiters sei M der Unterraum von $L \oplus L'$, der von Elementen der Form

$$\operatorname{ad} \bar{y}_{\alpha_1} \circ \operatorname{ad} \bar{y}_{\alpha_2} \circ \cdots \circ \operatorname{ad} \bar{y}_{\alpha_m}(\bar{x}), \tag{5.1}$$

mit $\alpha_i \in \Delta$ (Wiederholungen erlaubt) erzeugt wird. Da $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ und $y'_{\alpha'} \in L'_{-\alpha'}$ gehört ein Element der Form (5.1) zu $L_{\beta-\sum \alpha_i} \oplus L'_{\beta'-\sum \alpha'_i}$. Insbesondere ist die Menge $M \cap L_\beta \oplus L'_{\beta'}$ nur 1-dimensional, womit M ein echter Teilraum von $L \oplus L'$ ist.

Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{ad} D$ den Unterraum M invariant lässt. Offenbar genügt es dies für die Erzeuger von D nachzuweisen. Nach Definition von D lässt $\operatorname{ad} \bar{y}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, den Unterraum M invariant. Da weiters $[h, y_\alpha]$ ein Vielfaches von y_α ist für jedes $h \in H$, folgt durch eine einfache Induktion, dass M auch invariant ist unter $\operatorname{ad} \bar{z}_\alpha$. Zum Beweis, dass auch $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$ den Unterraum M invariant lässt, beachte, dass für $\alpha, \gamma \in \Delta$ die Abbildungen $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$ und $\operatorname{ad} \bar{y}_\gamma$ stets kommutieren, außer wenn $\alpha = \gamma$ ist (nach Lemma 4.8 kann nämlich $\alpha - \gamma$ keine Wurzel sein). Wenden wir daher $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$ auf ein Element der Form (5.1) an, so vertauscht $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$ mit allen $\operatorname{ad} \bar{y}_\gamma$ außer eventuell mit $\operatorname{ad} \bar{y}_\alpha$, in welchem Fall wir ein $\operatorname{ad} \bar{z}_\alpha$ erhalten, was wir aber schon geklärt haben. Da schließlich wegen der Maximalität von β gilt, dass $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha(\bar{x}) = 0$ für jede Wurzel $\alpha \in \Delta$, sehen wir, dass $\operatorname{ad} \bar{x}_\alpha$ auch M invariant lässt.

Nehmen wir nun an, D wäre keine echte Unteralgebra von $L \oplus L'$, also $D = L \oplus L'$, dann ist M ein von Null verschiedenes nicht-triviales Ideal von $L \oplus L'$, womit $M = L$ oder $M = L'$ sein muss, ein offensichtlicher Widerspruch.

Als nächstes können wir nun zeigen, dass D wirklich die Eigenschaft hat, dass die Projektionen auf L und L' Lie Algebren Isomorphismen sind. Da Projektionen auf Summanden einer direkten Summe stets Lie Algebren Homomorphismen sind und im Falle von D, nach Konstruktion und Proposition 5.1, auch surjektiv sind, bleibt nur die Injektivität nachzuweisen. Angenommen D hat nicht leeren Schnitt mit $(L, 0)$, dem Kern der Projektion auf L'. Dann enthält D ein Element der Form $(w, 0)$ mit $0 \neq w \in L$ und damit auch alle Elemente der Form

$$(\operatorname{ad} v_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \operatorname{ad} v_{\alpha_s}(w), 0)$$

mit $\alpha_i \in \Delta$ und $v_{\alpha_i} = x_{\alpha_i}$ oder y_{α_i}. Diese Elemente bilden aber ein von Null verschiedenes Ideal von $(L, 0)$ (nach Proposition 5.1), welches damit gleich $(L, 0)$ sein muss. Damit enthält D ganz $(L, 0)$ und aufgrund der Surjektivität der Projektion auf L' auch $(0, L')$. Es folgt $D = L \oplus L'$ im Widerspruch zum ersten Teil des Beweises.

Beachte, dass der via D konstruierte Isomorphismus $L \to L'$ tatsächlich für jedes $\alpha \in \Delta$ die Elemente x_α auf $x'_{\alpha'}$ und z_α auf $z'_{\alpha'}$ abbildet und damit mit π auf H übereinstimmt. Da die Wahl eines $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Delta$ ein eindeutiges $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ bestimmt, sodass $[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha$, folgt die Eindeutigkeit von π aus Proposition 5.1. ■

Wir wollen uns nun dem Problem zuwenden, inwieweit die Wahl einer Cartan Unteralgebra das zugehörige Wurzelsystem beeinflusst. Dazu erinnern wir zunächst an grundlegende Aussagen aus der linearen Algebra, die wir bereits beim Beweis der Jordan Zerlegung verwendet haben: Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $x : V \to V$ eine lineare Abbildung, dann gilt

$$V = V_{(\lambda_i)} \oplus \cdots \oplus V_{(\lambda_k)},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von x mit zugehörigen algebraischen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k$ sind und

$$V_{(\lambda_i)} = \ker(x - \lambda_i \mathrm{Id})^{n_i}.$$

Jeder der Unterräume $V_{(\lambda_i)}$ ist darüber hinaus invariant unter x und die Einschränkung von x auf $V_{(\lambda_i)}$ ist die Summe von $\lambda_i \mathrm{Id}$ und einer nilpotenten Abbildung.

Wenden wir diese Aussagen nun auf die adjungierte Abbildung eines Elements x einer Lie Algebra L an, so erhalten wir einer Zerlegung von L der Form

$$L = L_{(0)}(\operatorname{ad} x) \oplus L_*(\operatorname{ad} x)$$

wobei $L_*(\operatorname{ad} x)$ die Summe jener Unterräume $L_{(\lambda)}(\operatorname{ad} x)$ bezeichnet, für die $\lambda \neq 0$. Allgemeiner können wir auch eine unter $\operatorname{ad} x$ invariante Unteralgebra K von L in der Form $K = K_{(0)}(\operatorname{ad} x) \oplus K_*(\operatorname{ad} x)$ darstellen auch wenn $x \notin K$.

Lemma 5.3 *Es sei L eine komplexe Lie Algebra, $a, b \in \mathbb{C}$ und $x \in L$. Dann gilt*

$$[L_{(a)}(\operatorname{ad} x), L_{(b)}(\operatorname{ad} x)] \subseteq L_{(a+b)}(\operatorname{ad} x).$$

Insbesondere ist $L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ eine Unteralgebra von L und jedes Element von $L_{(a)}(\operatorname{ad} x)$ für $a \neq 0$ ad-nilpotent.

Beweis: Durch eine einfache Induktion nach $m \in \mathbb{N}$ zeigt man, dass

$$(\operatorname{ad} x - (a+b)\mathrm{Id})^m [y, z] = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [(\operatorname{ad} x - a\,\mathrm{Id})^i(y), (\operatorname{ad} x - b\,\mathrm{Id})^{m-i}(z)]$$

für alle $y, z \in L$. Ist nun $y \in L_{(a)}(\operatorname{ad} x)$ und $z \in L_{(b)}(\operatorname{ad} x)$ sowie m hinreichend groß, dann verschwinden offenbar alle Summanden auf der rechten Seite, womit die Behauptung folgt. ■

Den Unteralgebren $L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ kommt in weiterer Folge besondere Bedeutung zu.

Definition. Es sei L eine komplexe Lie Algebra und $x \in L$. Dann heißt die Unteralgebra $L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ eine *Engel Unteralgebra* von L.

Bevor wir uns Cartan Unteralgebren und deren Beziehung zu Engel Unteralgebren widmen, benötigen wir noch ein Hilfsresultat und dazu folgende Begriffsbildung.

Definition. Es sei L eine (komplexe) Lie Algebra und K eine Unteralgebra (oder auch nur ein Unterraum) von L. Der *Normalisator* von K ist die Unteralgebra von L definiert durch

$$N_L(K) = \{x \in L : [x, K] \subseteq K\}.$$

Ist $K = N_L(K)$, so nennen wir K *selbstnormalisierend.*

Bemerkung.

(a) Ist K eine Unteralgebra von L, dann ist $N_L(K)$ die größte Unteralgebra von L, die K als ein Ideal enthält.

Lemma 5.4 *Es sei L eine komplexe Lie Algebra und K eine Unteralgebra von L.*

(i) Ist für $z \in K$ die Unteralgebra $L_{(0)}(\operatorname{ad} z)$ minimal unter allen $L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ mit $x \in K$ und $K \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} z)$, dann ist $L_{(0)}(\operatorname{ad} z) \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ für alle $x \in K$.

(ii) Enthält K eine Engel Unteralgebra von L, dann ist $N_L(K) = K$. Insbesondere ist $N_L(U) = U$ für jede Engel Unteralgebra U.

Beweis: Zum Beweis von (i) sei $x \in K$ beliebig aber fest gewählt und betrachte die Familie

$$\{\operatorname{ad}(z + cx) : c \in \mathbb{C}\}$$

von linearen Selbstabbildungen von L. Da $K_0 := L_{(0)}(\operatorname{ad} z)$ eine Unteralgebra von L ist, die K enthält, lässt diese Familie K_0 invariant und induziert daher eine lineare Selbstabbildung auf dem Quotienten L/K_0. Das charakteristische Polynom von $\operatorname{ad}(z + cx)$ kann daher als ein Produkt $p(t, c)q(t, c)$ geschrieben werden, wobei $p(t, c)$ das charakterisische Polynom der Einschränkung von $\operatorname{ad}(z + cx)$ auf K_0 und $q(t, c)$ das charakteristische Polynome der induzierten Abbildung $L/K_0 \to L/K_0$ bezeichnet. Ist $\dim K_0 = r$ und $\dim L = n$, dann können wir weiters $p(t, c)$ und $q(t, c)$ schreiben in der Form

$$\begin{aligned} p(t, c) &= t^r + p_1(c)t^{r-1} + \cdots + p_r(c), \\ q(t, c) &= t^{n-r} + q_1(c)t^{n-r-1} + \cdots + q_{n-r}(c), \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $p_i(c)$ und $q_i(c)$ selbst wieder Polynome in c vom Grad höchstens i sind.

Nach Definition liegen die Eigenvektoren von $\operatorname{ad} z$ zum Eigenwert 0 im Unterraum K_0, womit das Polynom q_{n-r} nicht identisch 0 sein kann. Wir können daher $r+1$ verschiedene Skalare $c_1, \ldots, c_{r+1} \in \mathbb{C}$ finden, die alle nicht Null sind, sodass $q_{n-r}(c_j) \neq 0$ für alle $1 \leq j \leq r$. Das bedeutet, dass die von $\operatorname{ad}(z + c_j x)$ induzierten Abbildungen auf L/K_0 nicht den Eigenwert 0 haben. Damit liegen die Räume $L_{(0)}(\operatorname{ad}(z + c_j x))$ alle im Unterraum K_0. Aufgrund der Minimalität von K_0 folgt daher

$$L_{(0)}(\operatorname{ad} z) = L_{(0)}(\operatorname{ad}(z + c_j x)) \text{ für alle } 1 \leq j \leq r + 1.$$

Dies widerum bedeutet, dass alle $\operatorname{ad}(z+c_j x)$ den einzigen Eigenwert 0 auf $L_{(0)}(\operatorname{ad} z)$ haben also, dass $p(t, c_j) = t^r$ ist für alle $1 \leq j \leq r + 1$. Damit haben aber die Polynome $p_1, \ldots, p_r$ vom Grad höchstens r alle die $r + 1$ verschiedenen Nullstellen $c_1, \ldots, c_{r+1}$ und sind somit identisch 0. Es folgt $K_0 \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad}(z+cx))$ für alle $c \in \mathbb{C}$. Da x beliebig war, können wir es nun durch $x - z$ ersetzen und $c = 1$ wählen, um $L_{(0)}(\operatorname{ad} z) \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ zu erhalten.

Zum Beweis von (ii) sei $L_{(0)}(\operatorname{ad} x) \subseteq K$ für ein $x \in L$. Dann hat einerseits die durch $\operatorname{ad} x$ induzierte Abbildung auf $N_L(K)/K$ nicht den Eigenwert 0. Andererseits impliziert $x \in K$ aber $[x, N_L(K)] \subseteq K$, womit $\operatorname{ad} x$ trivial auf $N_L(K)/K$ wirkt. Dies kann beides nur dann der Fall sein, wenn $K = N_L(K)$ gilt. ■

Wir erinnern nun an die bereits in Kapitel 3 erwähnte Definition von Cartan Unteralgebren allgemeiner (komplexer) Lie Algebren.

Definition. Eine Cartan Unteralgebra einer komplexen Lie Algebra ist eine selbstnormalisierende nilpotente Unteralgebra.

Diese Definition hat den Nachteil, dass nicht direkt ersichtlich ist, ob Cartan Unteralgebren stets existieren und, ob für halbeinfache Lie Algebren die Cartan Unteralgebren nach obiger Definition genau die maximalen toralen Unteralgebren sind. Unsere nächsten beiden Resultate klären dies daher.

Satz 5.5 *Es sei L eine komplexe Lie Algebra und H eine Unteralgebra von L. Dann ist H genau dann eine Cartan Unteralgebra, wenn H eine minimale Engel Unteralgebra ist. Insbesondere besitzt L Cartan Unteralgebren.*

Beweis: Es sei zunächst $H = L_{(0)}(\operatorname{ad} z)$ eine minimale Engel Unteralgebra von L. Dann ist H nach Lemma 5.4 (ii) selbstnormalisierend. Aus der Minimalität von H folgt, dass die Voraussetzungen von Lemma 5.4 (i) erfüllt sind (mit $H = K$), womit $H \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ für alle $x \in H$. Insbesondere ist $\operatorname{ad}_H x$ nilpotent für alle $x \in H$. Nach dem Satz von Engel ist daher H nilpotent.

Es sei nun umgekehrt H eine Cartan Unteralgebra von L. Da H nilpotent ist, gilt $H \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ für alle $x \in H$. Angenommen es gibt kein $x \in H$ mit $H = L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$. Es sei $z \in H$ so gewählt, dass $L_{(0)}(\operatorname{ad} z)$ so klein wie möglich ist. Dann folgt aus Lemma 5.4 (i), dass $L_{(0)}(\operatorname{ad} z) \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ für alle $x \in H$. Dies bedeutet aber, dass für jedes $x \in H$ die von $\operatorname{ad} x$ auf dem von Null verschiedenen Vektorraum $L_{(0)}(\operatorname{ad} z)/H$ induzierte Abbildung nilpotent ist. Nach Satz 1.17 gibt es daher eine von Null verschiedene Nebenklasse $y + H$, sodass die von $\operatorname{ad} H$ induzierten Abbildungen auf $y + H$ verschwinden. Anders ausgedrückt gibt es ein $y \notin H$ mit $[y, H] \subseteq H$, im Widerspruch dazu, dass H selbstnormalisierend ist. ■

Korollar 5.6 *Ist L eine halbeinfache komplexe Lie Algebra, dann sind die Cartan Unteralgebren genau die maximalen toralen Unteralgebren von L.*

Beweis: Ist H eine maximale torale Unteralgebra, dann ist H nach Proposition 3.16 abelsch und damit nilpotent. Aus der Wurzelraumzerlegung von L bezüglich H,

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

folgt wegen $[H, L_\alpha] = L_\alpha$ für alle $\alpha \in \Phi$, dass auch $N_L(H) = H$, womit H eine Cartan Unteralgebra ist.

Es sei nun umgekehrt H nilpotent und selbstnormalisierend und $x \in L$. Wir können x nach der abstrakten Jordanzerlegung schreiben in der Form $x = x_s + x_n$. Beachte, dass jedes $y \in L$, das durch eine Potenz von $\operatorname{ad} x_s$ auf Null abgebildet wird, auch von einer Potenz von $\operatorname{ad} x$ auf Null abgebildet wird, da $\operatorname{ad} x_n$ nilpotent ist und mit $\operatorname{ad} x_s$ kommutiert. Daraus folgt aber $L_{(0)}(\operatorname{ad} x_s) \subseteq L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$.
Ist weiters $x \in L$ halbeinfach, also $\operatorname{ad} x$ diagonalisierbar, dann ist außerdem $L_{(0)}(\operatorname{ad} x) = C_L(x)$. Da nach Satz 5.5 H eine minimale Engel Unteralgebra ist, also von der Form $H = L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ für geeignetes $x \in L$, folgt $H = L_{(0)}(\operatorname{ad} x_s) = C_L(x_s)$. Aber $C_L(x_s)$ enthält nach Definition eine maximale torale Unteralgebra von L (vgl. Satz 3.17), von der wir nach dem ersten Teil des Beweises bereits wissen, dass sie eine Cartan Unteralgebra und damit eine minimale Engel Unteralgebra ist. Sie muss daher mit H übereinstimmen. ■

Bemerkung:

(a) Der Beweis dieses Korollars zeigt noch einmal (vgl. Satz 3.17), dass jede Cartan Unteralgebra einer halbeinfachen Lie Algebra die Form $C_L(s)$ für ein geeignetes halbeinfaches $s \in L$ hat. So ein Element nennen wir *regulär halbeinfach*.

Mit unserer nächsten Proposition notieren wir einige funktorielle Eigenschaften von Cartan Unteralgebren.

Proposition 5.7 *Es seien L und L' komplexe Lie Algebren und $\phi : L \to L'$ ein surjektiver Lie Algebren Homomorphismus.*

(i) Ist H eine Cartan Unteralgebra von L, dann ist $\phi(H)$ eine Cartan Unteralgebra von L'.

(ii) Ist H' eine Cartan Unteralgebra von L' und $K = \phi^{-1}(H')$, dann ist jede Cartan Unteralgebra H von K auch eine Cartan Unteralgebra von L.

Beweis: Zum Beweis von (i) beachte, dass $\phi(H)$ nilpotent ist. Da $\phi(H) \cong H + \ker\phi$ aber eine minimale Engel Unteralgebra enthält, ist $\phi(H)$ nach Lemma 5.4 (ii) auch selbstnormalisierend und damit eine Cartan Unteralgebra.

Für den Beweis von (ii) bemerken wir zunächst, dass H nach Voraussetzung nilpotent ist und nach (i) ist $\phi(H)$ eine Cartan Unteralgebra von $\phi(K) = H'$, womit $\phi(H) = H'$ nach Satz 5.5. Ist $x \in L$ und $[x, H] \subseteq H$, dann folgt $[\phi(x), \phi(H)] \subseteq \phi(H)$, woraus wir $\phi(x) \in \phi(H)$ bzw. $x \in H + \ker\phi$ schließen. Nun ist aber $\ker\phi \subseteq K$ nach Konstruktion. Somit folgt $x \in H + K \subseteq K$. Da H eine Cartan Unteralgebra von K ist, erhalten wir schließlich $x \in N_K(H) = H$. ■

Wir kommen nun zur Aussage, dass alle Cartan Unteralgebren einer komplexen Lie Algebra konjugiert sind unter der Gruppe inneren Automorphismen. Aber zunächst müssen wir klären, was wir damit überhaupt meinen.

Definition: Wir nennen eine Familie von Unteralgebren H_α, $\alpha \in I$, einer Lie Algebra L konjugiert unter einer Menge M von linearen Selbstabbildungen von L, wenn es zu je zwei Unteralgebren H_{α_1} und H_{α_2} eine Abbildung $\sigma \in M$ gibt mit $\sigma(H_{\alpha_1}) = H_{\alpha_2}$. Wir sagen dann auch H_{α_1} und H_{α_2} sind konjugiert via σ.

Die Gruppe der *inneren Automorphismen* von L, also die von Abbildungen der Form $\exp \operatorname{ad} x$, $x \in L$ ad-nilpotent, erzeugte Gruppe (vgl. dazu Seite 7 und 9) bezeichnen wir mit $\operatorname{int} L$. Da wir die gewünschte Aussage, dass alle Cartan Unteralgebren unter $\operatorname{int} L$ konjugiert sind nicht nur für halbeinfache Lie Algebren zeigen wollen, wird es sich als günstig erweisen mit einer Untergruppe von $\operatorname{int} L$ zu arbeiten.

Definition. Es sei L eine Lie Algebra. Wir nennen $x \in L$ *stark ad-nilpotent*, wenn es ein $y \in L$ und einen von Null verschiedenen Eigenwert λ von $\operatorname{ad} y$ gibt, sodass $x \in L_{(\lambda)}(\operatorname{ad} y)$. Es bezeichne $\mathcal{N}(L)$ die Menge aller stark ad-nilpotenten Elemente von L und $\mathcal{E}(L)$ die Untergruppe von $\operatorname{int} L$, die von allen Elementen der Form $\exp \operatorname{ad} x$, $x \in \mathcal{N}(L)$, erzeugt wird.

Bemerkungen:

(a) Nach Lemma 5.3 ist jedes stark ad-nilpotente Element auch ad-nilpotent.

(b) Da $\mathcal{N}(L)$ invariant unter $\operatorname{Aut} L$ ist, ist $\mathcal{E}(L)$ ein Normalteiler von $\operatorname{Aut} L$ ist.

(c) Ist L halbeinfach, so kann man zeigen, dass $\mathcal{E}(L) = \operatorname{int} L$.

Der Vorteil mit $\mathcal{E}(L)$ statt mit $\operatorname{int} L$ zu arbeiten liegt in den besseren funktoriellen Eigenschaften von $\mathcal{E}(L)$. Ist etwa K eine Unteralgebra von L, dann gilt offenbar $\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(L)$. Damit können wir die Untergruppe $\mathcal{E}(L;K)$ von $\mathcal{E}(L)$ definieren, die von allen Elementen der Form $\exp \operatorname{ad}_L x$, $x \in \mathcal{N}(K)$, erzeugt wird. Wir erhalten dann $\mathcal{E}(K)$ einfach durch Einschränkung von $\mathcal{E}(L;K)$ auf K.

Die Gruppe $\mathcal{E}(L)$ hat außerdem folgende nützliche Eigenschaft.

Lemma 5.8 *Seien L und L' komplexe Lie Algebren und $\phi : L \to L'$ ein surjektiver Lie Algebren Homomorphismus. Ist $\sigma' \in \mathcal{E}(L')$, dann gibt es ein $\sigma \in \mathcal{E}(L)$ sodass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"'] & L' \arrow[d, "\sigma'"] \\ L \arrow[r, "\phi"] & L' \end{tikzcd}$$

Beweis: Nach Definition von $\mathcal{E}(L)$ genügt es die Aussage für $\sigma' = \exp \operatorname{ad}_L x'$ mit $x' \in \mathcal{N}(L')$ nachzweisen. Da ϕ ein surjektiver Lie Algebren Homomorphismus ist, folgt $\phi(L_{(\lambda)}(\operatorname{ad} y)) = L'_{(\lambda)}(\operatorname{ad} \phi(y))$ und daraus $\phi(\mathcal{N}(L)) = \mathcal{N}(L')$. Daher gibt es ein $x \in \mathcal{N}(L)$ mit $x' = \phi(x)$. Für beliebiges $z \in L$ gilt aber

$$\begin{aligned} (\phi \circ \exp \operatorname{ad}_L x)(z) &= \phi(z + [x,z] + \tfrac{1}{2}[x,[x,z]] + \cdots) \\ &= \phi(z) + [x', \phi(z)] + \tfrac{1}{2}[x',[x',\phi(z)] + \cdots = (\exp \operatorname{ad}_{L'} x' \circ \phi)(z), \end{aligned}$$

womit das obige Diagramm kommutiert. ■

Als erstes Hilfsresultat auf dem Weg zum zweiten Hauptresultat zeigen wir, dass in einer auflösbaren Lie Algebra alle Cartan Unteralgebren unter $\mathcal{E}(L)$ konjugiert sind.

Satz 5.9 *Ist L eine auflösbare komplexe Lie Algebra, dann sind die Cartan Unteralgebren von L konjugiert unter $\mathcal{E}(L)$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension von L, wobei der Fall $\dim L = 1$ bzw. der Fall, dass L nilpotent ist, trivial sind. Wir nehmen daher nun an, dass $\dim L > 1$ und L nicht nilpotent ist. Weiters seien H_1 und H_2 zwei Cartan Unteralgebren von L.

Da L auflösbar ist, besitzt L ein von Null verschiedenes abelsches Ideal (etwa den letzten nicht verschwindenden Term der abgeleiteten Reihe). Es sei A so ein Ideal kleinster Dimension. Es sei $L' = L/A$ und $\phi : L \to L/A$, $x \mapsto x'$, die kanonische Abbildung. Nach Proposition 5.7 (i) sind H_1' und H_2' Cartan Unteralgebren der auflösbaren Lie Algebra L'. Nach Induktionsannahme gibt es ein $\sigma' \in \mathcal{E}(L')$ mit $\sigma'(H_1') = H_2'$. Nach Lemma 5.8 gibt es daher ein $\sigma \in \mathcal{E}(L)$, sodass

$$\phi \circ \sigma' = \sigma \circ \phi.$$

Das bedeutet, dass σ das Urbild $K_1 = \phi^{-1}(H_1')$ auf $K_2 = \phi^{-1}(H_2')$ abbildet. Nun sind aber H_2 und $\sigma(H_1)$ beide Cartan Unteralgebren von K_2. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Angenommen K_2 ist echt in L enthalten. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $\tau' \in \mathcal{E}(K_2)$, sodass $\tau'\sigma(H_1) = H_2$. Die Gruppe $\mathcal{E}(K_2)$ besteht aber aus den Einschränkungen der Elemente von $\mathcal{E}(L; K_2) \subseteq \mathcal{E}(L)$ auf K_2, womit $\tau\sigma(H_1) = H_2$ für ein $\tau \in \mathcal{E}(L)$ dessen Einschränkung auf K_2 gerade τ' ist.

Nehmen wir nun andererseits an, dass $L = K_2 = \sigma(K_1)$ ist, womit dann $K_1 = K_2$ und $L = H_2 + A = H_1 + A$. In diesem Fall verwenden wir Satz 5.5, um die Cartan Unteralgebra H_2 in der Form $H_2 = L_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ für geeignetes $x \in L$ darzustellen. Da A invariant ist unter $\operatorname{ad} x$, können wir A zerlegen in der Form

$$A = A_{(0)}(\operatorname{ad} x) \oplus A_*(\operatorname{ad} x),$$

wobei hier jeder Summand nach Lemma 5.3 invariant unter $\operatorname{ad} L = \operatorname{ad} H_2 + \operatorname{ad} A$ ist. Aufgrund der Minimalität von A muss daher $A = A_{(0)}(\operatorname{ad} x)$ oder $A = A_*(\operatorname{ad} x)$ gelten. Im ersten Fall wäre dann $A \subseteq H_2$ und $L = H_2$ im Widerspruch dazu, dass L nicht nilpotent ist. Damit ist $A = A_*(\operatorname{ad} x)$ und daher offenbar $A = L_*(\operatorname{ad} x)$. Da $L = H_1 + A$, können wir x zerlegen in der Form $x = y + z$ mit $y \in H_1$ und $z \in L_*(\operatorname{ad} x)$. Verwenden wir noch, dass $\operatorname{ad} x$ auf $L_*(\operatorname{ad} x)$ invertierbar ist, so können wir z weiters darstellen in der Form $z = [x, z']$ für ein $z' \in L_*(\operatorname{ad} x)$. Da A abelsch ist, gilt $(\operatorname{ad} z')^2 = 0$, womit

$$\tau := \exp \operatorname{ad} z' = \operatorname{Id}_L + \operatorname{ad} z'.$$

Daher ist $\tau(x) = x - z = y$. Insbesondere muss auch $H = L_{(0)}(\operatorname{ad} y) = L_{(0)}(\operatorname{ad} \tau(x))$ eine Cartan Unteralgebra von L sein. Da $y \in H_1$ ist $H_1 \subseteq H$ und damit $H = H_1$, da beide minimale Engel Unteralgebren sind. Somit ist H_1 konjugiert zu H_2 via τ.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tau \in \mathcal{E}(L)$. Dazu beachte, dass z' eine Summe von stark ad-nilpotenten Elemente $z_i \in A = L_*(\operatorname{ad} x)$ ist. Da A aber abelsch ist, kommutieren die Abbildungen $\operatorname{ad} z_i$, womit $\tau = \prod_i \exp \operatorname{ad} z_i \in \mathcal{E}(L)$. ■

Um Satz 5.9 auf beliebige Lie Algebren zu verallgemeinern, brauchen wir noch einen weiteren Typ von Unteralgebren.

Definition. Eine *Borel Unteralgebra* einer Lie Algebra L ist eine maximale auflösbare Unteralgebra von L.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass auch alle Borel Unteralgebren einer Lie Algebra L unter $\mathcal{E}(L)$ konjugiert sind. Dazu benötigen wir noch folgende Hilfsresultate.

Lemma 5.10 *Es sei L eine komplexe Lie Algebra.*

(i) Ist B eine Borel Unteralgebra von L, dann ist $B = N_L(B)$.

(ii) Die Borel Unteralgebren von L stehen in kanonischer Eins-zu-Eins-Beziehung mit jenen der halbeinfachen Lie Algebra $L/\operatorname{rad} L$.

(iii) Ist L halbeinfach mit Cartan Unteralgebra H und Wurzelsystem Φ, dann ist für jede Basis $\Delta \subseteq \Phi$, $B(\Delta) = H \oplus \bigoplus_{\alpha \succ 0} L_\alpha$ eine Borel Unteralgebra von L, die Standard Borel Unteralgebra *relativ zu H. Darüber hinaus sind alle Standard Borel Unterlagebren konjugiert unter $\mathcal{E}(L)$.*

Beweis: Zum Beweis von (i) sei $x \in L$ mit $[x, B] \subseteq B$. Dann ist $B + \operatorname{span}\{x\}$ eine Unteralgebra von L, die auflösbar ist, da

$$[B + \operatorname{span}\{x\}, B + \operatorname{span}\{x\}] \subseteq B.$$

Aus der Maximalität von B folgt daher $x \in B$ und damit die Behauptung.

Für den Beweis von (ii) beachte, dass $\operatorname{rad} L$ ein auflösbares Ideal von L ist, womit $B + \operatorname{rad} L$ eine auflösbare Unteralgebra von L ist für jede Borel Unteralgebra B von L. Aus der Maximalität folgt daher $\operatorname{rad} L \subseteq B$ und damit die gewünschte Aussage.

Um schließlich (iii) zu zeigen, sei

$$N(\Delta) = \bigoplus_{\alpha \succ 0} L_\alpha.$$

Aus den Resultaten am Ende von Kapitel 3 wissen wir schon, dass $B(\Delta)$ eine Unteralgebra von L mit abgeleiteter Algebra $N(\Delta)$ ist. Da für ein $x \in L_\alpha$, $\alpha \succ 0$, die Anwendung von $\operatorname{ad} x$ auf Wurzelvektoren von Wurzeln positiver Höhe (in Bezug auf Δ) die Höhe um mindestens 1 erhöht, sehen wir, dass die absteigende Zentralreihe von $N(\Delta)$ abbricht, womit $N(\Delta)$ nilpotent und damit $B(\Delta)$ auflösbar ist. Ist K eine beliebige Unteralgebra von L, die $B(\Delta)$ echt enthält, dann muss K mindestens ein L_α mit $\alpha \prec 0$ enthalten, da K invariant unter $\operatorname{ad} H$ ist. Dann enthält K aber die einfache Unteralgebra $\mathfrak{sl}(\alpha)$. Insbesondere kann K nicht auflösbar sein. Damit ist $B(\Delta)$ eine Borel Unteralgebra.

Es bleibt zu zeigen, dass alle Standard Borel Unteralgebren konjugiert sind unter $\mathcal{E}(L)$. Dazu sei σ_α eine Wurzelspiegelung und

$$\tau_\alpha = \exp \operatorname{ad} x_\alpha \circ \exp \operatorname{ad} (-y_\alpha) \circ \exp \operatorname{ad} x_\alpha \in \mathcal{E}(L),$$

wobei $x_\alpha \in L_\alpha$, $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ mit $[x_\alpha, y_\alpha] = z_\alpha$. (Beachte, dass $\operatorname{ad} x_\alpha$ nilpotent ist.) Schreiben wir $H = \ker \alpha \oplus \operatorname{span}\{z_\alpha\}$, dann gilt offenbar $\tau_\alpha(h) = h$ für alle $h \in \ker \alpha$, während $\tau_\alpha(z_\alpha) = -z_\alpha$. Damit stimmen τ_α und der durch σ_α induzierte Automorphismus von H auf H überein. Darüber hinaus ist $\tau_\alpha(L_\beta) = L_{\sigma_\alpha \beta}$. Da die Weyl Gruppe von den Wurzelspiegelungen erzeugt wird und transitiv auf Basen wirkt, wirkt $\mathcal{E}(L)$ transitiv auf Standard Borel Unteralgebren in Bezug auf H. ■

Satz 5.11 *Ist L eine komplexe Lie Algebra, dann sind alle Borel Unteralgebren von L konjugiert unter $\mathcal{E}(L)$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension von L, wobei der Fall $\dim L = 1$ trivial ist. Nach Lemmas 5.8 und 5.10 zusammen mit der Induktionsannahme, können wir annehmen, dass L halbeinfach ist. Es sei B eine Standard Borel Unteralgebra (in Bezug auf eine Cartan Unteralgebra). Offenbar genügt es zu zeigen, dass jede Borel Unteralgebra B' konjugiert ist zu B via $\mathcal{E}(L)$. Ist $B \cap B' = B$, dann ist nichts mehr zu zeigen, da daraus $B = B'$ aus der Maximalität folgt. Wir können daher eine zweite (nach unten laufende) Induktion nach $\dim B \cap B'$ verwenden. Beachte dabei, dass jede Borel Unteralgebra, deren Schnitt mit B (oder einer zu B konjugierten Borel Unteralgebra) größere Dimension hat bereits zu B konjugiert ist.

Angenommen $B \cap B' \neq 0$. Dann können zwei Fälle auftreten:

(1) Die Menge N' der nilpotenten Elemente von $B \cap B'$ ist von Null verschieden.

Da B eine Standard Borel Unteralgebra ist, ist N' ein Unterraum und die abgeleitete Algebra von $B \cap B'$ besteht aus nilpotenten Elementen. Dies impliziert aber, dass N' ein Ideal von $B \cap B'$ ist. Beachte aber, dass N' kein Ideal von L ist, womit der Normalisator von N' eine echte Unteralgebra von L ist.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass $B \cap B'$ echt in $B \cap K$ und $B' \cap K$ enthalten ist. Dazu betrachte die adjungierte Darstellung von N' auf $B/(B \cap B')$. Jedes $x \in N'$ wirkt nilpotent auf diesem Vektorraum, womit es nach Satz 1.17 eine von Null verschiedene Nebenklasse $y + (B \cap B')$ gibt, die von allen $x \in N'$ auf Null abgebildet wird. Das bedeutet aber, dass für ein $y \notin B \cap B'$ stets $[x, y] \in B \cap B'$ für alle $x \in N'$. Aber $[x, y]$ ist auch in $[B, B]$ und damit nilpotent, woraus $[x, y] \in N'$ bzw. $y \in N_B(N') = B \cap K$ folgt, während $y \notin B \cap B'$. Analog ist $B \cap B'$ echt in $B' \cap K$ enthalten.

Andererseits sind $B \cap K$ und $B' \cap K$ beides auflösbare Unteralgebren von K. Es seien C und C' die jeweiligen Borel Unteralgebren von K, welche $B \cap K$ und $B' \cap K$ enthalten. Da $K \neq L$, folgt aus unserer Induktionsannahme die Existenz eines $\sigma \in \mathcal{E}(L; K) \subseteq \mathcal{E}(L)$ mit $\sigma(C') = C$. Da $B \cap B'$ eine echte von Null verschiedene Unteralgebra von sowohl C als auch C' ist, liefert die zweite Induktionsannahme ein $\tau \in \mathcal{E}(L)$, sodass $\tau\sigma(C') \subseteq B$, d.h. τ bildet eine Borel Unterlagebra von L, die $\sigma(C') = C$ enthält, auf B ab. Damit erhalten wir schließlich

$$B \cap \tau\sigma(B') \supseteq \tau\sigma(C') \cap \tau\sigma(B') \supseteq \tau\sigma(B' \cap K) \supsetneq \tau\sigma(B \cap B'),$$

womit $\dim B \cap \tau\sigma(B') > \dim B \cap B'$. Aus der zweiten Induktionsannahme folgt daher, dass B konjugiert zu $\tau\sigma(B')$ ist via $\mathcal{E}(L)$, womit der erste Fall abgeschlossen ist.

(2) $B \cap B'$ hat keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente.

Beachte zunächst, dass nach Proposition 2.6 und Lemma 5.10 (i) jede Borel Unteralgebra von L sowohl die halbeinfachen als auch die nilpotenten Anteile jedes ihrer Elemente enthält. Damit folgt sofort, dass $B \cap B' = T$ eine torale Unteralgebra ist. Nun verwenden wir, dass B eine Standard Borel Unteralgebra ist, etwa $B = B(\Delta)$, $N = N(\Delta)$, und $B = H + N$. Da $[B, B] = N$ und $T \cap N = 0$ gilt, ist offenbar

$$N_B(T) = C_B(T).$$

Es sei C nun eine Cartan Unteralgebra von $C_B(T)$. Dann ist insbesondere C nilpotent und $T \subseteq N_{C_B(T)}(C) = C$. Ist $n \in N_B(C)$, $t \in T \subseteq C$, dann ist $(\operatorname{ad} t)^k n = 0$ für geeignetes k, da C nilpotent ist. Die Abbildung $\operatorname{ad} t$ ist aber auch halbeinfach, womit $k = 1$ und $n \in C_B(T)$ gelten muss. Daraus folgt

$$N_B(C) = N_{C_B(T)}(C) = C.$$

Als nilpotente selbstnoramlisierende Unteralgebra von B ist C eine Cartan Unteralgebra von B, welche T enthält. Nach Satz 5.9 ist C eine maximale torale Unteralgebra von L, die via $\mathcal{E}(B)$ und damit via $\mathcal{E}(L)$ konjugiert zu H ist. Damit können wir o.B.d.A. annehmen, dass $T \subseteq H$.

Angenommen wir hätten sogar $T = H$. Da $B' \supsetneq H$, muss B' mindestens einen Wurzelraum L_α, $\alpha \prec 0$ in Bezug auf Δ, enthalten. Anwendung des im Beweis von Lemma 5.10 (iii) konstruierten inneren Automorphismu τ_α auf B' liefert daher eine Borel Unteralgebra B'' deren Schnitt mit B zumindest $H + L_{-\alpha}$ enthält. Aus der zweiten Induktionsannahme folgt, dass B'' konjugiert ist zu B und wir sind fertig.

Es sei daher nun $T \subsetneq H$. Wir unterscheiden hier die zwei Fälle $B' \subseteq C_L(T)$ und $B' \nsubseteq C_L(T)$. Angenommen $B' \subseteq C_L(T)$, dann können wir die erste Induktionsannahme, da $\dim C_L(T) < \dim L$ (was aus $T \neq 0$ und $Z(L) = 0$ folgt) ist, verwenden. Wir nutzen nämlich aus, dass $H \subseteq C_L(T)$ ist, um eine Borel Unteralgebra B'' von $C_L(T)$ zu finden, die H enthält, für die es dann nach Annahme ein $\sigma \in \mathcal{E}(L; C_L(T)) \subseteq \mathcal{E}(L)$ gibt, welches B' auf B'' abbildet. Insbesondere ist B'' eine Borel Unteralgebra von L, welche H enthält, und damit konjugiert zu B via $\mathcal{E}(L)$ aufgrund der zweiten Induktionsannahme.

Es bleibt der Fall $B' \nsubseteq C_L(T)$. Es gibt dann einen gemeinsamen Eigenvektor $x \in B'$ für die Abbildungen in $\operatorname{ad} T$ und ein Element $t \in T$ für das $[t, x] = ax$, mit $0 < a \in \mathbb{Q}$. Es sei $S = H + \bigoplus_\alpha L_\alpha$, wobei die Summe über alle $\alpha \in \Phi$ mit $0 < \alpha(t) \in \mathbb{Q}$ läuft. Dann ist S offenbar eine Unteralgebra von L und $x \in S$. Darüber hinaus ist S auflösbar (vgl. Beweis von Lemma 5.10 (iii)). Es sei B'' eine Borel Unteralgebra von L, die S enthält. Dann gilt

$$B'' \cap B' \supseteq T + \operatorname{span}\{x\} \supsetneq T = B' \cap B,$$

womit $\dim B'' \cap B' > \dim B \cap B'$. Analog ist $B'' \cap B \subseteq H \supsetneq T$, womit $\dim B'' \cap B > \dim B' \cap B$. Anwendung unserer zweiten Induktionsannahme zeigt daher, dass B'' zu B konjugiert ist. Insbesondere ist B'' standard in Bezug auf eine Cartan Unteralgebra konjugiert zu H. Da B'' nun aber standard ist, können wir die zweite Induktionsannahme noch einmal auf die erste der obigen Ungleichungen anwenden, um zu sehen, dass B'' konjugiert zu B' ist. Es folgt, dass B konjugiert zu B' ist, womit der Fall (2) und damit die Fälle für die $B \cap B' \neq 0$ abgeschlossen sind.

Angenommen es ist $B \cap B' = 0$. Dann ist $\dim L \geq \dim B + \dim B'$. Da B eine Standard Borel Unteralgebra ist, wissen wir aber, dass $\dim B > \frac{1}{2} \dim L$. Es sei T eine maximale torale Unteralgebra von B'. Ist $T = 0$, dann besteht B' aus nilpotenten Elementen und ist nach dem Satz von Engel daher nilpotent. Da B' nach Lemma 5.10 (i) aber auch selbstnormalisierend ist, ist B' eine Cartan Unteralgebra. Das ist aber ein Widerspruch, da nach Korollar 5.6 alle Cartan Unteralgebren toral sind. Es ist also $T \neq 0$. Ist H_0 eine maximale torale Unteralgebra von L, die T enthält, dann hat B' nicht leeren Schnitt mit jeder Standard Borel Unteralgebra B'' in Bezug auf H_0. Nach dem ersten Teil des Beweises ist daher B' konjugiert zu B'', womit $B' = \dim B'' > \frac{1}{2} \dim L$, ein Widerspruch. ■

Kombinieren wir Satz 5.9 und Satz 5.11, so erhalten wir das bereits angekündigte Resultat als einfache Konsequenz.

Korollar 5.12 *Ist L eine komplexe Lie Algebra, dann sind alle Cartan Unteralgebren von L konjugiert unter $\mathcal{E}(L)$.*

Beweis: Es seien H und H' zwei Cartan Unteralgebren von L. Da H und H' beide nilpotent und damit auflösbar sind, liegen H und H' jeweils in zumindest einer Borel Unteralgebra, etwa B und B'. Nach Satz 5.11 gibt es ein $\sigma \in \mathcal{E}(L)$, sodass $\sigma(B) = B'$. Da $\sigma(H)$ und H' beide Cartan Unteralgebren der auflösbaren Unteralgebra B' sind, gibt es nach Satz 5.9 ein $\tau' \in \mathcal{E}(B')$, sodass $\tau'\sigma(H) = H'$. Die Abbildung τ' ist aber die Einschränkung auf B' eines Elements $\tau \in \mathcal{E}(L; B') \subseteq \mathcal{E}(L)$, womit $\tau\sigma(H) = H'$ mit $\tau\sigma \in \mathcal{E}(L)$. ■

Wir geben noch einmal explizit die folgende wichtige Konsquenz aus dem bisher Gezeigten an.

Korollar 5.13 *Zwei halbeinfache komplexe Lie Algebren sind genau dann isomorph, wenn ihre Wurzelsysteme isomorph sind.*

Aus Korollar 5.13 und der Bestimmung der Wurzelsysteme der klassischen Lie Algebren am Ende des letzten Kapitels erhalten wir:

Korollar 5.14 *Die einzigen Isomorphismen zwischen den klassischen Lie Algebren sind:*

- *Wurzelsystem* A_1: $\mathfrak{o}(3, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$;
- *Wurzelsystem* $A_1 \times A_1$: $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$;
- *Wurzelsystem* $B_2 = C_2$: $\mathfrak{o}(5, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$;
- *Wurzelsystem* $D_3 = A_3$: $\mathfrak{o}(6, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$.

6 Der Existenzsatz von Serre