# Integralgeometrie

SS 2017

Franz Schuster

franz.schuster@tuwien.ac.at

Skriptum erstellt unter Mithilfe von

Mona Solleder

# Einleitung

In dieser Vorlesung soll eine Einführung in die Integralgeometrie von konvexen und allgemeineren Mengen gegeben werden. Wir entwickeln dabei diese Theorie, die manchmal auch das Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten genannt wird, aufbauend auf überraschenden Analogien zur enumerativen Kombinatorik. Während in der enumerativen Kombinatorik Folgen von Objekten mit gemeinsamen Eigenschaften durch „erzeugende Funktionen“ zusammengefasst werden, untersucht man in der Integralgeometrie Mengen geometrischer Objekte mit gemeinsamen Eigenschaften, die durch „invariante Maße“ zusammengefasst werden.

Das Hauptziel dieser Vorlesung ist es die auf Hadwiger, McMullen, Santaló und andere zurückgehende Theorie der inneren Volumina zu vermitteln, inklusive eines vollständigen und elementaren Beweises des berühmten Charakterisierungssatzes von Hadwiger invarianter Bewertungen im Euklidischen $n$-dimensionalen Raum. Im abschließenden Kapitel werden wir die Euler-Charakteristik von einem integralgeometrischen Standpunkt einführen und den Fundamentalsatz der (Euklidischen) Integralgeometrie, die *Kinematische Hauptformel*, beweisen.

Der Stoff der Vorlesung wird auf einem elementaren Level präsentiert und erfordert daher nicht mehr Vorwissen als die Mathematik aus den ersten beiden Studienjahren. Die Literatur zur Integralgeometrie ist recht umfangreich. Insbesondere gibt es eine Reihe sehr guter Bücher zu diesem Themenkreis (siehe nächste Seite), von denen aber viele deutlich über den Stoffumfang dieser kurzen Vorlesung hinausgehen. Wir empfehlen daher vor allem das Buch ”Introduction to Geometric Probability” (auf dem auch die Vorlesung aufgebaut ist) von Daniel Klain und Gian-Carlo Rota.

# Inhaltsverzeichnis



# Literatur


[1] A. Bernig, *Algebraic integral geometry*, Global Differential Geometry (Bär, Lohkamp, Schwarz, eds.), Springer, 2012. http://arxiv.org/abs/1004.3145

[2] J.H.G. Fu, *Algebraic integral geometry*, http://arxiv.org/abs/1103.6256

[3] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, 1957.

[4] D.A. Klain und G.C. Rota, *Introduction to geometric probability*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[5] L.A. Santaló, *Integral geometry and geometric probability*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.

[6] R. Schneider und W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Springer, Berlin, 2008.

# 1 Buffons Nadelproblem

Wir beginnen mit dem vielleicht bekanntesten Problem der geometrischen Wahrscheinlichkeiten, dem Buffonschen Nadelproblem. Die Lösung dieser fast 300 Jahre alten Frage durch die Charakterisierung von additiven Mengenfunktionalen dient dazu das Studium von Bewertungen auf Verbänden zu motivieren, das Thema von Kapitel 2. Variationen und Verallgemeinerungen des Buffonschen Nadelproblems werden in Kapitel 8 und 9 präsentiert.

## 1.1 Das klassische Problem

Wir zeichnen parallele Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Abstand $d > 0$ voneinander und werfen eine Nadel der Länge $0 < L < d$ zufällig auf die Ebene. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Geraden berührt?

Zur Lösung dieses Problems sei $X_1$ die Zufallsvariable, die die Zahl der Schnitte einer zufällig geworfenen Nadel der Länge $L_1$ mit den parallelen Geraden zählt. Ist die Länge $L_1$ der Nadel nicht durch $d$ beschränkt, so kann $X_1$ verschiedene natürliche Zahlen als Werte annehmen. Ist jedoch $L_1 < d$, so kann $X_1$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Bezeichnet $p_n$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel genau $n$ der Geraden trifft, so ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(X_1)$ von $X_1$ gegeben durch

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{n \geq 0} n p_n.$$

Ist daher $L_1 < d$, so erhalten wir

$$\mathbb{E}(X_1) = 0\, p_0 + 1\, p_1 = p_1$$

und $p_1$ ist genau die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Es reicht also den Erwartungswert $\mathbb{E}(X_1)$ zu bestimmen.

Es sei $X_2$ eine zu $X_1$ identisch verteilte Zufallsvariable, die die Anzahl der Schnitte einer zweiten zufällig geworfenen Nadel der Länge $L_2$ mit den Geraden zählt. Offenbar sind die Verteilungen von $X_1$ und $X_2$ (und damit ihre Erwartungswerte) invariant unter Translationen und Rotationen der Familie paralleler Geraden im $\mathbb{R}^2$. Stellen wir uns nun vor die beiden geworfenen Nadeln sind starr an einem ihrer Endpunkte verbunden (sie können dabei eine gerade Linie bilden oder einen Winkel einschließen) und werden so gleichzeitig auf die Ebene geworfen. Dann sind die Zufallsvariablen $X_1$ und $X_2$ zwar nicht mehr unabhängig, aufgrund der Invarianzeigenschaften ihrer Verteilungen ist jedoch die Zufallsvariable, welche die Schnitte der zusammengeschweißten Nadeln zählt, wie $X_1 + X_2$ verteilt und besitzt daher als Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2). \tag{1.1}$$

Die selbe Argumentation kann für die Zufallsvariable $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, welche die Schnitte von $k$ zusammengeschweißten Nadeln mit den Geraden zählt, angewendet werden. Diese Nadeln können dabei eine polygonale Linie beliebiger Form bilden.

Da $\mathbb{E}(X_1)$ offenbar nur von der Länge $L_1$ abhängt, können wir den Erwartungswert von $X_1$ in der Form $\mathbb{E}(X_1) = f(L_1)$, mit einer geeigneten Funktion $f$, schreiben. Bei zwei zusammengeschweißten Nadeln, die eine gerade Linie bilden, ergibt sich $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = f(L_1 + L_2)$, womit wir aus (1.1) schließen können, dass

$$f(L_1 + L_2) = f(L_1) + f(L_2).$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt also die Cauchysche Funktionalgleichung, womit die Einschränkung von $f$ auf $\mathbb{Q}$ linear ist. Da aber $f$ offenbar eine monoton steigende Funktion in $L$ ist, folgt für alle $L \in \mathbb{R}$,

$$f(L) = rL,$$

wobei $r$ eine noch zu bestimmende Konstante ist.

Ist $C$ ein starrer Draht der Länge $L$, der zufällig auf $\mathbb{R}^2$ geworfen wird und zählt die Zufallsvariable $Y$ die Schnitte von $C$ mit den Geraden, dann können wir $C$ durch polygonale Drähte approximieren, sodass $Y$ in etwa wie $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ verteilt ist. Übergang zum Grenzwert ergibt

$$\mathbb{E}(Y) = rL. \tag{1.2}$$

Dies erlaubt uns den Wert der Konstante $r$ zu bestimmen, indem wir einen Draht geeigneter Form wählen: Sei $C$ ein kreisrunder Draht vom Durchmesser $d$. Offensichtlich ist $\mathbb{E}(Y) = 2$ und $L = \pi d$. Daher folgt aus (1.2), dass

$$2 = r\pi d \qquad \text{bzw.} \qquad r = \frac{2}{\pi d}.$$

Damit haben wir für eine Nadel der Länge $L < d$,

$$\mathbb{E}(X_1) = p_1 = \frac{2L}{\pi d}.$$

Ideen von Crofton und Sylvester folgend, wollen wir die Argumente, die uns zu diesem Ergebnis geführt haben, nun dazu verwenden uns Problemen im Zentrum der Integralgeometrie zuzuwenden.

### 1.2 Der Raum der Geraden

Eine Teilmenge $K$ der Ebene heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in K$ die gesamte Strecke von $x$ nach $y$ ganz in $K$ enthalten ist. Wir nennen eine geschlossene Kurve $C$ in der Ebene konvex, wenn $C$ eine konvexe Teilmenge einschließt.

Es seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakte, konvexe Teilmengen mit $K_1 \subseteq K_2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Punkt aus $K_2$ zu $K_1$ gehört, ist offenbar gegeben durch

$$\frac{\text{Fläche}(K_1)}{\text{Fläche}(K_2)}. \tag{1.3}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Gerade im $\mathbb{R}^2$, die die Menge $K_2$ schneidet, auch $K_1$ schneidet?

Um diese Frage zu beantworten, bezeichne $\mathrm{AGr}_{1,2}$ die Menge aller (affinen) Geraden im $\mathbb{R}^2$ und $Z_1$ die Zufallsvariable, die die Schnitte einer zufälligen Geraden mit einem Segment der Länge $L_1$ zählt. Schreiben wir $\lambda_1^2$ für das (bis auf Normierung eindeutige) bewegungsinvariante Maß auf $\mathrm{AGr}_{1,2}$, so hängt das Integral

$$\int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} Z_1 \, d\lambda_1^2$$

offenbar nur von $L_1$ ab. Da $Z_1$ nur die Werte 0 oder 1 annimmt, ist dieses Integral gleich dem Maß der Menge aller Geraden die das gegebene Segment schneiden. Da der Wert des Integrals nur von $L_1$ abhängt, bezeichnen wir diesen Wert mit $f(L_1)$.

Wir können nun die Argumentation zur Lösung von Buffons Nadelproblem wiederholen: Die Zahl der Schnitte einer zufällig gewählten Gerade mit einer festen polygonalen Linie bestehend aus Abschnitten der Länge $L_1, L_2, \ldots$ ist

$$\int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} (Z_1 + Z_2 + \cdots) \, d\lambda_1^2 = f(L_1 + L_2 + \cdots).$$

Aufgrund der Linearität von Integralen stimmt dies aber überein mit

$$\int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} Z_1 \, d\lambda_1^2 + \int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} Z_2 \, d\lambda_1^2 + \cdots = f(L_1) + f(L_2) + \cdots$$

und wir schließen daraus wieder die Existenz einer Konstante $r$, sodass

$$f(L) = rL.$$

Ist $C$ eine konvexe Kurve in der Ebene der Länge $L$ und bezeichnet $Z_C$ die Zufallsvariable, die die Schnitte von $C$ mit einer zufälligen Geraden zählt, dann erhalten wir (wieder durch Approximation)

$$\int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} Z_C \, d\lambda_1^2 = rL.$$

Sind nun $K_1$ und $K_2$ kompakte konvexe Mengen in der Ebene mit nicht-leerem Inneren mit Randkurven $C_1 = \partial K_1$ und $C_2 = \partial K_2$ der Längen $L_1$ und $L_2$, so folgt

$$\int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} Z_{C_i} \, \lambda_1^2 = rL_i, \qquad i = 1, 2.$$

Da die Mengen $K_i$ konvex sind, schneidet eine Gerade $C_i$ entweder zweimal oder gar nicht (dabei klammern wir die Fälle von Tangenten aus, da man zeigen kann, dass diese Maß Null haben). Die Zufallsvariablen $Z_{C_i}$ nehmen daher nur die Werte 2 und 0 an. Bezeichnet $D_i$ die Menge der Geraden im $\mathbb{R}^2$, welche $K_i$ schneiden, dann haben wir also

$$\int_{\mathrm{AGr}_{1,2}} Z_{C_i} \, d\lambda_1^2 = 2\lambda_1^2(D_i).$$

Die Antwort auf die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällige Gerade die konvexe Menge $K_1$ schneidet, wenn $K_1 \subseteq K_2$ und wir schon wissen, dass die Gerade $K_2$ schneidet, ist damit

$$\frac{\lambda_1^2(D_1)}{\lambda_1^2(D_2)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\text{Umfang}(K_1)}{\text{Umfang}(K_2)}. \tag{1.4}$$

Man beachte, dass der Wert der Konstante $r$ irrelevant für die Berechnung dieser bedingten Wahrscheinlichkeit ist.

Die Formeln (1.3) und (1.4) decken eine bemerkenswerte Analogie auf: Das Ersetzen des Wortes „Punkt“ durch das Wort „Gerade“ in den betrachteten Fragestellungen entspricht dem Ersetzen des Funktionals „Fläche“ durch das Funktional „Umfang“ in den jeweiligen Antworten. Wir werden in späteren Kapiteln noch weitreichenden Verallgemeinerungen dieser Analogie begegnen.

# 2 Bewertungen und Integrale

In Kapitel 1 haben wir Buffons Nadelproblem über ein auf einer speziellen Klasse von Mengen (nämlich, polygonalen Kurven) definiertes Mengenfunktional, welches eine gewisse Additivität besitzt, ausgedrückt. Wir lösten das Problem dann, indem wir diese additiven Funktionale charakterisierten. Dabei nutzten wir die Tatsache aus, dass das Funktional monoton und invariant (in Bezug auf gewisse Bewegungen der Mengen in der Ebene) ist. In diesem Kapitel beginnen wir eine systematische Untersuchung „additiver Mengenfunktionale", die auf einem Verband von Mengen definiert sind. Die abstrakten Konzepte die wir in diesem Kapitel entwickeln, werden dann in den folgenden Kapiteln auf eine Reihe von konkreten Verbänden spezialisiert, was dann zu ähnlich eleganten Lösungen von Verallgemeinerungen und Varianten von Buffons ursprünglichem Problem führt.

## 2.1 Bewertungen

Für die Definition der Klasse der in der Integralgeometrie zentralen Mengenfunktionale, der Bewertungen, benötigen wir zunächst die folgende:

**Definition.** Eine *Halbordnung* $\leq$ auf einer Menge $L$ ist eine Relation, die folgende Eigenschaften für alle $x, y, z \in L$ erfüllt:

(i) Reflexivität: $x \leq x$.

(ii) Antisymmetrie: Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, dann folgt $x = y$.

(iii) Transitivität: Ist $x \leq y$ und $y \leq z$, dann folgt $x \leq z$.

Eine Menge $L$ versehen mit einer Halbordnung wird *Verband* genannt, wenn es zu jedem Paar $x, y \in L$ eine größte untere Schranke (den Durchschnitt) $x \wedge y \in L$ und eine kleinste obere Schranke (die Vereinigung) $x \vee y \in L$ gibt. Ein Verband $L$ heißt *distributiv*, wenn für alle $x, y, z \in L$ gilt:

(i) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(ii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Ein besonders wichtiges Beispiel eines distributiven Verbandes ist eine gegenüber endlichen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossene Familie von Teilmengen $L$ einer festen Grundmenge $S$. Eine derartige Familie, versehen mit der durch die Inklusionsrelation der Teilmengen gegebenen Halbordnung, erfüllt offenbar die Eigenschaften eines distributiven Verbandes.

**Definition.** Eine *Bewertung* auf einem Verband $L$ von Teilmengen einer Menge $S$ ist eine Funktion $\mu : L \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \tag{2.1}$$

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{2.2}$$

Durch Iteration der Identität (2.1) erhalten wir das

**Inklusions-Exklusionsprinzip.** Ist $\mu$ eine Bewertung auf einem Verband $L$ von Teilmengen einer Menge $S$, so gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_i \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \quad (2.3)$$

für alle $A_1, \ldots, A_n \in L$.

*Beweis*: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $n$. ■

Ist $A$ eine beliebige Teilmenge von $S$, so ist die *Indikatorfunktion* $I_A$ von $A$ die Funktion auf $S$ gegeben durch

$$I_A(s) = \begin{cases} 1 & s \in A, \\ 0 & s \notin A. \end{cases}$$

**Definition.** Ist $f : S \to \mathbb{R}$ eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i} \quad (2.4)$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in L$, so nennen wir $f$ eine *$L$-einfache Funktion*.

Indikatorfunktionen haben die folgenden Eigenschaften:

$$I_{A \cap B} = I_A I_B, \quad (2.5)$$

$$I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B = 1 - (1 - I_A)(1 - I_B). \quad (2.6)$$

Es folgt, dass die Menge aller $L$-einfachen Funktionen versehen mit punktweiser Addition und Multiplikation einen Ring bildet.

Durch Iteration der Identitäten (2.5) und (2.6) erhalten wir das Inklusions-Exklusionsprinzip für Indikatorfunktionen:

$$\begin{aligned} I_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} &= \sum_i I_{A_i} - \sum_{i<j} I_{A_i \cap A_j} + \sum_{i<j<k} I_{Ai \cap A_j \cap A_k} + \cdots \\ &= 1 - (1 - I_{A_1})(1 - I_{A_2}) \cdots (1 - I_{A_n}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Definition.** Eine Teilmenge $G$ eines Verbandes $L$, die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, nennen wir *erzeugende Menge* von $L$, wenn jedes Element aus $L$ als Vereinigung von endlich vielen Elementen aus $G$ geschrieben werden kann.

Anwendung des Inklusions-Exklusionsprinzips für Indikatorfunktionen liefert

**Proposition 2.1** *Ist $G$ erzeugende Menge des Verbandes $L$, so kann jede $L$-einfache Funktion als eine endliche Linearkombination*

$$f = \sum_{i=1}^{r} \beta_i I_{B_i} \quad (2.8)$$

*mit $B_i \in G$ geschrieben werden.*

**Definition.** Es sei $L$ ein Verband und $G$ eine erzeugende Menge von $L$. Wir nennen eine Funktion $\nu : G \to \mathbb{R}$ eine *Bewertung auf* $G$, wenn $\nu$ die Eigenschaften (2.1) und (2.2) für alle Mengen $A, B \in G$ mit $A \cup B \in G$ erfüllt.

Da $G$ nicht unter Vereinigungen abgeschlossen sein muss, macht Identität (2.1) nicht mehr für alle Paare $A, B \in G$ Sinn. Daher gibt es auch keinen Grund anzunehmen, dass die Identität (2.3) für Bewertungen $\nu$ auf $G$ und $n > 2$ gelten sollte. Da aber jedes Element $B \in L$ in der Form $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ mit $B_1, \ldots, B_n \in G$ dargestellt werden kann, können wir versuchen $\nu$ durch

$$\nu(B) = \sum_i v(B_i) - \sum_{i<j} v(B_i \cap B_j) + \cdots, \tag{2.9}$$

zu einer Bewertung auf ganz $L$ fortzusetzen. Es bleibt zu zeigen, dass $\nu(B)$ nicht von der Darstellung von $B$ als Vereinigung von Elementen aus $G$ abhängt und damit wohldefiniert ist.

**Definition.** Es sei $L$ ein Verband, $G$ eine erzeugende Menge von $L$ und $\nu$ eine Bewertung auf $G$. Das *Integral* einer $L$-einfachen Funktion $f = \alpha_1 I_{A_1} + \cdots + \alpha_k I_{A_k}$ mit $A_i \in G$ bezüglich $\nu$ ist definiert durch

$$\int f \, d\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(A_i). \tag{2.10}$$

Da eine $L$-einfache Funktion $f$ im Allgemeinen unendlich viele Darstellungen der Form (2.8) mit $A_i$ in $G$ besitzt, bleibt zu zeigen, dass das Integral (2.10) wohldefiniert, also unabhängig von der Darstellung von $f$, ist.

## 2.2 Groemers Integralsatz

Es stellt sich heraus, dass die Existenz der Fortsetzung (2.9) und des Integrals (2.10) äquivalente Eigenschaften der Bewertung $\nu$ sind. Diese nichttriviale Tatsache, ist Inhalt des folgenden Integralsatzes von Groemer:

**Satz 2.2** *Es sei $G$ erzeugende Menge des Verbands $L$ und $\mu$ eine Bewertung auf $G$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *$\mu$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer Bewertung auf $L$.*

(ii) *$\mu$ erfüllt die Inklusions-Exklusionsidentitäten*

$$\mu(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \sum_i \mu(B_i) - \sum_{i<j} \mu(B_i \cap B_j) + \cdots \tag{2.11}$$

*für alle $B_i \in G$ mit $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \in G$ und alle $n \geq 2$.*

(iii) *$\mu$ definiert ein Integral auf dem Vektorraum aller Linearkombinationen von Indikatorfunktionen von Mengen aus $L$.*

*Beweis*: Wir beweisen die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Wenn $\mu$ eindeutig zu einer Bewertung auf ganz $L$ fortgesetzt werden kann, dann folgt (ii) aus Identität (2.3). Daher folgt (ii) aus (i).

Um zu zeigen, dass (iii) durch (ii) impliziert wird, nehmen wir an, dass es nicht leere verschiedene $K_1, \ldots, K_m \in G$ und reelle Zahlen $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m$ ungleich Null gibt, mit

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i I_{K_i} = 0, \qquad \text{während} \qquad \sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i \mu(K_i) \neq 0. \tag{2.12}$$

Wir definieren nun eine (endliche) Familie von Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_p$, bestehend aus allen möglichen Durchschnitten der Mengen $K_i$, d.h. $L_1 = K_1, \ldots, L_m = K_m$, $L_{m+1} = K_1 \cap K_2, L_{m+2} = K_1 \cap K_3$ und so weiter. Da $G$ unter Durchschnitten abgeschlossen ist, gilt $L_i \in G$ für alle $1 \leq i \leq p$. Beachte auch, dass die Familie $L_1, \ldots, L_p$ nach Definition unter Durchschnitten abgeschlossen ist. Angenommen

$$\sum_{i=q}^{p} \alpha_i I_{L_i} = 0, \qquad \text{während} \qquad \sum_{i=q}^{p} \alpha_i \mu(L_i) \neq 0, \tag{2.13}$$

wobei $\alpha_q \neq 0$. Wähle nun eine Instanz dieser Gleichungen, sodass $q$ maximal ist. Aus (2.12) folgt offenbar, dass $q \geq 1$ ist, während (2.13) impliziert, dass $q < p$ ist.

Angenommen es gibt ein $x \in L_q \setminus \bigcup_{j=q+1}^{p} L_j$. Dann folgt aus (2.13), dass

$$\alpha_q = \sum_{i=q}^{p} \alpha_i I_{L_i}(x) = 0,$$

im Widerspruch zu $\alpha_q \neq 0$. Es folgt also

$$L_q \subseteq L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p,$$

womit

$$L_q = L_q \cap (L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p) = (L_q \cap L_{q+1}) \cup \cdots \cup (L_q \cap L_p).$$

Nach Definition der Mengen $L_1, \ldots, L_p$ gibt es zu jedem $i > q$ einen Index $j > q$, sodass $L_q \cap L_i = L_j$. Verwenden wir daher das Inklusions-Exklusionsprinzip (ii), so erhalten wir mit (2.13)

$$0 \neq \sum_{i=q}^{p} \alpha_i \mu(L_i) = \alpha_q \mu \left( \bigcup_{i=q+1}^{p} (L_q \cap L_i) \right) + \sum_{i=q+1}^{p} \alpha_i \mu(L_i) = \sum_{i=q+1}^{p} \beta_i \mu(L_i), \tag{2.14}$$

wobei die $\beta_i$ durch Zusammenfassen der Ausdrücke, die $\mu(L_i)$ enthalten, bestimmt sind. Wenden wir nun dasselbe Inklusions-Exklusionsverfahren auf die Indikatorfunktionen der $L_i$ an, so erhalten wir wieder mit (2.13)

$$0 = \sum_{i=q}^{p} \alpha_i I_{L_i} = \alpha_q I_{\bigcup_{i=q+1}^{p} (L_q \cap L_i)} + \sum_{i=q+1}^{p} \alpha_i I_{L_i} = \sum_{i=q+1}^{p} \beta_i I_{L_i}. \tag{2.15}$$

Zusammen widersprechen (2.14) und (2.15) aber nun der Maximalität von $q$, woraus die Implikation von (iii) durch (ii) folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass (i) aus (iii) folgt. Definiert die Bewertung $\mu$ ein Integral auf dem Vektorraum der $L$-einfachen Funktionen, so setzen wir für $A \in L$,

$$\mu(A) = \int I_A \, d\mu.$$

Aus der Linearität des Integrals und Identität (2.6) folgt dann auf einfache Weise, dass diese Fortsetzung von $\mu$ eine Bewertung auf $L$ ist. ■

Jedes lineare Funktional $T$ auf dem Vektorraum der $L$-einfachen Funktionen bestimmt eine Bewertung $\mu$ durch

$$\mu(A) = T(I_A), \qquad A \in L.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass für jede $L$-einfache Funktion $f$ dann

$$T(f) = \int f \, d\mu.$$

Es besteht also ein bijektiver Zusammenhang zwischen linearen Funktionalen auf $L$-einfachen Funktionen und Bewertungen.

**Definition.** Sei $L$ ein distributiver Verband von Teilmengen einer Grundmenge $S$. Die von $L$ erzeugte *relative Boolesche Algebra* $B(L)$ ist die kleinste Familie von Teilmengen von $S$, die $L$ enthält und unter endlichen Vereinigungen, endlichen Durchschnitten und relativen Komplementen abgeschlossen ist.

Sind $A, B \in L$, dann gilt

$$I_{A \setminus B} = I_{A \setminus (A \cap B)} = I_A - I_A I_B. \tag{2.16}$$

Es sei $\mathcal{I}(L)$ die durch endliche Summen, Produkte und Differenzen von Indikatorfunktionen von Mengen aus $L$ erzeugte Algebra der $L$-einfachen Funktionen. Es folgt aus (2.5), (2.6) und (2.16), dass für alle $C \in B(L)$ auch $I_C \in \mathcal{I}(L)$. Weiters gilt

**Korollar 2.3** *Jede auf einem distributiven Verband $L$ definierte Bewertung $\mu$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung auf die von $L$ erzeugte relative Boolesche Algebra $B(L)$.*

*Beweis*: Nach Satz 2.2 und (2.16) definiert $\mu$ ein Integral auf der Algebra $\mathcal{I}(L)$ der $L$-einfachen Funktionen. Für $C \in B(L)$ definiere daher

$$\mu(C) = \int I_C d\mu.$$

Die Linearität des Integrals und (2.6) implizieren, dass diese Fortsetzung von $\mu$ eine Bewertung auf $B(L)$ ist. ■

# 3 Ein diskreter Verband

Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen kombinatorische Eigenschaften des Verbands der Teilmengen einer endlichen Menge. Diese Eigenschaften übertragen sich in analoger Form auf den Verband von Parallelotopen (Kapitel 4), von Teilräumen (Kapitel 6) und von polykonvexen Mengen (Kapitel 5, 7-10). Das Hauptresultat dieses Kapitels ist die Charakterisierung aller Bewertungen, die invariant unter der Permutationsgruppe sind.

### 3.1 Teilmengen einer endlichen Menge

Es sei im Folgenden $S$ eine nichtleere Menge mit $n$ Elementen und es bezeichne $P(S)$ die Potenzmenge von $S$. Wir versehen $P(S)$ mit der Halbordnung, die durch die Inklusionsrelation induziert wird. Damit wird $P(S)$ zu einer (endlichen) Booleschen Algebra, in der die Vereinigung und der Durchschnitt von Mengen mit der kleinsten oberen Schranke und der größten unteren Schranke zusammenfallen.

**Definition.**

- Eine *Kette* $K$ in $P(S)$ ist eine total geordnete Teilmenge von $P(S)$, d.h. für alle Paare $x, y \in K$ gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$.
- Eine *Antikette* in $P(S)$ ist eine Teilmenge $A \subseteq P(S)$, sodass für Paare $x, y \in A$ weder $x < y$ noch $y < x$ gilt.
- Eine *Fahne* $F$ in $P(S)$ ist eine maximale Kette, d.h. eine Kette für die, wenn $G \supseteq F$ und $G$ eine Kette ist, bereits $G = F$ folgt.

Während sich die Definitionen von Kette, Antikette und Fahne auf allgemeine Halbordnungen direkt übertragen lassen, sind folgende Begriffe von speziellerer Natur:

**Definition.** Der *Rang* $r(x)$ einer Menge $x \in P(S)$ ist die Anzahl der Elemente von $x$. Die Antikette aller Elemente von $P(S)$ vom Rang $k$ bezeichnen wir mit $P_k(S)$.

**Proposition 3.1** *Die Anzahl der Elemente von $P_k(S)$ ist gegeben durch*

$$|P_k(S)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Beweis*: Jede Fahne $F$ in $P(S)$ ist offenbar von der Form

$$F = \{\{s_1\}, \{s_1, s_2\}, \ldots, \{s_1, \ldots, s_n\}\} \tag{3.1}$$

und kann daher in natürlicher Weise mit einer linearen Ordnung $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ der Elemente von $S$ identifiziert werden. Es gibt daher $n!$ Fahnen in $P(S)$. Eine Fahne $F$ der Form (3.1) enthält genau dann ein Element $x \in P_k(S)$, wenn $x = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$. Damit gibt es $k!(n-k)!$ Fahnen, die ein $x \in P_k(S)$ enthalten. Die Behauptung folgt nun unmittelbar. ■

Die Beweisidee von Proposition 3.1 können wir auch verwenden, um ein stärkeres Resultat zu zeigen. Dabei bezeichne $|A|$ wieder die Anzahl der Elemente einer Menge $A$ und $\langle n/2 \rangle$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $n/2$.

**Satz 3.2** (**Satz von Sperner**) *Ist $A$ eine Antikette in $P(S)$, dann gilt*

$$|A| \leq \binom{n}{\langle n/2 \rangle}$$

*mit Gleichheit für $A = P_{\langle n/2 \rangle}(S)$.*

*Beweis*: Für eine Antikette $A \subseteq P(S)$ bezeichne $A_k$ die Menge aller Elemente aus $A$ vom Rang $k$. Wir zeigen zunächst die Lubell-Yamamoto-Meshalkin (L.Y.M.) Ungleichung:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|A_k|}{\binom{n}{k}} \leq 1. \tag{3.2}$$

Zum Beweis von (3.2) beachte, dass jede Fahne in $P(S)$ die Antikette $A$ in höchstens einem Element trifft. Daher ist die Zahl $p$ der Fahnen, die $A$ treffen, gegeben durch

$$p = \sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!|A_k|.$$

Da es $n!$ Fahnen in $P(S)$ gibt, ist $p \leq n!$. Division durch $n!$ liefert (3.2). Da aber

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\langle n/2 \rangle}$$

für alle $0 \leq k \leq n$, folgt aus der L.Y.M-Ungleichung (3.2) nun

$$\frac{|A|}{\binom{n}{\langle n/2 \rangle}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{|A_k|}{\binom{n}{\langle n/2 \rangle}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|A_k|}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

■

**Definition.** Es sei $1 \leq r \leq n+1$ eine natürliche Zahl. Wir nennen eine Teilmenge $F \subseteq P(S)$ eine $r$-*Familie*, wenn Ketten in $F$ nicht mehr als $r$ Elemente enthalten.

**Beispiel.**

Eine Antikette in $P(S)$ ist eine 1-Familie.

Für eine $r$-Familie $F$ in $P(S)$ bezeichne $F_k = F \cap P_k(S)$ die Menge der Elemente vom Rang $k$ in $F$. Da jede Fahne in $P(S)$ die $r$-Familie $F$ in höchstens $r$ Elementen schneidet, haben wir

$$\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!|F_k| \leq n! \cdot r.$$

Daraus folgt sofort die folgende Verallgemeinerung der L.Y.M.-Ungleichung (3.2):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|F_k|}{\binom{n}{k}} \leq r. \tag{3.3}$$

Mit Hilfe von Ungleichung (3.3) können wir wiederum den Satz von Sperner auf $r$-Familien verallgemeinern:

**Satz 3.3** *Ist $F$ eine $r$-Familie in $P(S)$, dann gilt*

$$|F| \leq \binom{n}{\langle \frac{n+1}{2} \rangle} + \binom{n}{\langle \frac{n+2}{2} \rangle} + \cdots + \binom{n}{\langle \frac{n+r}{2} \rangle}.$$

Um Satz 3.3 zu beweisen, machen wir von folgendem Lemma Gebrauch.

**Lemma 3.4** *Für $0 \leq i \leq n$ seien $c_i \geq x_i \geq 0$ und $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_n > 0$. Ist*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k} \leq r,$$

*dann gilt*

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n \leq c_0 + c_1 + \cdots + c_{r-1}.$$

*Beweis*: Wir zeigen zunächst, dass aus

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n \geq c_0 + c_1 + \cdots + c_{r-1}, \tag{3.4}$$

die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k} \geq r. \tag{3.5}$$

folgt. Dazu seien $x_0, \ldots, x_n \geq 0$ unter der Nebenbedingung (3.4) so gewählt, dass die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k} \tag{3.6}$$

minimal wird. Angenommen dieses Minimum ist kleiner als $r$. Dann ist $x_k < c_k$ für einige $k \leq r-1$. Es sei $i$ der kleinste Index, so dass $x_i < c_i$. Ist $i > 0$, dann gilt also $x_k/c_k = 1$ für alle $0 \leq k < i$. Ungleichung (3.4) impliziert ferner die Existenz eines Index $m \geq r$, sodass $x_m > 0$ ist. Es sei $j$ der größte dieser Indizes, sodass $x_k = 0$ für alle $k > j$ (wenn $j < n$). Beachte insbesondere, dass $j > i$ gilt.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- $c_i = c_j$

  Da $c_i \geq c_{i+1} \geq \cdots \geq c_j$, folgt $c_i = c_{i+1} = \cdots = c_j$. Da $r-1 < j$, gilt dann

  $$\begin{aligned} c_0 + \cdots + c_{i-1} + x_i + \cdots + x_j &= x_0 + \cdots + x_n \geq c_0 + \cdots + c_{r-1} \\ &= c_0 + \cdots + c_{i-1} + (r-i)c_i, \end{aligned}$$

  und damit

  $$x_i + \cdots + x_j \geq (r-i)c_i.$$

  Daraus folgt aber

  $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k} &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{x_k}{c_k} + \sum_{k=i}^{j} \frac{x_k}{c_k} = i + \sum_{k=i}^{j} \frac{x_k}{c_k} = i + \frac{1}{c_i}(x_i + \cdots + x_j) \\ &\geq i + (r-i)\frac{c_i}{c_i} = r \end{aligned}$$

  im Widerspruch zur Annahme, dass das Minimum der Summe (3.6) kleiner als $r$ ist. Damit folgt Ungleichung (3.5).

- $c_i > c_j$
  Wir definieren Zahlen $y_k$, $1 \le k \le n$, wie folgt: Ist $x_i + x_j \le c_i$, dann setzen wir $y_i = x_i + x_j$ und $y_j = 0$. Andernfalls, sei $y_i = c_i$ und $y_j = x_j - (c_i - x_i)$. In beiden Fällen seien alle anderen $y_k = x_k$. Da $c_i > c_j$, folgt (in beiden Fällen)
  $$\frac{y_i}{c_i} + \frac{y_j}{c_j} < \frac{x_i}{c_i} + \frac{x_j}{c_j},$$
  sodass
  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{c_k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k},$$
  im Widerspruch zur Annahme, dass $x_0, \ldots, x_n$ die Summe (3.6) minimieren. Damit folgt wieder (3.5).

Da nun (3.4) die Ungleichung (3.5) impliziert, folgt aus

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k} < r, \tag{3.7}$$

offenbar

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n < c_0 + c_1 + \cdots + c_{r-1}.$$

Gilt Gleichheit in (3.7), so setzen wir $\tilde{x}_i = x_i$, wenn $x_i = 0$, und $\tilde{x}_i := x_i - \varepsilon$, wenn $x_i > 0$, wobei $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, dass nach wie vor $\tilde{x}_i > 0$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\tilde{x}_k}{c_k} < r,$$

und damit

$$\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 + \cdots + \tilde{x}_n < c_0 + c_1 + \cdots + c_{r-1}.$$

Lassen wir nun $\varepsilon \to 0$, so folgt auch in diesem Fall die Behauptung. ■

*Beweis von Satz 3.3*: Es seien die Binomialkoeffizienten

$$c_0 = \binom{n}{\langle \frac{n+1}{2} \rangle}, \quad c_1 = \binom{n}{\langle \frac{n+2}{2} \rangle}, \quad \ldots, \quad c_n = \binom{n}{0}$$

so geordnet, dass $c_0 \ge c_1 \ge \cdots \ge c_n > 0$. Wir setzen weiters die Zähler $|F_k|$ in (3.3) gleich $x_0, \ldots, x_n$, wobei die $x_k$ so nummeriert werden, dass der Zähler $x_k$ in (3.3) gerade $c_k$ als Nenner hat. Die Ungleichung (3.3) wird dann zu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{c_k} \le r.$$

Da auch $c_i \ge x_i \ge 0$ für $1 \le i \le n$ gilt, folgt aus Lemma 3.4, dass

$$x_0 + x_1 + ... + x_n \le c_0 + c_1 + ... + c_{r-1}$$

bzw.

$$|F| = \sum_{k=0}^{n} |F_k| \le \binom{n}{\langle \frac{n+1}{2} \rangle} + \binom{n}{\langle \frac{n+2}{2} \rangle} + ... + \binom{n}{\langle \frac{n+r}{2} \rangle}.$$

■

Wir wollen als nächstes die Theorie der Binomialkoeffizienten und Antiketten zu einer Theorie der Multinomialkoeffizienten und spezieller Familien geordneter Partitionen, sogenannter *s-Systeme*, verallgemeinern.

**Definition.** Eine Abbildung $\delta : \{1, \dots, r\} \to P(S)$ heißt *r-Zerlegung* von $S$, wenn

(i) $\delta(i) \cap \delta(j) = \emptyset$ für $i \neq j$;

(ii) $\delta(1) \cup \cdots \cup \delta(r) = S$.

Es bezeichne $\mathrm{Dec}(S, r)$ die Menge aller $r$-Zerlegungen von $S$.

**Bemerkung.** Für jedes $\delta \in \mathrm{Dec}(S, r)$ ist offenbar

$$|\delta(1)| + \cdots + |\delta(r)| = n.$$

**Definition.** Für $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}$ mit $a_1 + \cdots + a_r = n$ bezeichne $P_{a_1,\dots,a_r}(S)$ die Menge aller $r$-Zerlegungen $\delta$, sodass $|\delta(i)| = a_i$ für $i = 1, \dots, r$.

**Bemerkungen.**

(a) $P_{a_1,\dots,a_r}(S)$ ist die Menge aller (geordneten) Partitionen von $S$ in disjunkte Teilmengen der Größen $a_1, \dots, a_r$.

(b) Die Menge $\mathrm{Dec}(S, r)$ kann offenbar als endliche disjunkte Vereinigung

$$\mathrm{Dec}(S, r) = \biguplus_{a_1+\cdots+a_r=n} P_{a_1,\dots,a_r}(S)$$

dargestellt werden.

**Definition.** Ein *s-System* der Ordnung $r$ (oder ein $s$-System in $\mathrm{Dec}(S, r)$) ist eine Teilmenge $\sigma \subseteq \mathrm{Dec}(S, r)$, sodass für jedes $1 \leq i \leq r$ die Mengen $\{\delta(i) : \delta \in \sigma\}$ Antiketten in $P(S)$ sind.

**Beispiele.**

(a) Die Mengen $P_{a_1,\dots,a_r}(S)$ sind $s$-Systeme der Ordnung $r$.

*Beweis*: Sind $\delta, \zeta \in P_{a_1,\dots,a_r}(S)$, dann ist $|\delta(i)| = |\zeta(i)| = a_i$, sodass entweder $\delta(i) = \zeta(i)$ gilt oder die beiden Mengen unvergleichbar bezüglich der partiellen Ordnung auf $P(S)$ sind. Da dies für alle $1 \leq i \leq r$ gilt, folgt die Behauptung. ■

(b) $s$-Systeme der Ordnung 2

Es sei $A$ eine Antikette in $P(S)$. Für jedes $x \in A$ können wir $S$ als die disjunkte Vereinigung $x \uplus S \backslash x$ darstellen, sodass das Paar $(x, S \backslash x)$ eine 2-Zerlegung in $\mathrm{Dec}(S, 2)$ ist. Da auch die Menge $\{S \backslash x : x \in A\}$ eine Antikette in $P(S)$ ist, ist

$$\sigma = \{(x, S \backslash x) : x \in A\}$$

ein $s$-System der Ordnung 2. Der Begriff des $s$-Systems ist daher also eine Verallgemeinerung des Begriffes der Antikette.

(c) Nach (b) kann speziell die Familie $P_k(S)$ mit dem 2-System $P_{k,n-k}(S)$ über die Bijektion $x \mapsto (x, S \backslash x)$ identifiziert werden.

**Definition.** Eine Fahne $(x_0, \dots, x_n)$ in $P(S)$ heißt *kompatibel* mit $\delta \in P_{a_1,\dots,a_r}(S)$, wenn

$$x_{a_1} = \delta(1) \qquad \text{und} \qquad x_{a_1+\dots+a_i} \setminus x_{a_1+\dots+a_{i-1}} = \delta(i) \text{ für } i \geq 2.$$

Für $A \subseteq P_{a_1,\dots,a_r}$ bezeichne $\mathrm{Flag}(A)$ die Menge aller Fahnen $(x_0, \dots, x_n)$, die mit einem $\delta \in A$ kompatibel sind.

**Proposition 3.5** *Die Anzahl der Elemente von $P_{a_1,\dots,a_r}(S)$ ist gegeben durch*

$$|P_{a_1,\dots,a_r}(S)| = \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_r} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_r!}.$$

*Beweis*: Wir zeigen zunächst, dass es zu jedem $\delta \in P_{a_1,\dots,a_r}(S)$ genau $a_1!a_2!\cdots a_r!$ Fahnen gibt, die mit $\delta$ kompatibel sind: Um eine zu $\delta$ kompatible Fahne auszuwählen, muss zunächst eine Permutation der $a_1$ Elemente von $\delta(1)$ gewählt werden, von denen es $a_1!$ gibt. Danach muss eine Permutation der $a_2$ Elemente von $\delta(2)$ gewählt werden, von denen es $a_2!$ gibt, und so weiter bis zu $\delta(r)$.

Da jede der $n!$ Fahnen mit genau einer $r$-Zerlegung in $P_{a_1,\dots,a_r}(S)$ kompatibel ist, folgt die Behauptung. ■

Um eine multinomiale Verallgemeinerung des Satzes von Sperner zu beweisen, benötigen wir zunächst eine entsprechende Version der L.Y.M. Ungleichung.

**Satz 3.6 (Die multinomiale L.Y.M. Ungleichung)** *Es sei $\sigma \subseteq \mathrm{Dec}(S, r)$ ein s-System und für $a_1 + \dots + a_r = n$ sei $\sigma_{a_1,\dots,a_r} = \sigma \cap P_{a_1,\dots,a_r}(S)$, sodass*

$$\sigma = \biguplus_{a_1+\dots+a_r=n} \sigma_{a_1,\dots,a_r}.$$

*Dann gilt*

$$\sum_{a_1+\dots+a_r=n} \frac{|\sigma_{a_1,\dots,a_r}|}{\binom{n}{a_1,\dots,a_r}} \leq 1. \tag{3.8}$$

*Beweis*: Wir zeigen als erstes, dass jede Fahne in $P(S)$ mit höchstens einer $r$-Zerlegung $\delta \in \sigma$ kompatibel ist: Angenommen eine Fahne $(x_0, \dots, x_n)$ ist mit $\gamma, \delta \in \sigma$ kompatibel. Dann ist $\gamma(1) = x_{a_1}$ und $\delta(1) = x_{b_1}$, wobei $a_1 = |\gamma(1)|$ und $b_1 = |\delta(1)|$. Da $(x_0, \dots, x_n)$ eine Fahne ist, haben wir $x_{a_1} \subseteq x_{b_1}$ oder vice versa. Da $\sigma$ jedoch ein $s$-System ist, gilt entweder $\gamma(1) = \delta(1)$ oder die zwei Mengen sind unvergleichbar. Daher ist $\gamma(1) = \delta(1)$ und $a_1 = b_1$. Im nächsten Schritt haben wir $\gamma(2) = x_{a_1+a_2} \setminus x_{a_1}$ und $\delta(2) = x_{b_1+b_2} \setminus x_{a_1}$ (da $a_1 = b_1$) und ein ähnliches Argument wie zuvor zeigt, dass $\gamma(2) = \delta(2)$ und $a_2 = b_2$. Setzen wir auf diese Art fort, erhalten wir $\gamma(i) = \delta(i)$ für jedes $1 \leq i \leq$ und damit $\gamma = \delta$.

Da für $a_1 + \dots + a_r = n$ die Anzahl der mit $\sigma_{a_1,\dots,a_r}$ kompatiblen Fahnen gegeben ist durch

$$|\mathrm{Flag}(\sigma_{a_1,\dots,a_r})| = a_1! \cdots a_r! |\sigma_{a_1,\dots,a_r}|,$$

folgt damit

$$\sum_{a_1+\dots+a_r=n} |\sigma_{a_1,\dots,a_r}| a_1! \cdots a_r! = \sum_{a_1+\dots+a_r=n} |\mathrm{Flag}(\sigma_{a_1,\dots,a_r})| = |\mathrm{Flag}(\sigma)| \leq n!.$$

■

Die folgende multinomiale Verallgemeinerung von Sperners Satz – der Satz von Meshalkin – liefert eine obere Schranke für die Anzahl der Elemente in einem $s$-System der Ordnung $r$:

**Satz 3.7 (Satz von Meshalkin)** *Ist $\sigma$ ein $s$-System in* $\mathrm{Dec}(S,r)$*, dann gilt*

$$|\sigma| \le \binom{n}{\underbrace{\langle n/r\rangle,\ldots,\langle n/r\rangle}_{r-b}\,\underbrace{\langle n/r\rangle+1,\ldots,\langle n/r\rangle+1}_{b}}, \tag{3.9}$$

*wobei $n \equiv b \bmod r$.*

*Beweis*: Es ist nicht schwer zu zeigen (vgl. dazu Kapitel 6), dass für alle natürlichen Zahlen $a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{N}$ mit $a_1+\cdots+a_r = n$ stets

$$\binom{n}{a_1,\ldots,a_r} \le \binom{n}{\underbrace{\langle n/r\rangle,\ldots,\langle n/r\rangle}_{r-b}\,\underbrace{\langle n/r\rangle+1,\ldots,\langle n/r\rangle+1}_{b}}.$$

Bezeichnet $\sigma_{a_1,\ldots,a_r} = \sigma \cap P_{a_1,\ldots,a_r}(S)$, so folgt aus (3.8)

$$\sum_{a_1+\cdots+a_r=n} \frac{|\sigma_{a_1,\ldots,a_r}|}{\binom{n}{\langle n/r\rangle,\ldots,\langle n/r\rangle,\langle n/r\rangle+1,\ldots,\langle n/r\rangle+1}} \le \sum_{a_1+\cdots+a_r=n} \frac{|\sigma_{a_1,\ldots,a_r}|}{\binom{n}{a_1,\ldots,a_r}} \le 1,$$

sodass

$$|\sigma| = \sum_{a_1+\cdots+a_r=n} |\sigma_{a_1,\ldots,a_r}| \le \binom{n}{\langle n/r\rangle,\ldots,\langle n/r\rangle,\langle n/r\rangle+1,\ldots,\langle n/r\rangle+1}.$$

■

## 3.2 Bewertungen auf einem Simplizialkomplex

**Definition.** Eine Teilmenge $A$ von $P(S)$ heißt *Simplizialkomplex*, wenn aus $x \in A$ und $y \le x$ auch $y \in A$ folgt. Ein Simplizialkomplex wird zu einer halbgeordneten Menge, wenn er mit der von $P(S)$ induzierten Halbordnung versehen wird. Ein Simplizialkomplex, der genau ein maximales Element hat, wird *Simplex* genannt. Ein Simplex dessen eindeutiges maximales Element eine Menge mit $k$ Elementen ist, wird *$k$-Simplex* genannt.

**Bemerkung.**

(a) Die Menge maximaler Elemente eines Simplizialkomplexes ist eine Antikette.

Da die (mengentheoretische) Vereinigung und der Durchschnitt beliebig vieler Simplizialkomplexe wieder einen Simplizialkomplex bildet, ist die Menge $L(S)$ aller Simplizialkomplexe in $P(S)$ ein distributiver Verband. Im folgenden wollen wir Bewertungen auf $L(S)$ studieren.

**Notation.** Für $x \in P(S)$ bezeichnen wir mit $\overline{x}$ den Simplex dessen maximales Element $x$ ist; dies ist die Menge aller $y \in P(S)$ mit $y \le x$.

**Satz 3.8** *Jede Bewertung $\mu$ auf dem Verband $L(S)$ aller Simplizialkomplexe ist durch ihre Werte $\mu(\overline{x})$, $x \in P(S)$, eindeutig bestimmt. Umgekehrt wird durch die beliebige Vorgabe von Werten $\mu(\overline{x})$, $x \in P(S)$, eine eindeutige Bewertung auf $L(S)$ bestimmt.*

*Beweis*: Nach Korollar 2.3 besitzt jede Bewertung $\mu$ auf $L(S)$ eine eindeutige Fortsetzung zu einer Bewertung $\mu$ auf der von $L(S)$ erzeugten Booleschen Algebra $P(P(S))$ aller Teilmengen von $P(S)$. Eine Bewertung auf $P(P(S))$ ist offenbar durch ihren Wert auf den einelementigen Teilmengen von $P(S)$ bestimmt und umgekehrt wird durch beliebige Zuordnung von Werten $\mu(\{x\})$, $x \in P(S)$, eine eindeutige Bewertung auf $P(P(S))$ bestimmt.

Es sei $x \in P(S)$ vom Rang $k$ und es seien $A_1, \ldots, A_k$ die maximalen Simplizes $A_i \in \overline{x}$ mit $A_i \neq \overline{x}$. (Diese Simplizes werden *Facetten* von $\overline{x}$ genannt.) Dann ist $\overline{x} = \{x\} \uplus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)$ und daher

$$\mu(\{x\}) = \mu(\overline{x}) - \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_k).$$

Durch Anwendung des Inklusions-Exklusionsprinzips kann nun die rechte Seite über Simplizes niedrigeren Ranges berechnet werden, womit Induktion nach dem Rang die Behauptung liefert. ■

**Definition.** Wir nennen eine Bewertung $\mu$ auf $L(S)$ *invariant*, wenn sie invariant unter der Gruppe von Permutationen der Menge $S$ ist, d.h. wenn $\mu(A) = \mu(gA)$ für jeden Simplizialkomplex $A$ und jede Permutation $g$ der Menge $S$ (welche eine Permutation $g$ auf $L(S)$ induziert).

Als unmittelbare Konsequenz aus Satz 3.8 erhalten wir

**Satz 3.9 (Existenz der Euler-Charakteristik)** *Es existiert eine eindeutige invariante Bewertung $\mu_0$ auf $L(S)$, genannt* Euler-Charakteristik, *sodass $\mu_0(\overline{\emptyset}) = 0$ und $\mu_0(\overline{x}) = 1$ für jeden Simplex $\overline{x}$ mit $r(x) > 0$.*

Die klassische alternierende Formel für die Euler-Charakteristik enthält

**Satz 3.10 (Diskrete Euler-Formel)** *Ist $A$ ein Simplizialkomplex und bezeichnet $f_k$ die Anzahl der Elemente („Seiten“) vom Rang $k$, dann gilt*

$$\mu_0(A) = f_1 - f_2 + f_3 - \cdots. \tag{3.10}$$

*Beweis*: Es sei $\mu_0'$ die Bewertung auf $P(P(S))$ bestimmt durch

$$\mu_0'(\overline{\emptyset}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu_0'(\{x\}) = (-1)^{k-1},$$

wenn $r(x) = k$. Dann gilt

$$\mu_0'(\overline{x}) = \sum_{y \leq x} \mu_0'(\{y\}) = \sum_{y \leq x,\, r(y)=1} \mu_0'(\{y\}) + \sum_{y \leq x,\, r(y)=2} \mu_0'(\{y\}) + \cdots + \mu_0'(\{x\}).$$

Da der Simplex $\overline{x}$ genau $\binom{k}{j}$ Elemente vom Rang $j$ enthält, vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1,$$

sodass $\mu_0'(\overline{x}) = \mu_0(\overline{x})$ für alle Simplizes $\overline{x}$ gilt. Es folgt aus Satz 3.9, dass $\mu_0' = \mu_0$ und damit die Behauptung. ■

**Definition.** Für $i > 0$ definieren wir (mit Hilfe von Satz 3.8) eine Bewertung $\mu_i$ auf $L(S)$ durch

$$\mu_i(\overline{x}) = |\overline{x} \cap P_i(S)|.$$

**Bemerkungen.**

(a) Für jeden Simplizialkomplex $A$ ist offenbar $\mu_i(A) = |A \cap P_i(S)|$.

(b) Die diskrete Euler-Formel für einen Simplizialkomplex $A$ wird nun zu

$$\mu_0(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A) + \mu_3(A) - \cdots. \tag{3.11}$$

(c) Wir können die Bewertungen $\mu_k$ über symmetrische Funktionen ausdrücken: Dazu sei $P_1(S) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ und betrachte die symmetrische Funktion

$$e_k(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k},$$

wobei

$$t_i(\overline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } a_i \in \overline{x}, \\ 0 & \text{für } a_i \notin \overline{x}. \end{cases}$$

Da für $x \neq \emptyset$ dann das Produkt $(t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k})(\overline{x}) = 1$, wenn $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \in \overline{x}$ und sonst verschwindet, folgt $e_k(t_1, t_2, \ldots, t_n)(\overline{x}) = \mu_k(\overline{x})$ für jeden Simplex $\overline{x}$ der von $\{\emptyset\}$ verschieden ist.

(d) Für $x \in P(S)$ mit $r(x) = j$ gilt

$$\mu_i(\{x\}) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \tag{3.12}$$

**Satz 3.11 (Der Diskrete Basis Satz)** *Die invarianten Bewertungen $\mu_0, \ldots, \mu_n$ spannen den Vektorraum aller invarianten Bewertungen $\mu$ auf $L(S)$ mit $\mu(\{\emptyset\}) = 0$ auf. Die einzige lineare Relation zwischen ihnen ist gegeben durch (3.11).*

*Beweis*: Es sei $\mu$ eine invariante Bewertung auf $L(S)$ mit $\mu(\{\emptyset\}) = 0$. Setzen wir $\mu$ zu einer Bewertung auf ganz $P(P(S))$ fort, so ist die fortgesetzte Bewertung immer noch invariant. Haben nun $x$ und $y$ denselben Rang in $P(S)$, etwa $r(x) = r(y) = i$, dann existiert eine Permutation $g$ von $S$ mit $gx = y$, womit aber $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\}) = c_i$ für eine geeignete Konstante $c_i$. Es folgt, dass die Bewertung

$$\mu - \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$$

auf allen einelementigen Mengen $\{x\}$, $x \in P(S)$, und daher auf ganz $P(P(S))$ verschwindet. ■

Als Anwendung von Satz 3.11 wollen wir ein diskretes Analogon der kinematischen Formel (deren klassische geometrische Version in Kapitel 10 auftritt) herleiten.

Zur Konstruktion invarianter Bewertungen auf $L(S)$ können wir mit einer beliebigen Bewertung $\mu$ auf $L(S)$, mit $\mu(\{\emptyset\}) = 0$, und einem beliebigen Simplizialkomplex $B$ starten. Für einen Simplizialkomplex $A$ definieren wir nun

$$\mu(A; B) = \frac{1}{n!} \sum_g \mu(A \cap gB),$$

wobei $g$ alle Permutationen der $n$-elementigen Menge $S$ durchläuft. Halten wir $A$ fest, dann ist die Funktion $\mu(A; \cdot)$ eine Bewertung auf $L(S)$, genauer sogar eine invariante Bewertung. Nach Satz 3.11 kann sie daher als Linearkombination der Bewertungen $\mu_i$ mit Koeffizienten $c_i(A)$ (abhängig von $A$) dargestellt werden:

$$\mu(A; B) = \sum_{j=1}^{n} c_j(A) \mu_j(B). \tag{3.13}$$

Halten wir umgekehrt $B$ fest, so ist die Mengenfunktion $\mu(A; B)$ eine Bewertung in der Variable $A$. Damit muss aber jeder Koeffizient $c_j(A)$ eine Bewertung in der Variable $A$ sein. Aus (3.12) folgt, dass die Koeffizienten $c_j(A)$ explizit durch $\mu$ ausgedrückt werden können. Wir wollen dies aber nur für den Fall einer invarianten Bewertung $\mu$ genauer betrachten. In diesem Fall gilt

$$\mu(A; B) = \frac{1}{n!} \sum_g \mu(A \cap gB) = \frac{1}{n!} \sum_g \mu(g^{-1}A \cap B) = \frac{1}{n!} \sum_g \mu(gA \cap B) = \mu(B; A).$$

Da $\mu$ invariant ist, sind zudem die Koeffizienten $c_j(A)$ aus (3.13) nun invariante Bewertungen in der Variable $A$. Damit folgt aus Satz 3.11, dass

$$\mu(A; B) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \mu_i(A) \mu_j(B),$$

wobei, wegen $\mu(A; B) = \mu(B; A)$, offenbar $c_{ij} = c_{ji}$. Wie das folgende Resultat zeigt, sind die meisten der $c_{ij}$ gleich Null. Um dies zu zeigen und die restlichen $c_{ij}$ explizit zu bestimmen, setzen wir die Bewertung $\mu$ auf die von $L(S)$ erzeugte Boolesche Algebra $P(P(S))$ fort und bezeichnen mit $\alpha_i$ den Wert von $\mu$ auf einer 1-elementigen Menge in $P(P(S))$ dessen Element eine $i$-elementige Teilmenge von $S$ ist.

**Satz 3.12 (Diskrete Kinematische Formel)** *Ist $\mu$ eine invariante Bewertung auf $L(S)$, dann gilt*

$$\mu(A; B) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^{-1} \alpha_i \mu_i(A) \mu_i(B)$$

*für alle $A, B \in L(S)$.*

*Beweis*: Es seien $x_i$ und $y_j$ Teilmengen von $S$ mit $i$ bzw. $j$ Elementen und $A = \{x_i\}$, $B = \{y_j\} \in P(P(S))$. Ist $i \neq j$, dann gilt $A \cap gB = \emptyset$ für jede Permutation $g$ der Menge $S$. Ist $i = j$, dann ist $A \cap gB = \emptyset$ wenn $x_i \neq gy_j$. Da es $i!(n-i)!$ Permutationen $g$ von $S$ gibt, sodass $x_i = gy_j$ (wenn $i = j$), haben wir einerseits

$$\mu(A; B) = \frac{1}{n!} \sum_g \mu(A \cap gB) = \frac{i!(n-i)!}{n!} \mu(A) = \binom{n}{i}^{-1} \alpha_i.$$

Da

$$\mu_k(A) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = i, \\ 0 & \text{für } k \neq i, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \mu_l(B) = \begin{cases} 1 & \text{für } l = j, \\ 0 & \text{für } l \neq j, \end{cases}$$

ist andererseits

$$\mu(A; B) = \sum_{k,l=1}^{n} c_{kl} \mu_k(A) \mu_l(B) = c_{ij}$$

und damit

$$c_{ij} = \binom{n}{i}^{-1} \alpha_i$$

für $i = j$ und Null sonst. ■

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall von Satz 3.12 bei dem $\mu = \mu_0$. Aus der diskreten Euler-Formel (3.10) folgt $\mu_0(\{x_i\}) = (-1)^{i+1}$, sodass

$$\frac{1}{n!} \sum_g \mu_0(A \cap gB) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i}^{-1} \mu_i(A) \mu_i(B),$$

für alle $A, B \in L(S)$.

Sind $\overline{x}$ und $\overline{y}$ Simplizes, dann ist entweder $\overline{x} \cap \overline{y}$ ein kleinerer (nicht leerer) Simplex oder $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$, womit

$$\mu_0(\overline{x} \cap \overline{y}) = \begin{cases} 1 & \overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset, \\ 0 & \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset. \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter $k$-Simplex $\overline{x}_k$ nicht leeren Schnitt mit einem festen $l$-Simplex $\overline{y}_l$ hat, kann daher wie folgt berechnet werden:

$$\frac{1}{n!} \sum_g \mu_0(\overline{y}_l \cap g\overline{x}_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{\binom{n}{i}} \mu_i(\overline{y}_l) \mu_i(\overline{x}_k) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i}^{-1} \binom{l}{i} \binom{k}{i}. \quad (3.14)$$

Diese Gleichung führt zu einem Beispiel wie die diskrete kinematische Formel dazu verwendet werden kann, um Identitäten für Binomialkoeffizienten herzuleiten.

**Satz 3.13** *Für alle natürlichen Zahlen* $0 \leq k, l \leq n$ *gilt*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^{-1} \binom{l}{i} \binom{k}{i} = \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-l}{k}. \quad (3.15)$$

*Beweis*: Beachte zunächst, dass für die Simplizes $\overline{x}_k$ und $\overline{y}_l$ genau dann $\overline{x}_k \cap \overline{y}_l = \emptyset$, wenn $y_l \cap x_k = \emptyset$. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällige Permutation $g$ nun $y_l \cap gx_k = \emptyset$ gilt, nummeriere die Elemente von $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ so, dass $x_k = \{s_1, \ldots, s_k\}$. Damit $y_l \cap gx_k = \emptyset$ muss $gs_1 \in S \backslash y_l$ sein, wofür es $n - l$ Möglichkeiten gibt. Es bleiben $n - (l + 1)$ mögliche Werte für $gs_2$ usw., sodass es

$$(n - l)(n - l - 1) \cdots (n - l - k + 1)$$

mögliche Werte für $gs_1, \ldots, gs_k$ gibt. Haben wir diese Werte gewählt, so bleiben $n - k$ Möglichkeiten für $gs_{k+1}$, dann $n - k - 1$ mögliche Werte für $gs_{k+2}$ usw., bis nur noch eine Möglichkeit für $gs_n$ bleibt. Daraus folgt, dass es

$$(n - l) \cdots (n - l - k + 1)(n - k) \cdots 1 = \frac{(n - l)!(n - k)!}{(n - k - l)!}$$

Permutationen $g$ von $S$ gibt, sodass $y_l \cap gx_k = \emptyset$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $y_l \cap gx_k = \emptyset$ für eine zufällige Permutation $g$ gilt, ist damit gegeben durch

$$\frac{1}{n!} \frac{(n - l)!(n - k)!}{(n - k - l)!} = \frac{k!(n - k)!(n - l)!}{n!k!(n - k - l)!} = \binom{n}{k}^{-1} \binom{n - l}{k}.$$

Es folgt nun aus (3.14), dass

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i}^{-1} \binom{l}{i} \binom{k}{i} = 1 - \binom{n}{k}^{-1} \binom{n - l}{k}.$$

Addition des Summanden für $i = 0$ auf beiden Seiten und Multiplikation mit $-1$ liefert schließlich die Behauptung. ■

Wir beschließen unsere Überlegungen zu Simplizialkomplexen mit einer Anwendung der Ergebnisse von Abschnitt 3.1 auf eine Frage von Sperner: Angenommen alle maximalen Elemente von $A \in L(S)$ haben Rang $k$, d.h. jede Seite von $A$ ist in einer $k$-Seite von $A$ enthalten. Für $0 \leq l \leq k$ sei $[A]_l$ die Familie aller $l$-Seiten von $A$. Gibt es eine untere Schranke für die Zahl der $l$-Seiten $|[A]_l|$, wenn die Zahl der $k$-Seiten (maximalen Seiten) $|[A]_k|$ gegeben ist?

**Satz 3.14** *Angenommen alle maximalen Elemente von $A \in L(S)$ haben Rang $k$. Dann gilt für $0 \leq l \leq k$,*

$$|[A]_l| \geq \frac{k!(n - k)!}{l!(n - l)!} |[A]_k|.$$

*Beweis*: Es sei $B_l = P_l(S) \backslash [A]_l$. Ist $y \in B_l$ dann kann $y$ in keinem $x \in A$ enthalten sein, womit die Menge $[A]_k \cup B_l$ eine Antikette ist. Aus der L.Y.M.-Ungleichung (3.2) folgt daher einerseits

$$\frac{|[A]_k|}{\binom{n}{k}} + \frac{|B_l|}{\binom{n}{l}} \leq 1.$$

Andererseits ist,

$$|B_l| = |P_l(S) \backslash [A]_l| = \binom{n}{l} - |[A]_l|,$$

womit

$$\frac{|[A]_k|}{\binom{n}{k}} + 1 - \frac{|[A]_l|}{\binom{n}{l}} \leq 1.$$

Die Behauptung folgt nun durch einfache Termumformung. ■

### 3.3 Ein diskretes Analogon des Satzes von Helly

Zum Abschluss dieses Kapitels beweisen wir noch ein diskretes Analogon des Satzes von Helly, dessen klassische geometrische Version in Kapitel 5 auftritt.

**Satz 3.15 (Diskreter Satz von Helly)** *Es sei $S$ eine $n$-elementige Menge und $F$ eine Familie von Teilmengen von $S$. Gilt für jede Teilmenge $G \subseteq F$ mit $|G| \leq n$, dass*

$$\bigcap_{A \in G} A \neq \emptyset,$$

*dann ist*

$$\bigcap_{A \in F} A \neq \emptyset.$$

*Beweis*: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Zahl der Elemente von $F$. Ist $|F| \leq n$, dann ist die Behauptung trivial. Wir nehmen daher an, die Behauptung gilt für $|F| = m$ mit geeignetem $m \geq n$ und zeigen, dass der Satz dann auch für $|F| = m+1$ gilt. Es sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ und $F = A_1, \ldots, A_{m+1}$ mit $A_i \subseteq S$. Weiters bezeichne für $1 \leq j \leq m+1$ mit $L_j \subseteq S$ den Durchschnitt

$$L_j = \bigcap_{i \neq j} A_i.$$

Unsere Induktionsannahme für den Fall $|F| = m$ impliziert, dass jedes $L_j$ nicht leer ist. Es gibt daher $s_{i_j} \in L_j$ für jedes $j$. Da $m+1 > n$, muss es jedoch ein $s \in S$ geben, sodass $s \in L_{j_1} \cap L_{j_2}$ für geeignete $j_1 \neq j_2$. Da $s \in L_{j_1}$ ist, haben wir $s \in A_i$ für alle $i \neq j_1$ und analog $s \in A_i$ für alle $i \neq j_2$. Damit ist aber

$$s \in \bigcap_{i=1}^{m+1} A_i = \bigcap_{A \in F} A.$$

■

# 4 Innere Volumina von Parallelotopen

Als nächstes entwickeln wir eine Theorie invarianter Bewertungen auf dem Verband von endlichen Vereinigungen von Parallelotopen, deren Kanten parallel zu festen orthogonalen Koordinatenachsen sind. Dieser Verband soll uns als ein Modell für die Entwicklung einer Bewertungstheorie auf dem Verband endlicher Vereinigungen kompakter konvexer Mengen im $\mathbb{R}^n$ dienen. Die Euler-Charakteristik, innere Volumina und Charakterisierungssätze für Bewertungen auf dem Verband von Parallelotopen können als Prototypen analoger Konstruktionen und Aussagen für allgemeine polykonvexe Mengen in den Kapiteln 5 - 9 angesehen werden.

## 4.1 Der Verband von Parallelotopen

Wir fixieren für das gesamte Kapitel 4 ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen im Folgenden mit $\|\cdot\|$ die gewöhnliche Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.

**Definition.** Es bezeichne $\mathrm{Par}(n)$ den distributiven Verband bestehend aus allen endlichen Vereinigungen und Schnitten von Parallelotopen deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Wir sagen $P \in \mathrm{Par}(n)$ hat *Dimension* $n$ (oder: ist volldimensional), wenn $P$ nicht in einer endlichen Vereinigung von Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ enthalten ist, d.h. wenn $P$ innere Punkte besitzt. Allgemeiner hat $P \in \mathrm{Par}(n)$ die *Dimension* $k$, wenn $P$ in einer endlichen Vereinigung von $k$-Ebenen des $\mathbb{R}^n$ enthalten ist, aber in keiner endlichen Vereinigung von $k-1$ Ebenen.

Es bezeichne $\widetilde{T}_n$ die durch Translationen und Koordinatenpermutationen erzeugte Gruppe. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g \in \widetilde{T}_n$ schreiben wir

$$gA = g(A) = \{g(a) : a \in A\}.$$

**Definition.** Wir nennen eine Bewertung $\mu : \mathrm{Par}(n) \to \mathbb{R}$ *invariant*, wenn

$$\mu(gP) = \mu(P) \tag{4.1}$$

für alle $g \in \widetilde{T}_n$ und alle $P \in \mathrm{Par}(n)$. Ist $\mu(gP) = \mu(P)$ nur für Translationen $g$ des $\mathbb{R}^n$ erfüllt, dann sagen wir $\mu$ ist *translationsinvariant*.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist die Bestimmung aller invarianten Bewertungen auf $\mathrm{Par}(n)$. Um dabei pathologische Fälle auszuschließen, werden wir noch eine Stetigkeitsforderung an die betrachteten Bewertungen stellen.

**Definition.** Der Abstand $d(x, A)$ eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Der *Hausdorff Abstand* $\delta(K, L)$ von $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\delta(K, L) = \max\left\{\sup_{a \in K} d(a, L), \sup_{b \in L} d(b, K)\right\}. \tag{4.2}$$

**Bemerkung.**

(a) Für kompakte Mengen $K$ und $L$ gilt genau dann $\delta(K,L)=0$ wenn $K=L$.

Im Folgenden bezeichne $B_n$ die Euklidische Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ sei

$$K + \varepsilon B_n = \{x + \varepsilon u : x \in K \text{ und } u \in B_n\}.$$

**Lemma 4.1** *Für kompakte Mengen $K, L \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\delta(K,L) = \min\{\varepsilon \geq 0 : K \subseteq L + \varepsilon B_n,\ L \subseteq K + \varepsilon B_n\}. \tag{4.3}$$

*Beweis*: Es bezeichne $\alpha$ die rechte Seite von (4.3). Für $x \in K$ gilt dann $x \in L + \alpha B_n$, also $x = y + \alpha u$ mit geeigneten $y \in L$ und $u \in B_n$. Es folgt $\|x - y\| \leq \alpha$ und damit $\min_{y \in L} \|x - y\| \leq \alpha$. Da dies für alle $x \in K$ gilt, folgt $\max_{x \in K} \min_{y \in L} \|x - y\| \leq \alpha$. Vertauschung von $K$ und $L$ ergibt $\delta(K,L) \leq \alpha$.

Nun sei $0 < \varepsilon < \alpha$ und etwa $K \not\subseteq L + \varepsilon B_n$. Dann gilt $x \notin L + \varepsilon B_n$ für geeignetes $x \in K$, also $\|x - y\| \geq \varepsilon$ für alle $y \in L$ und daher $\delta(K,L) \geq \varepsilon$. Da $\varepsilon < \alpha$ beliebig war, folgt $\delta(K,L) \geq \alpha$. ■

Es ist nun leicht zu zeigen, dass der Hausdorff Abstand $\delta$ eine Metrik auf kompakten Mengen definiert.

**Satz 4.2** *Der Hausdorff Abstand $\delta$ definiert eine Metrik auf der Menge aller kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.*

*Beweis*: Der Hausdorff Abstand $\delta$ ist offenbar symmetrisch und nach der Bemerkung von oben positiv definit. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $K$, $L$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Weiters sei $\varepsilon_1 = \delta(K,M)$ und $\varepsilon_2 = \delta(L,M)$. Nach Lemma 4.1 ist dann $K \subseteq M + \varepsilon_1 B_n$ und $M \subseteq L + \varepsilon_2 B_n$, sodass

$$K \subseteq L + \varepsilon_2 B_n + \varepsilon_1 B_n = L + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) B_n.$$

Analog ist $L \subseteq K + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) B_n$. Aus Lemma 4.1 folgt daher $\delta(K,L) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. ■

**Bemerkung.**

(a) Eine Folge von kompakten Mengen $K_i \subseteq \mathbb{R}^n$ konvergiert in der Hausdorff Metrik genau dann gegen $K$ (symbolisch: $K_i \to K$), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon > 0$ gibt, sodass $K \subseteq K_i + \varepsilon B_n$ und $K_i \subseteq K + \varepsilon B_n$ für alle $i > N_\varepsilon$.

**Definition.** Wir nennen eine Bewertung $\mu : \mathrm{Par}(n) \to \mathbb{R}$ *stetig*, wenn

$$\mu(P_i) \to \mu(P)$$

für jede Folge $P_i$ von Parallelotopen (nicht unbedingt deren endliche Vereinigungen) mit $P_i \to P$.

Eine andere Eigenschaft, die sich als sinnvoll herausstellen wird, ist die Monotonie.

**Definition.** Eine Bewertung $\mu : \mathrm{Par}(n) \to \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend*, wenn $\mu(P) \leq \mu(Q)$ für alle $P$, $Q \in \mathrm{Par}(n)$ mit $P \subseteq Q$ gilt. Analog sei eine *monoton fallende* Bewertung definiert. Wir nennen eine Bewertung $\mu$ *monoton* auf $\mathrm{Par}(n)$, wenn $\mu$ entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beim Studium von Bewertungen auf dem Verband $\mathrm{Par}(n)$ können wir unseren Fokus auf die erzeugende Menge der Parallelotope im $\mathbb{R}^n$, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind, beschränken. Es gilt nämlich

**Satz 4.3 (Groemers Fortsetzungssatz für** $\mathrm{Par}(n)$**)** *Jede auf Parallelotopen, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind, definierte Bewertung $\mu$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer Bewertung auf* $\mathrm{Par}(n)$.

*Beweis*: Nach Groemers Integralsatz (Satz 2.2) genügt es zu zeigen, dass $\mu$ ein Integral auf dem Raum der Indikatorfunktionen von Parallelotopen definiert. Wir wollen dies durch Induktion nach der Dimension $n$ nachweisen.

Die Aussage ist trivial in Dimension Null, womit wir annehmen können, die Behauptung gilt in Dimension $n-1$. Angenommen es gibt Parallelotope $P_1, \ldots, P_m \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i} = 0 \qquad \text{aber} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i) = 1. \tag{4.4}$$

Wir wollen (unter Verwendung der Induktionsannahme) zeigen, dass (4.4) auf einen Widerspruch führt. Dazu sei $k$ die minimale Anzahl volldimensionaler Parallelotope $P_i$ in allen möglichen Ausdrücken der Form (4.4).

Ist $k = 0$, dann sind $P_1, \ldots, P_m$ jeweils in einer Hyperebene enthalten. Es sei $l$ die minimale (endliche) Anzahl von Hyperebenen, die die Parallelotope $P_1, \ldots, P_m$ enthalten. Aufgrund unserer Induktionsannahme können $P_1, \ldots, P_m$ nicht alle in einer einzigen Hyperebene enthalten sein, womit $l > 1$ gelten muss. Es seien $H_1, \ldots, H_l$ zu den Koordinatenachsen orthogonale Hyperebenen, sodass $P_i \subseteq H_1 \cup \cdots \cup H_l$ für $i = 1, \ldots, m$. O.B.d.A. sei $P_1 \subseteq H_1$. Da $I_{P_i \cap H_1} = I_{P_i} I_{H_1}$, folgt aus (4.4), dass

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_i \cap H_1} = 0. \tag{4.5}$$

Da für $i = 1, \ldots, m$ aber $P_i \cap H_1 \subseteq H_1$, folgt aus der Induktionsannahme, dass auch

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(P_i \cap H_1) = 0. \tag{4.6}$$

Subtraktion der Gleichungen (4.5) und (4.6) von den entsprechenden Gleichungen aus (4.4), liefert

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (I_{P_i} - I_{P_i \cap H_1}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\mu(P_i) - \mu(P_i \cap H_1)) = 1. \tag{4.7}$$

Da $P_1 \cap H_1 = P_1$, haben die Gleichungen aus (4.7) die Form von (4.4), wobei die in (4.7) auftretenden von Null verschiedenen Parallelotope in höchstens $l-1$ Hyperebenen enthalten sind, im Widerspruch zur Minimalität von $l$. Daher muss $k \geq 1$ sein.

O.B.d.A. habe $P_1$ die Dimension $n$. Es sei $H$ eine Hyperebene mit zugehörigen abgeschlossenen Halbräumen $H^+$ und $H^-$, so dass $P_1 \cap H$ eine Facette von $P_1$ ist und $P_1 \subseteq H^+$. Da $I_{P_i \cap H^\pm} = I_{P_i} I_{H^\pm}$ und $I_{P_i \cap H} = I_{P_i} I_H$, folgt aus (4.4),

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i I_{P_i \cap H^+} = 0, \qquad \sum_{i=1}^m \alpha_i I_{P_i \cap H} = 0, \qquad \sum_{i=1}^m \alpha_i I_{P_i \cap H^-} = 0.$$

Da $\mu$ eine Bewertung ist, gilt weiters

$$1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H^+) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H^-) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H).$$

Da die Mengen $P_i \cap H$ in einem Raum der Dimension $n-1$ liegen, ist die Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H) = 0$ nach Induktionsannahme. Da $P_1 \cap H^-$ ebenfalls Dimension $n-1$ hat, ist aufgrund der Minimalität von $k$ auch $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H^-) = 0$. Also

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H^+) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i) = 1.$$

Es gibt $2n$ Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{2n}$, sodass

$$P_1 = \bigcap_{i=1}^{2n} H_i^+.$$

Durch Iteration des obigen Arguments, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_{2n}^+) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_i \cap P_1) = 1.$$

Aus $I_{P_i \cap P_1} = I_{P_1} I_{P_i}$ und (4.4) folgt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i I_{P_i \cap P_1} = 0. \tag{4.8}$$

Beachte, dass Gleichung (4.8) nur erfüllt sein kann, wenn unter $P_2 \cap P_1, \ldots, P_m \cap P_1$ weitere volldimensionale Parallelotope enthalten sind. Iteration des Arguments von oben liefert daher schließlich, dass alle $P_i$, $i = 1, \ldots, m$, voll dimensional sein müssen, sowie einerseits

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(P_1 \cap \cdots \cap P_m) = \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \right) \mu(P_1 \cap \cdots \cap P_m) = 1,$$

womit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m \neq 0$ und $P_1 \cap \cdots \cap P_m \neq \emptyset$, und andererseits

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{P_1 \cap \cdots \cap P_m} = \left( \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \right) I_{P_1 \cap \cdots \cap P_m} = 0,$$

was entweder $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 0$ oder $P_1 \cap \cdots \cap P_m = \emptyset$ impliziert, ein Widerspruch in beiden Fällen. ■

### 4.2 Invariante Bewertungen auf Parallelotopen

Wir betrachten das Charakterisierungsproblem von invarianten Bewertungen auf $\mathrm{Par}(n)$ zunächst für $n = 1$: Ein Element von $\mathrm{Par}(1)$ ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen.

**Definition.** Für $A \in \mathrm{Par}(1)$ sei

$$\begin{aligned} \mu_0^1(A) &= \text{Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } A, \\ \mu_1^1(A) &= \text{Länge von } A. \end{aligned}$$

Offenbar sind $\mu_0^1$ und $\mu_1^1$ stetige invariante Bewertungen auf $\mathrm{Par}(1)$. Es gilt sogar:

**Satz 4.4** *Jede stetige invariante Bewertung auf* $\mathrm{Par}(1)$ *ist eine Linearkombination von* $\mu_0^1$ *und* $\mu_1^1$.

*Beweis*: Es sei $\mu$ eine stetige invariante Bewertung auf $\mathrm{Par}(1)$. Wir setzen $c = \mu(\{0\})$ und definieren

$$\mu' = \mu - c\mu_0^1.$$

Die invariante Bewertung $\mu'$ verschwindet dann auf einpunktigen Mengen. Wir definieren weiters eine stetige Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ durch

$$f(x) = \mu'([0, x]).$$

Ist $A$ ein abgeschlossenes Intervall der Länge $x$, dann impliziert die Invarianz von $\mu'$, dass $\mu'(A) = f(x)$. Sind $A$ und $B$ abgeschlossene Intervalle der Länge $x$ und $y$, sodass $A \cap B$ einpunktig ist, dann folgt

$$f(x + y) = \mu'(A \cup B) = \mu'(A) + \mu'(B) - \mu'(A \cap B) = f(x) + f(y),$$

womit $f(x) = rx$ für eine geeignete Konstante $r$ gilt. Damit ist aber $\mu' = r\mu_1^1$. ■

**Definition.** Für $0 \leq k \leq n$ ist das $k$-te *elementarsymmetrische Polynom* in $n$ Variablen gegeben durch

$$\begin{aligned} e_0(x_1, \ldots, x_n) &= 1, \\ e_k(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}^{n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \qquad k \geq 1. \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun stetigen invarianten Bewertungen auf $\mathrm{Par}(n)$ für $n > 1$ zu.

**Satz 4.5** *Für $0 \leq k \leq n$ existiert eine eindeutige stetige invariante Bewertung $\mu_k$ auf $\mathrm{Par}(n)$, sodass für jedes Parallelotop $P$ mit Kantenlängen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt*

$$\mu_k(P) = e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.9}$$

*Beweis*: Nach Groemers Fortsetzungssatz, Satz 4.3, genügt es zu zeigen, dass die durch (4.9) definierten (invarianten stetigen) Funktionale auf Parallelotopen Bewertungen sind. Dazu seien $\mu_0^1$ und $\mu_1^1$ die zuvor definierten Bewertungen auf $\mathrm{Par}(1)$ und $\mu_t^1 = t\mu_0^1 + \mu_1^1$, wobei $t$ ein Parameter ist. Weiters definieren wir auf $\mathrm{Par}(n)$ ein Funktional durch das $n$-fache Produkt

$$\mu_t^n = \mu_t^1 \times \cdots \times \mu_t^1.$$

Da Parallelotope kartesische Produkte von Strecken, also Elementen von $\mathrm{Par}(1)$, sind, definiert $\mu_t^n$ eine Bewertung auf *Parallelotopen* im $\mathbb{R}^n$. Nach Satz 4.3 besitzt $\mu_t^n$ daher eine eindeutige Fortsetzung zu einer Bewertung auf ganz $\mathrm{Par}(n)$.

Ist $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ ein Parallelotop im $\mathbb{R}^n$, wobei $I_j$ ein Intervall der Länge $x_j$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_t^n(P) &= \mu_t^1(I_1)\,\mu_t^1(I_2)\cdots\mu_t^1(I_n) = (1+tx_1)(1+tx_2)\cdots(1+tx_n) \\ &= 1 + e_1(x_1,\ldots,x_n)t + e_2(x_1,\ldots,x_n)t^2 + \cdots + e_n(x_1,\ldots,x_n)t^n. \end{aligned}$$

Es sei nun $Q = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n \in \mathrm{Par}(n)$, wobei die $P_i$'s Parallelotope sind. Nach dem Inklusions-Exklusionsprinzip gilt dann

$$\mu_t^n(Q) = \sum_i \mu_t^n(P_i) - \sum_{i<j} \mu_t^n(P_i \cap P_j) + \cdots - \cdots.$$

Zusammenfassen der Koeffizienten jeder Potenz von $t$ zeigt, dass es Bewertungen $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt, sodass

$$\mu_t^n(Q) = \mu_0(Q) + \mu_1(Q)t + \mu_2(Q)t^2 + \cdots + \mu_n(Q)t^n,$$

wobei die Bewertungen $\mu_i$ eindeutig durch (4.9) bestimmt sind. ■

**Bemerkungen.**

(a) Die Bewertung $\mu_0$ wird *Euler-Charakteristik* genannt. Sie ist nach Satz 4.5 die einzige Bewertung auf $\mathrm{Par}(n)$, die den Wert 1 auf allen (nicht leeren) Parallelotopen annimmt.

Offenbar ist $\mu_n(Q)$ gerade das Volumen von $Q \in \mathrm{Par}(n)$ und $2\mu_{n-1}(P)$ stimmt für Parallelotope $P \in \mathrm{Par}(n)$ mit deren Oberfläche überein.

(b) Ist $P$ ein Parallelotop der Dimension $k < n$, dann kann $\mu_i(P)$ auf zwei Arten interpretiert werden: Einerseits als der Wert der Bewertung $\mu_i$ an $P \in \mathrm{Par}(n)$ und andererseits als Wert von $\mu_i$, wenn $\mu_i$ auf $\mathrm{Par}(m)$ eingeschränkt wird, wobei $k \leq m < n$ ist und $P \subseteq \mathbb{R}^m$. Satz 4.5 zeigt, dass der Wert $\mu_i(P)$ unabhängig von der jeweiligen Interpretation ist. Anders ausgedrückt,

$$\mu_i^m(P) = \mu_i^n(P).$$

Wir werden daher die Abhängigkeit von $\mu_i(P)$ vom umgebenden Raum $\mathbb{R}^n$, in welchem das Parallelotop $P$ eingebettet ist, nicht andeuten.

Wir fassen Bemerkung (b) noch einmal in folgendem Korollar zusammen:

**Korollar 4.6** *Die in Satz 4.5 definierten Bewertungen $\mu_k$, $0 \leq k \leq n$, auf $Par(n)$ sind unabhängig von der Dimension $n$ normiert.*

Der Wert $\mu_k(P)$ ist also 'intrinsisch' der Menge $P$ zugeordnet und unabhängig von der Dimension des umgebenden Raumes. Dies motiviert

**Definition.** Für $0 \leq k \leq n$ heißt die durch Satz 4.5 definierte Bewertung $\mu_k$ das *$k$-te innere Volumen.*

Innere Volumina haben folgende Eigenschaft in Bezug auf orthogonale kartesische Produkte.

**Satz 4.7** *Es seien $H_1$ und $H_2$ komplementäre orthogonale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ der Dimensionen $h$ bzw. $n-h$, die durch Teilmengen des gegebenen Koordinatensystems aufgespannt werden. Sind $P_j \subseteq H_j$ Parallelotope in $H_j$, $j = 1, 2$, dann gilt für alle $0 \leq i \leq n$,*

$$\mu_i(P_1 \times P_2) = \sum_{r+s=i} \mu_r(P_1)\mu_s(P_2). \tag{4.10}$$

*Beweis*: Hat $P_1$ die Kantenlängen $x_1, \ldots, x_h$ und $P_2$ die Kantenlängen $y_1, \ldots, y_{n-h}$, dann gilt

$$\sum_{r+s=i} \mu_r(P_1)\mu_s(P_2) = \sum_{r+s=i} \left( \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq h} x_{j_1} \cdots x_{j_r} \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_s \leq n-h} y_{k_1} \cdots y_{k_s} \right).$$

Es seien $j_{r+1} = k_1 + h, \ldots, j_i = j_{r+s} = k_s + h$ und $x_{h+1} = y_1, \ldots, x_n = y_{n-h}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{r+s=i} \mu_r(P_1)\mu_s(P_2) &= \sum_{r+s=i} \left( \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq h} x_{j_1} \cdots x_{j_r} \sum_{h+1 \leq j_{r+1} < \cdots < j_i \leq n} x_{j_{r+1}} \cdots x_{j_i} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r < j_{r+1} < \cdots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_r} x_{j_{r+1}} \cdots x_{j_i} = \mu_i(P_1 \times P_2). \end{aligned}$$

■

**Bemerkung.**

(a) Identität (4.10) ist auch gültig wenn $P_1 \in \mathrm{Par}(h)$ und $P_2 \in \mathrm{Par}(n-h)$.

**Definition.** Eine Bewertung $\mu$ auf $\mathrm{Par}(n)$ heißt *einfach*, wenn $\mu(P) = 0$ für alle $P \in \mathrm{Par}(n)$ deren Dimension kleiner als $n$ ist.

Die Einschränkung des Volumens $\mu_n$ auf den Verband $\mathrm{Par}(n)$ ist durch folgenden Satz charakterisiert.

**Satz 4.8 (Volumen-Charakterisierung auf Par($n$))** *Es sei $\mu$ eine einfache translationsinvariante Bewertung auf* $\mathrm{Par}(n)$*, die entweder stetig oder monoton ist. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(P) = c\mu_n(P)$ für alle $P \in \mathrm{Par}(n)$.*

*Beweis*: Bezeichnet $[0,1]^n$ den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$, dann setzen wir $c = \mu([0,1]^n)$. Da $\mu$ einfach und translationsinvariant ist und $[0,1]^n$ Vereinigung von $k^n$ Translaten von $[0,1/k]^n$ ist, folgt aus dem Inklusions-Exklusionsprinzip, dass $\mu([0,1/k]^n) = c/k^n$ für alle natürlichen Zahlen $k$.

Damit folgt aber bereits $\mu(P) = c\mu_n(P)$ für jedes Parallelotop $P$ mit rationalen positiven Kantenlängen, denn jedes solche $P$ kann als Vereinigung von Translaten von $[0,1/k]^n$ für geeignetes $k > 0$ dargestellt werden (wobei zwei solcher Würfel sich nur in einer Menge der Dimension kleiner $n$ schneiden).

Aus der Stetigkeit bzw. der Monotonie von $\mu$ folgt damit aber bereits $\mu(P) = c\mu_n(P)$ für jedes Parallelotop mit positiven Kantenlängen. Aus dem Inklusions-Exklusionsprinzip folgt nun schließlich $\mu(Q) = c\mu_n(Q)$ für alle $Q \in \mathrm{Par}(n)$. ∎

**Bemerkung.**

(a) Auf die Voraussetzung der Stetigkeit bzw. Monotonie kann in Satz 4.8 nicht verzichtet werden. Um dies zu sehen, genügt es bereits $\mathrm{Par}(1)$ zu betrachten: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden bekanntlich einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$, den wir mit $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ bezeichnen wollen. Es sei $f \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}^*$ mit $f(1) = 1$, d.h. $f$ ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, sodass $f(1) = 1$ und $f(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Parallelotope $P \in \mathrm{Par}(1)$ sind abgeschlossene Intervalle der Form $[a,b]$ mit Länge $b-a$. Wir können daher eine Bewertung $\eta$ auf Parallelotopen in $\mathrm{Par}(1)$ durch

$$\eta([a,b]) = f(b-a)$$

definieren. Offenbar ist $\eta$ nur von der Länge des Intervalls abhängig und invariant. Aufgrund der Linearität von $f$ folgt außerdem für $a \leq c \leq b \leq d$,

$$\begin{aligned} \eta([a,b] \cup [c,d]) + \eta([a,b] \cap [c,d]) &= \eta([a,d]) + \eta([c,b]) = f(d-a) + f(b-c) \\ &= f(b-a) + f(d-c) = \eta([a,b]) + \eta([c,d]). \end{aligned}$$

Nach Groemers Fortsetzungssatz besitzt $\eta$ eine eindeutige Fortsetzung zu einer invarianten einfachen Bewertung auf $\mathrm{Par}(1)$, die jedoch nicht gleich der Länge (dem eindimensionalen Volumen) ist, da $\eta$ nur rationale Werte annimmt.

Das Argument hinter diesem Gegenbeispiel auf $\mathrm{Par}(1)$, kann auf einfache Weise erweitert werden, um Gegenbeispiele für $\mathrm{Par}(n)$, $n \geq 1$, zu erhalten.

Wir sind nun bereit alle stetigen invarianten Bewertungen auf $\mathrm{Par}(n)$ zu bestimmen.

**Satz 4.9** *Die inneren Volumina* $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ *bilden eine Basis des Vektorraums aller stetigen invarianten Bewertungen auf* $\mathrm{Par}(n)$*.*

*Beweis*: Es bezeichne $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ die von uns gewählte orthonormale Basis für $\mathbb{R}^n$ und es seien $H_j$ die $n-1$ Koordinatenhyperebenen im $\mathbb{R}^n$, die von den Basisvektoren $b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n$ aufgespannt werden.

Ist $\mu$ eine stetige invariante Bewertung auf $\mathrm{Par}(n)$, dann ist die Einschränkung von $\mu$ auf $H_j$ eine invariante Bewertung auf Parallelotopen in $H_j$. Durch Induktion nach $n$ (wobei Satz 4.4 den Induktionsanfang liefert) können wir annehmen, dass

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i(A),$$

für alle $A \in \mathrm{Par}(n)$ mit $A \subseteq H_j$. Die Koeffizienten $c_i$ sind dabei unabhängig von der Wahl von $H_j$, da die Bewertungen $\mu, \mu_0, \dots, \mu_{n-1}$ invariant unter Permutationen der Koordinaten sind. Die Bewertung

$$\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i$$

verschwindet daher auf allen unterdimensionalen Parallelotopen in $\mathrm{Par}(n)$, da jedes dieser Parallelotope in einer Hyperebene parallel zu einer der Ebenen $H_j$ enthalten ist. Nach Satz 4.8 gibt es daher ein $c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i = c_n \mu_n.$$

■

**Definition.** Eine Bewertung $\mu$ auf $\mathrm{Par}(n)$ heißt *homogen* vom Grad $k > 0$, wenn

$$\mu(\alpha P) = \alpha^k \mu(P)$$

für alle $P \in \mathrm{Par}(n)$ und alle $\alpha \geq 0$.

**Korollar 4.10** *Ist* $\mu$ *eine stetige invariante Bewertung auf* $\mathrm{Par}(n)$*, die homogen vom Grad* $k \in \mathbb{R}$ *ist, für ein* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$*, dann gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$*, sodass* $\mu(P) = c\mu_k(P)$ *für alle* $P \in \mathrm{Par}(n)$*.*

*Beweis*: Nach Satz 4.9 gibt es $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i.$$

Für $P = [0,1]^n$ und $\alpha > 0$ gilt daher einerseits

$$\mu(\alpha P) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(\alpha P) = \sum_{i=0}^{n} c_i \alpha^i \mu_i(P) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i \alpha^i$$

und andererseits

$$\mu(\alpha P) = \alpha^k \mu(P) = \alpha^k \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(P) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i \alpha^k.$$

Es folgt $c_i = 0$ für $i \neq k$ und $\mu = c_k \mu_k$. ■

# 5 Der Verband polykonvexer Mengen

Wir wenden uns nun dem Verband der polykonvexen Mengen zu, welcher den üblichen Rahmen für Studien der klassischen Integralgeometrie darstellt. Wir werden die Euler Charakteristik auf polykonvexen Mengen definieren, welche ein wichtiges Werkzeug für die Fortsetzung der inneren Volumina aus Kapitel 4 auf polykonvexe Mengen ist. Im letzten Teil dieses Kapitels beweisen wir schließlich die Oberflächenformel von Cauchy mit deren Hilfe wir die korrekte Normierung des rotationsinvarianten Maßes auf Grassmannischen motivieren.

## 5.1 Polykonvexe Mengen

Wir beginnen zunächst wieder mit der Definition einiger grundlegender Begriffe.

**Definition.** Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in K$ auch stets die gesamte Verbindungsstrecke $[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$ in $K$ enthalten ist. Ein *konvexer Körper* im $\mathbb{R}^n$ ist eine (nichtleere) kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}^n$ die Menge aller konvexen Körper im $\mathbb{R}^n$. Eine endliche Vereinigung von konvexen Körpern wird eine *polykonvexe* Menge genannt. Ist $A$ eine polykonvexe Menge im $\mathbb{R}^n$, dann sagen wir $A$ hat Dimension $n$, wenn $A$ innere Punkte besitzt. Andernfalls nennen wir $A$ *niedrig-dimensional*.

**Bemerkung.**

(a) Die Vereinigung und der Schnitt von endlich vielen polykonvexen Mengen sind polykonvex. Damit bildet die Menge aller polykonvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$ einen distributiven Verband, der $\mathrm{Par}(n)$ als Unterverband enthält.

**Notation.** Wir bezeichnen den distributiven Verband der polykonvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$ (der manchmal *Konvexring* genannt wird) mit $\mathrm{Polycon}(n)$.

**Definition.** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper. Die *Stützfunktion* $h(K, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von $K$ ist definiert durch $h(K, u) = \max\{x \cdot u : x \in K\}$. Für $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ definieren wir die *Stützebene* $H(K, u)$ und den *Stützhalbraum* $H^-(K, u)$ von $K$ mit äußerem Normalenvektor $u$ durch

$$\begin{aligned} H(K,u) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = h(K,u)\}, \\ H^-(K,u) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h(K,u)\}. \end{aligned}$$

Für $u \in S^{n-1}$ ist $h(K, u)$ der mit Vorzeichen versehene Abstand der Stützebene $H(K, u)$ mit äußerem Normalenvektor $u$ vom Ursprung. Der Abstand ist dabei genau dann negativ, wenn $u$ in den offenen Halbraum weist, der den Ursprung enthält. Da $K$ der Durchschnitt seiner Stützhalbräume ist, erhalten wir

$$K = \bigcap_{u \in S^{n-1}} H(K,u)^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h(K,u) \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Beispiele.**

(a) Es ist genau dann $K = \{z\}$, für ein $z \in \mathbb{R}^n$, wenn $h(K,u) = z \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für $K \in \mathcal{K}^n$ und $t \in \mathbb{R}^n$ gilt $h(K+t,u) = h(K,u) + t \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^n$.

(c) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $h([-x,x],u) = |x \cdot u|$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Aus der Definition der Stützfunktion erhält man unmittelbar folgende Eigenschaften:

**Proposition 5.1** *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$, $\lambda \geq 0$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

*(a)* $h(K, \lambda u) = \lambda h(K,u)$,

*(b)* $h(K, u+v) \leq h(K,u) + h(K,v)$.

Wir nennen eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Proposition 5.1 *sublinear*. Aufgrund der 1-Homogenität von Stützfunktionen (Eigenschaft (a)) werden wir meist mit deren Einschränkung auf $S^{n-1}$ arbeiten.

Das folgende Resultat zeigt, dass die Sublinearität bereits charakterisierend für Stützfunktionen ist.

**Satz 5.2** *Es sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(a) $h$ ist Stützfunktion eines eindeutig bestimmten konvexen Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*(b) $h$ ist sublinear.*

*Beweis*: Wir verweisen für den Beweis auf das Skriptum „Harmonische Analysis und Geometrie“ unter http://dmg.tuwien.ac.at/schuster. ■

**Definition.** Die *Minkowski Summe* konvexer Körper $K, L \in \mathcal{K}^n$ ist definiert durch

$$K + L = \{x + y : x \in K \text{ und } y \in L\}.$$

**Bemerkungen.**

(a) Es ist leicht zu sehen, dass für $K, L \in \mathcal{K}^n$ gilt

$$h(K+L, \cdot) = h(K, \cdot) + h(L, \cdot).$$

(b) Aus (a) und Lemma 4.1 folgt für $K, L \in \mathcal{K}^n$ auf einfache Weise

$$\delta(K,L) = \sup_{u \in S^{n-1}} |h(K,u) - h(L,u)| = \|h(K,\cdot) - h(L,\cdot)\|_\infty. \tag{5.1}$$

Die Hausdorff Topologie auf $\mathcal{K}^n$ stimmt also mit der durch die gleichmäßige Konvergenz von Stützfunktionen induzierten Topologie überein.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $E_n$ die *Euklidische Bewegungsgruppe* des $\mathbb{R}^n$, d.h. die durch Translationen und orthogonale Transformationen erzeugte Gruppe. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g \in E_n$, dann schreiben wir

$$gA = g(A) = \{g(a) : a \in A\}.$$

Die Untergruppe von $E_n$ der Translationen bezeichnen wir mit $T_n$.

**Definition.** Wir nennen eine Bewertung $\mu : \text{Polycon}(n) \to \mathbb{R}$ *bewegungsinvariant* (oder einfach *invariant*, wenn keine Verwechslung möglich ist), wenn

$$\mu(A) = \mu(gA) \tag{5.2}$$

für alle $g \in E_n$ und alle $A \in \text{Polycon}(n)$. Gilt (5.2) nur für $g \in T_n$, dann nennen wir $\mu$ *translationsinvariant*.

Unser Ziel ist es alle invarianten Bewertungen auf $\text{Polycon}(n)$ zu bestimmen, die (genau wie im Falle von $\text{Par}(n)$) noch einer Stetigkeitsbedingung genügen.

**Definition.** Eine Bewertung $\mu : \text{Polycon}(n) \to \mathbb{R}$ heißt *stetig*, wenn

$$\mu(A_k) \to \mu(A)$$

wann immer $A_k, A \in \mathcal{K}^n$ und $A_k \to A$ im Sinne der Hausdorff Metrik.

Das folgende Resultat zeigt, dass wir zur Klassifikation aller stetigen Bewertungen auf $\text{Polycon}(n)$ unsere Aufmerksamkeit auf Bewertungen auf der erzeugenden Menge $\mathcal{K}^n$ beschränken können.

**Satz 5.3 (Groemers Fortsetzungssatz für** $\text{Polycon}(n)$**)** *Jede auf $\mathcal{K}^n$ definierte stetige Bewertung $\mu$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer Bewertung auf* $\text{Polycon}(n)$.

*Beweis*: Es sei $\mu : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Bewertung. Nach Groemers Integralsatz (Satz 2.2) müssen wir zeigen, dass $\mu$ ein Integral auf dem von Indikatorfunktionen konvexer Körper aufgespannten Vektorraum definiert. Wir wollen dies durch Induktion nach der Dimension $n$ nachweisen.

Die Aussage ist trivial in Dimension Null, womit wir annehmen können, die Behauptung gilt in Dimension $n - 1$. Angenommen es gibt konvexe Körper $K_1, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_i} = 0 \qquad \text{aber} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) = 1. \tag{5.3}$$

Wir wollen (unter Verwendung der Induktionsannahme) zeigen, dass (5.3) auf einen Widerspruch führt. Dazu sei $m$ die kleinste natürliche Zahl für die ein Ausdruck der Form (5.3) existiert.

Wir wählen eine Hyperebene $H$, mit dazugehörigen abgeschlossenen Halbräumen $H^{\pm}$, so dass $K_1 \subset \operatorname{int} H^+$. Da $I_{K_i \cap H^{\pm}} = I_{K_i} I_{H^{\pm}}$ und $I_{K_i \cap H} = I_{K_i} I_H$, folgt aus (5.3) einerseits

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_i \cap H^{\pm}} = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_i \cap H} = 0.$$

Da $\mu$ eine Bewertung ist, gilt andererseits

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^-) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H).$$

Da die Mengen $K_i \cap H$ in einem Raum der Dimension $n-1$ liegen, ist nach Induktionsannahme $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H) = 0$. Da $K_1 \cap H^- = \emptyset$, impliziert weiters die Minimalität von $m$ auch $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^-) = 0$. Nach (5.3) gilt daher

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) = 1.$$

Wählen wir nun eine Folge von Hyperebenen $H_1, H_2, \ldots$, sodass $K_1 \subset \operatorname{int} H_i^+$ und

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i^+,$$

so erhalten wir durch Iteration des obigen Arguments zunächst

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_k^+) = 1$$

für alle $k \geq 1$ und daher aufgrund der Stetigkeit von $\mu$ im Grenzwert $k \to \infty$,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap K_1) = 1.$$

Da $I_{K_i \cap K_1} = I_{K_i} I_{K_1}$, haben wir auch

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_i \cap K_1} = 0.$$

Iteration dieser Argumente mit $K_2, \ldots, K_m$ liefert schließlich einerseits

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_1 \cap \cdots \cap K_m) = \left( \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \right) \mu(K_1 \cap \cdots \cap K_m) = 1,$$

womit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m \neq 0$ und $K_1 \cap \cdots \cap K_m \neq \emptyset$. Andererseits folgt aus

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i I_{K_1 \cap \cdots \cap K_m} = \left( \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \right) I_{K_1 \cap \cdots \cap K_m} = 0$$

aber entweder $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 0$ oder $K_1 \cap \cdots \cap K_m = \emptyset$, ein Widerspruch. ∎

## 5.2 Die Euler Charakteristik

Als nächstes wollen wir die auf dem Unterverband Par$(n)$ eingeführte Euler Charakteristik $\mu_0$ auf den Verband Polycon$(n)$ erweitern.

**Satz 5.4 (Existenz der Euler Charakteristik)** *Es existiert eine eindeutige stetige invariante Bewertung $\mu_0^n$ auf* Polycon$(n)$, *sodass $\mu_0^n(K) = 1$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$.*

*Beweis*: Die Aussage ist eine direkte Konsequenz von Groemers Fortsetzungssatz (Satz 5.3). Wir geben im Folgenden einen von Satz 5.3 unabhängigen Beweis, der einerseits konstruktiver ist und andererseits auf Argumenten beruht, die wir in weiterer Folge noch benötigen werden:

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension $n$. Da Par$(1)$ = Polycon$(1)$ haben wir den Fall $n = 1$ bereits gezeigt. Nach Satz 2.2 und der Bemerkung danach, genügt es die Existenz eines linearen Funktionals $L_n$ auf $\mathcal{K}^n$-einfachen Funktionen mit $L_n(I_K) = 1$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$ nachzuweisen. Für $n = 1$ definieren wir

$$L_1(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (f(x) - \lim_{s \to 0^+} f(x + s)).$$

Beachte, dass die Summe auf der rechten Seite endlich ist und für $f = I_{[a,b]}$ gilt

$$L_1(I_{[a,b]}) = I_{[a,b]}(b) - \lim_{s \to 0^+} I_{[a,b]}(b + s) = 1 - 0 = 1.$$

Daraus folgt $L_1(I_K) = \mu_0^1(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^1$, womit

$$L_1(f) = \int f \, d\mu_0^1.$$

Es sei nun $n \geq 2$ und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine feste Orthonormalbasis. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne $H_x$ die Hyperebene parallel zu span$\{b_2, \ldots, b_n\}$, welche den Punkt $(x, 0, \ldots, 0)$ enthält. Ist $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine $\mathcal{K}^n$-einfache Funktion, dann ist die Funktion $f_x(x_2, \ldots, x_n) := f(x, x_2, ..., x_n)$ eine einfache Funktion auf $H_x$. Wir können daher annehmen, dass $L_{n-1}(f_x)$ auf $H_x$ bereits definiert ist (da $H_x$ und $\mathbb{R}^{n-1}$ isomorph sind). Wir definieren nun $F(x) := L_{n-1}(f_x)$ und setzen

$$L_n(f) := L_1(F).$$

Beachte, dass die Funktion $F$ einfach ist, wodurch die rechte Seite wohldefiniert ist. Ist $f = I_K$ für ein $K \in \mathcal{K}^n$, dann ist $f_x$ die Indikatorfunktion des Schnitts von $K$ mit der Hyperebene $H_x$ und $F$ ist die Indikatorfunktion der Projektion von $K$ auf die $b_1$-Koordinatenachse. Daraus folgt, dass $L_1(F) = 1$. Da

$$L_n(f) = \int f \, d\mu_0^n$$

für eine geeignete Bewertung $\mu_0^n$, folgt, dass $\mu_0^n$ die gesuchte Bewertung ist. ∎

**Bemerkung:**

(a) Die Euler Charakteristik $\mu_0^n$ ist unabhängig von der Dimension des umgebenden Raumes *normiert*: Ist $K$ eine polykonvexe Menge der Dimension $k$ im $\mathbb{R}^n$ und $H$ eine Ebene der Dimension $j$, die $K$ enthält, dann ist $\mu_0^j(K)$, berechnet in $H$, gleich $\mu_0^n(K)$ berechnet im $\mathbb{R}^n$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\mu_0^n(K)$ mittels des Inklusions-Exklusionsprinzips berechnet werden kann, nachdem $K$ als endliche Vereinigung konvexer Körper ausgedrückt wurde, und $\mu_0^n(K) = 1$ für alle konvexen Körper $K$ in Räumen beliebiger Dimension.

Wir schreiben daher im Folgenden $\mu_0$ anstatt $\mu_0^n$.

**Definition.** Wir nennen einen nicht leeren beschränkten Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen ein *Polytop*. Ein *polytopaler Komplex* ist eine endliche Vereinigung von Polytopen für die gilt, dass der Schnitt zweier Polytope entweder leer oder eine Seite jedes der beiden Polytope ist.

**Bemerkungen:**

(a) Jedes Polytop ist auch die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten.

(b) Der Rand $\partial P$ jedes Polytops $P$ ist ein polytopaler Komplex.

Die Ideen des letzten Beweises können wir verwenden, um die Euler Charakteristik polytopaler Komplexe zu berechnen. Dazu betrachten wir den distributiven Unterverband von Polycon($n$) der von Polytopen erzeugt wird.

**Satz 5.5** *Ist $P$ ein Polytop der Dimension $n > 0$, dann gilt*

$$\mu_0(\partial P) = 1 - (-1)^n.$$

*Beweis*: Wir verwenden die Notation des letzten Beweises und bezeichnen mit $\pi P$ die orthogonale Projektion von $P$ auf die Gerade $H_x^\perp$. Offenbar ist $H_x \cap \partial P = \partial(H_x \cap P)$, wenn $x$ kein Randpunkt von $\pi P$ ist. Wir definieren nun

$$F(x) = \mu_0(\partial(H_x \cap P)).$$

Der Beweis der Behauptung erfolgt nun durch Induktion nach der Dimension $n$. Für $n = 1$ ist $\mu_0(\partial P) = 2 = 1 - (-1)$, da $\partial P$ aus zwei verschiedenen Punkten besteht. Für $n > 1$ folgt aus der Induktionsannahme, dass

$$\mu_0(H_x \cap \partial P) = \mu_0(\partial(H_x \cap P)) = 1 - (-1)^{n-1}, \tag{5.4}$$

wenn $x \in \pi P$ kein Randpunkt von $\pi P$ ist. Ist $x \in \partial(\pi P)$, dann gilt

$$\mu_0(H_x \cap \partial P) = 1, \tag{5.5}$$

da $H_x \cap P$ eine Seite von $P$ ist (eventuell nur ein einzelner Punkt). Für $H_x \cap \partial P = \emptyset$, haben wir schließlich noch

$$\mu_0(H_x \cap \partial P) = 0. \tag{5.6}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu_0(\partial P) &= L_1(F) = \sum_{x\in\mathbb{R}} (F(x) - \lim_{s\to 0^+} F(x+s)) \\ &= F(a) - \lim_{s\to 0^+} F(a+s) + F(b) - \lim_{s\to 0^+} F(b+s),\end{aligned}$$

wobei $a$ und $b$ (mit $a < b$) die Zahlen sind, für die $H_x$ den Rand von $P$ berührt. Aus (5.4), (5.5) und (5.6) erhalten wir

$$F(a) = 1, \qquad \lim_{s\to 0^+} F(a+s) = 1 - (-1)^{n-1}, \qquad F(b) = 1, \qquad \lim_{s\to 0^+} F(b+s) = 0$$

und damit

$$\mu_0(\partial P) = 1 - 1 + (-1)^{n-1} + 1 = 1 - (-1)^n. \qquad \blacksquare$$

Ist $P$ ein Polytop der Dimension $k$ im $\mathbb{R}^n$, dann bezeichnen wir mit $\mathrm{relint}(P)$ das Innere von $P$ relativ zur Topologie der $P$ enthaltenden $k$-dimensionalen Ebene. Da nach Korollar 2.3 die Bewertung $\mu_0$ eindeutig zu einer Bewertung auf der von Polycon($n$) erzeugten Boolschen Algebra fortgesetzt werden kann (die wir wieder mit $\mu_0$ bezeichnen), können wir auch $\mu_0(\mathrm{relint}(P))$ bestimmen:

**Satz 5.6** *Ist $P$ ein Polytop der Dimension $n > 0$, dann gilt*

$$\mu_0(\mathrm{relint}(P)) = (-1)^n.$$

*Beweis*: Aufgrund der Unabhängigkeit von $\mu_0$ in Bezug auf die Dimension des umgebenden Raumes, folgt aus Satz 5.5

$$\mu_0(\mathrm{relint}(P)) = \mu_0(P) - \mu_0(\partial P) = (-1)^n. \qquad \blacksquare$$

**Definition.** Ein *System von Seiten $F$* eines polytopalen Komplexes $P$ ist eine Familie von Polytopen mit folgenden Eigenschaften:

- $\bigcup_{Q\in F} \mathrm{relint}(Q) = P$.
- Sind $Q$, $Q' \in F$ und $Q \neq Q'$, dann ist $\mathrm{relint}(Q) \cap \mathrm{relint}(Q') = \emptyset$.

Wir können nun Eulers Formel auf beliebige polytopale Komplexe verallgemeinern.

**Satz 5.7 (Euler–Schläfli–Poincaré Formel)** *Es sei $F$ ein System von Seiten des polytopalen Komplexes $P$. Bezeichnet $f_i$ die Anzahl der $i$-dimensionalen Seiten von $F$, dann gilt*

$$\mu_0(P) = f_0 - f_1 + f_2 - \cdots .$$

*Beweis*: Wir setzen die Bewertung $\mu_0$ wieder auf die durch polykonvexe Mengen erzeugte Boolsche Algebra fort. Nach Satz 5.6 gilt dann für jedes System von Seiten $F$ des Komplexes $P$,

$$\mu_0(P) = \mu_0\left(\bigcup_{Q\in F} \operatorname{relint}(Q)\right) = \sum_{Q\in F} \mu_0(\operatorname{relint}(Q)) = \sum_{Q\in F} (-1)^{\dim Q},$$

da jedes $Q \in F$ ein Polytop ist. Zusammenfassen der Ausdrücke derselben Dimension liefert nun die Behauptung. ■

### 5.3 Die Sätze von Klee, Carathéodory und Helly

Als weitere Anwendung der Euler Charakteristik beweisen wir:

**Satz 5.8 (Satz von Klee)** *Es sei $F$ eine endliche Familie konvexer Körper, sodass $\bigcup_{K\in F} K$ konvex ist. Gilt für jede Teilmenge $G \subseteq F$ mit $|G| = i < |F|$, dass*

$$\bigcap_{K\in G} K \neq \emptyset,$$

*dann gibt es eine Teilmenge $H$ von $F$ der Kardinalität $i+1$ mit*

$$\bigcap_{K\in H} K \neq \emptyset.$$

*Beweis*: Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Für alle natürlichen Zahlen $j < n$ gilt

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^j \binom{n}{j} \neq 0. \tag{5.7}$$

Um dies zu sehen, sei zunächst $j \leq \langle n/2 \rangle$. In diesem Fall ist die linke Seite von (5.7) eine alternierende Summe von *streng monoton steigenden* Ausdrücken und deshalb ungleich Null. Aus

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

und

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

folgt, dass (5.7) auch gilt, wenn $j \geq \langle n/2 \rangle$ ist.

Es sei nun $|F| = n$. Ist $\bigcap_{K\in H} K = \emptyset$ für jede Teilmenge $H$ von $F$ mit $|H| = i+1$, so folgt aus Satz 5.4 und dem Inklusions-Exklusionsprinzip

$$\begin{aligned} 1 = \mu_0\left(\bigcup_{K\in F} K\right) &= \sum_{K\in F} \mu_0(K) - \sum_{K\neq L\in F} \mu_0(K\cap L) + \cdots \\ &= \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{i+1}\binom{n}{i} \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (5.7). ■

**Definition.** Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die *konvexe Hülle* $\operatorname{conv} A$ definiert als der Durchschnitt aller konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$ die $A$ enthalten.

**Bemerkung:**

(a) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{conv} A$ die Menge aller konvexen Kombinationen von je endlich vielen Elementen von $A$. Dabei heißt $x \in \mathbb{R}^n$ eine *konvexe Kombination* von $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1]$ gibt mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, sodass

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k.$$

Das folgende Resultat ist eine einfache aber fundamentale Eigenschaft konvexer Hüllen im $\mathbb{R}^n$.

**Satz 5.9 (Satz von Carathéodory)** *Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{conv} A$ die Menge aller konvexen Kombinationen von $n+1$ oder weniger Punkten aus $A$.*

*Beweis*: Ist $x \in \operatorname{conv} A$, dann hat $x$ eine Darstellung der Form

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k,$$

wobei $x_1, \dots, x_k \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ und wir können annehmen, dass hierbei $k \in \mathbb{N}$ minimal gewählt ist. Angenommen $x_1, \dots, x_k$ wären affin abhängig. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass

(i) $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0$,

(ii) $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = o$.

Wegen (i) ist mindestens ein $\alpha_m$ positiv. Wir wählen $m$ so, dass $\lambda_m / \alpha_m$ positiv und dabei so klein wie möglich ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, k$,

$$\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \geq 0$$

und wegen (i)

$$\left( \lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_1 \right) + \ldots + \left( \lambda_k - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_k \right) = 1.$$

Damit ist nach (ii)

$$x = \left( \lambda_1 - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_1 \right) x_1 + \ldots + \left( \lambda_k - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_k \right) x_k$$

eine Darstellung von $x$ als konvexe Kombination von höchstens $k-1$ Punkten, im Widerspruch zur Minimalität von $k$. Also sind $x_1, \dots, x_k$ affin unabhängig, woraus insbesondere $k \leq n+1$ folgt. ■

Schließlich beweisen wir noch den

**Satz 5.10 (Satz von Helly)** *Es sei $F$ eine endliche Familie konvexer Mengen im $\mathbb{R}^n$. Gilt für jede Teilmenge $G \subseteq F$ mit $|G| \leq n+1$, dass*

$$\bigcap_{K \in G} K \neq \emptyset$$

*dann ist auch*

$$\bigcap_{K \in F} K \neq \emptyset.$$

*Beweis*: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Anzahl der Elemente von $F$. Ist $|F| \leq n+1$, dann ist die Behauptung trivial. Wir können daher annehmen, die Aussage des Satzes gilt für $|F| = m \geq n+1$ und müssen zeigen, dass der Satz dann auch für $|F| = m+1$ gilt. Dazu sei $F = \{K_1, \dots, K_{m+1}\}$. Für $1 \leq j \leq m+1$ sei $L_j$ definiert durch

$$L_j = \bigcap_{i \neq j} K_i.$$

Nach Induktionsannahme gilt $L_j \neq \emptyset$ für alle $j$. Es sei $x_j \in L_j$. Da $m+1 \geq n+2$, sind die Punkte $x_1, \dots, x_{m+1}$ affin abhängig, d.h. es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1} \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, sodass

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m+1} x_{m+1} = o \qquad \text{und} \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m+1} = 0.$$

Nach Umnummerierung können wir annehmen, dass $\alpha_i > 0$ für $i = 1, \dots, k$ für ein $k \in \{1, \dots, m\}$ (es können nicht alle $\alpha_i$ positiv sein). Mit

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = -(\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{m+1}) > 0$$

gilt daher

$$x := \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i=k+1}^{m+1} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) x_i$$

und damit

$$x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \cap \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_{m+1}\}$$

für ein $k \in \{1, \dots, m\}$. Da aber $x_1, \dots, x_k \in K_{k+1}, \dots, K_{m+1}$, ist

$$x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq K_{k+1} \cap \cdots \cap K_{m+1}$$

und analog $x \in \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_{m+1}\} \subseteq K_1 \cap \cdots \cap K_k$. ■

**Bemerkung:**

(a) Satz 5.10 impliziert direkt den diskreten Satz von Helly (Satz 3.15).

*Beweis*: Es sei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ eine endliche Menge. Wir ordnen jedem $s_i$ einen Punkt $x_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ so zu, dass die Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ affin unabhängig ist. Es sei $\triangle$ der *geometrische* Simplex im $\mathbb{R}^{n-1}$ mit den Ecken $\{x_1, \dots, x_n\}$. Teilmengen von $S$ können wir nun mit *Seiten* des Simplex $\triangle$ identifizieren. Satz 3.15 folgt nun durch Anwendung von Satz 5.10 auf Familien von Seiten des Simplex $\triangle$. ■

## 5.4 Lutwaks Inklusionssatz

Wir wollen den Satz von Helly zur Beantwortung einer Frage über Inklusionen konvexer Körper $K$ und $L$ anwenden: Gibt es ein einfaches Kriterium, welches garantiert, dass ein geeignetes Translat von $K$ eine Teilmenge von $L$ ist?

Wie der folgende Satz von Lutwak zeigt, enthält $L$ genau dann ein Translat von $K$, wenn jeder Simplex der $L$ enthält ein Translat von $K$ enthält:

**Satz 5.11 (Lutwaks Inklusionssatz)** *Für konvexe Körper $K$, $L \in \mathcal{K}^n$ mit nicht leerem Inneren sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(i) Zu jedem Simplex $\triangle$ mit $L \subseteq \triangle$ gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, sodass $K + v \subseteq \triangle$.*

*(ii) Es gibt ein $v_0 \in \mathbb{R}^n$, sodass $K + v_0 \subseteq L$.*

*Beweis*: Die Implikation **(ii)** $\Rightarrow$ **(i)** ist trivial, womit **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** zu zeigen bleibt.

Wir nehmen zunächst an, dass $L$ ein Polytop mit Facetten $L_1, L_2, \ldots, L_m$ und zugehörigen (äußeren) Einheitsnormalenvektoren $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ist. Weiters sei jede Wahl von $n$ verschiedenen Normalenvektoren $u_j$ linear unabhängig.
Für jede Facette $L_i$ sei $H_i$ die $(n-1)$-dimensionale Hyberebene im $\mathbb{R}^n$, die $L_i$ enthält. Den abgeschlossenen Halbraum der das Polytop $L$ enthält und durch $H_i$ begrenzt wird, bezeichnen wir mit $H_i^+$. Schließlich sei $T_i = \{v \in \mathbb{R}^n : K + v \subset H_i^+\}$. Da $K$ kompakt ist und jedes $H_i^+$ ein (konvexer) abgeschlossener Halbraum ist, sind die Mengen $T_i$ nicht leere abgeschlossene konvexe Mengen.
Die Unabhängigkeitsforderung an die Normalenvektoren $u_i$ impliziert, dass für jede Wahl von $n+1$ verschiedenen Normalenvektoren $u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}}$ die Menge

$$H_{i_1,\ldots,i_{n+1}} = \bigcap_{s=1}^{n+1} H_{i_s}^+$$

entweder einen Simplex $\triangle_{i_1,\ldots,i_{n+1}}$ enthält, sodass $L \subseteq \triangle_{i_1,\ldots,i_{n+1}}$, oder unbeschränkt ist und daher ein Translat der Kugel $\alpha B_n$ für beliebige Radien $\alpha > 0$ enthält. Im ersten Fall folgt aus (i) die Existenz eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ mit $K + v \subseteq \triangle_{i_1,\ldots,i_{n+1}}$. Im zweiten Fall existiert ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $K + v \subseteq H_{i_1,\ldots,i_{n+1}}$. Damit gibt es auf jeden Fall ein $v \in T_{i_1} \cap \cdots \cap T_{i_{n+1}}$, womit jede Familie von $n+1$ Mengen $T_i$ einen nicht leeren Schnitt besitzt. Nach dem Satz von Helly gibt es daher ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$v \in \bigcap_{i=1}^{m} T_i.$$

Nach Definition der Mengen $T_i$ ist daher $K + v \subseteq H_i^+$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Da aber $L = H_1^+ \cap \cdots \cap H_m^+$, folgt damit $K + v \subseteq L$.

Es sei nun $L$ ein allgemeiner konvexer Körper und $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von Polytopen, sodass je $n$ der Facettennormalen von $P_i$ linear unabhängig sind, $P_i \supseteq P_{i+1}$ für alle $i$ und $P_i$ in der Hausdorff Metrik gegen $L$ konvergiert. Ist $\triangle$ ein Simplex, der $P_i$ enthält, dann folgt aus $L \subseteq P_i \subseteq \triangle$ die Existenz eines Vektors $w$ mit $K + w \subseteq \triangle$.

Nach dem ersten Teil des Beweises gibt es zu jedem $i$ ein $v_i \in \mathbb{R}^n$ mit $K + v_i \subseteq P_i$. Da die $P_i$ eine monoton fallende Folge bilden, ist die Folge der $v_i$ beschränkt und muss daher eine konvergente Teilfolge enthalten. O.B.d.A. können wir $v_i \to v$ annehmen. Da aber $P_i \to L$, muss dann $K + v \subseteq L$ gelten. ■

### 5.5 Cauchys Oberflächenformel

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer auf Cauchy zurückgehenden Interpretation der Oberfläche $S(K)$ eines konvexen Körpers im $\mathbb{R}^n$, welche im weiteren Verlauf noch nützlich sein wird.

**Definition.** Die *Oberfläche* eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ ist definiert durch

$$S(K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_n(K + \varepsilon B_n) - \mu_n(K)}{\varepsilon}.$$

**Bemerkung:**

(a) Wir zeigen in Kapitel 9, dass das Volumen $\mu_n(K + \varepsilon B_n)$ für jeden konvexen Körper ein Polynom in $\varepsilon$ ist (Steiners Formel), womit $S(K)$ wohldefiniert ist.

(b) Für einen Beweis, dass $S(P)$ für ein Polytop $P$ mit der Summe der Facettenflächen von $P$ übereinstimmt, verweisen wir auf das Skriptum „Harmonische Analysis und Geometrie" unter http://dmg.tuwien.ac.at/schuster.

Bevor wir Cauchys Oberflächenformel beweisen können, benötigen wir noch

**Lemma 5.12** *Bezeichne $\omega_n$ das Volumen der Euklidischen Einheitskugel $B_n$ im $\mathbb{R}^n$. Es gelten die folgenden Aussagen:*

*(a) Die Oberfläche der Einheitssphäre $S^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $S(B_n) = n\omega_n$.*

*(b) Für $n \geq 1$ ist*

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}. \tag{5.8}$$

*(c) Für jedes $v \in S^{n-1}$ ist*

$$\int_{S^{n-1}} |u \cdot v| \, du = 2\omega_{n-1}.$$

Hier und im Folgenden beziehen sich Integrationen über ($i$-dimensionale) Sphären jeweils auf das entsprechende ($i$-dimensionale) sphärische Lebesgue-Maß.

*Beweis*: Aussage (a) ist eine einfache Konsequenz der Definition von $S(B_n)$.

Zum Beweis von (b) berechnen wir zunächst

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \pi.$$

Eine analoge Rechnung für $n$ Variablen und entsprechender Substitution $x = ru$, wobei $r \in [0, \infty)$ und $u \in S^{n-1}$, liefert nun unter Verwendung von (a)

$$\begin{aligned}\pi^{n/2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\,dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr\,du \\ &= n\omega_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr = \frac{n\omega_n}{2} \int_0^\infty e^{-y} y^{(n/2)-1}\,dy = \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Zum Beweis von (c) verwenden wir folgende Formel zur Schichtenintegration einer stetigen Funktion $f$ auf $S^{n-1}$ über zu einer Hyperebene $v^\perp$, $v \in S^{n-1}$ beliebig, parallele $n-2$ Sphären:

$$\int_{S^{n-1}} f(u)\,du = \int_{-1}^{1} \int_{S^{n-1}\cap v^\perp} f(tv + \sqrt{1-t^2}w)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dw\,dt.$$

Für einen Beweis verweisen wir auf das Skriptum „Harmonische Analysis und Geometrie" unter http://dmg.tuwien.ac.at/schuster. Wählen wir $f(u) = |u \cdot v|$, so erhalten wir wieder unter Verwendung von (a)

$$\int_{S^{n-1}} |u \cdot v|\,du = (n-1)\omega_{n-1} \int_{-1}^{1} |t|(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dt. = 2\omega_{n-1}.$$

■

Für $K \in \mathcal{K}^n$ und einen $i$-dimensionalen Unterraum $V$ des $\mathbb{R}^n$ bezeichne $K|V$ die orthogonale Projektion von $K$ auf $V$. Für das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Projektion von $K$ auf die Hyperebene $u^\perp$ schreiben wir $\mu_{n-1}(K|u^\perp)$.

**Satz 5.13 (Cauchys Oberflächenformel)** *Für $K \in \mathcal{K}^n$ gilt*

$$S(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mu_{n-1}(K|u^\perp)\,du. \tag{5.9}$$

*Beweis*: Es sei zunächst $P$ ein Polytop mit Facetten Einheitsnormalenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ und zugehörigen Facettenflächen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Bezeichnen wir die Facetten von $P$ mit $P_i$, dann zeigt man induktiv unter Verwendung des Satzes von Fubini, dass für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\mu_{n-1}(P_i|u^\perp) = \alpha_i |u \cdot v_i|.$$

Da durch die Projektion auf $u^\perp$ der „obere Rand" $\bigcup_{v_i \cdot u > 0} P_i$ und der „untere Rand" $\bigcup_{v_i \cdot u < 0} P_i$ von $P$ jeweils bijektiv auf $P|u^\perp$ abgebildet werden, gilt

$$\mu_{n-1}(P|u^\perp) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i |u \cdot v_i|$$

Da dies für alle $u \in S^{n-1}$ gilt, folgt aus Lemma 5.12 (c)

$$\int_{S^{n-1}} \mu_{n-1}(P|u^\perp)\,du = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{S^{n-1}} |u \cdot v_i|\,du = \omega_{n-1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \omega_{n-1} S(P).$$

Aus der Gültigkeit von (5.9) für jedes Polytop $P$ und der Stetigkeit der Oberfläche folgt die Gültigkeit (5.9) für alle konvexen Körper. ■

Wir haben in Kapitel 4 gesehen, dass für Parallelotope $P \in \mathrm{Par}(n)$,

$$\mu_{n-1}(P) = \frac{1}{2} S(P).$$

Aus Steiners Formel (vgl. Kapitel 9) folgt, dass auch für allgemeine $K \in \mathcal{K}^n$,

$$\mu_{n-1}(K) = \frac{1}{2} S(K).$$

Damit können wir (5.9) in folgender Form schreiben

$$\mu_{n-1}(K) = \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mu_{n-1}(K|u^\perp)\, du. \tag{5.10}$$

Da jede Gerade $\ell$ durch den Ursprung des $\mathbb{R}^n$ die Sphäre $S^{n-1}$ in genau zwei Punkten trifft, können wir (5.10) in ein Integral über den projektiven Raum $\mathrm{Gr}(n,1)$ (d.h. die Menge aller Geraden $\ell$ durch den Ursprung des $\mathbb{R}^n$) umschreiben. Wir normieren das zugehörige Maß auf $\mathrm{Gr}(n,1)$, sodass $\mathrm{Gr}(n,1)$ Gesamtmasse 1 hat. Dann ist

$$\mu_{n-1}(K) = \alpha \int_{\mathrm{Gr}(n,1)} \mu_{n-1}(K|\ell^\perp)\, d\ell,$$

wobei $\alpha$ eine noch zu bestimmende Normierungskonstante bezeichnet. Einsetzen von $K = B_n$ liefert

$$\frac{n\omega_n}{2} = \mu_{n-1}(B_n) = \alpha \int_{\mathrm{Gr}(n,1)} \mu_{n-1}(B_n|\ell^\perp)\, d\ell = \alpha\omega_{n-1}.$$

Daraus folgt

$$\alpha = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}.$$

Wir bezeichnen mit $\tau_n$ das rotationsinvariante Maß auf $\mathrm{Gr}(n,1)$ mit Gesamtmasse

$$\tau_n(\mathrm{Gr}(n,1)) = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}. \tag{5.11}$$

Gleichung (5.10) können wir nun in folgender Form schreiben

$$\mu_{n-1}(K) = \int_{\mathrm{Gr}(n,1)} \mu_{n-1}(K|\ell^\perp)\, d\tau_n(\ell). \tag{5.12}$$

# 6 Invariante Maße auf Grassmannischen

Bevor wir uns der Verallgemeinerung der Resultate aus Kapitel 4 auf den Verband polykonvexer Mengen zuwenden können, benötigen wir ein tieferes Verständnis für den Verband von Unterräumen des $\mathbb{R}^n$. Dazu führen wir zunächst rotationsinvariante Maße auf $k$-dimensionalen Unterräumen ein. Diese führen dann zu den sogenannten Fahnenkoeffizienten sowie zu stetigen Analoga der kombinatorischen Ergebnisse aus Kapitel 3 im Kontext von Unterräumen.

## 6.1 Der Verband von Unterräumen

Die erste Definition dieses Kapitels fixiert den zentralen Untersuchungsgegenstand:

**Definition.** Die durch die Inklusionsrelation partiell geordnete Menge aller linearen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Mod}(n)$. Wir definieren die Vereinigung $x \vee y$ und den Durchschnitt $x \wedge y$ zweier Elemente $x, y \in \mathrm{Mod}(n)$ jeweils als den von $x$ und $y$ aufgespannten Unterraum bzw. als den Schnitt von $x$ und $y$. Damit wird $\mathrm{Mod}(n)$ zu einem Verband.

**Bemerkungen:**

(a) Wir werden sehen, dass $\mathrm{Mod}(n)$ als stetiges Analogon des Verbandes $P(S)$ der Potenzmenge einer $n$-elementigen Menge $S$ angesehen werden kann, mit dem großen Unterschied, dass $\mathrm{Mod}(n)$ *nicht distributiv* ist im Vergleich zu $P(S)$.

(b) Der Unterraum $\{0\}$ ist das minimale Element des Verbandes $\mathrm{Mod}(n)$.

**Definition.** Ein Unterraum $x \in \mathrm{Mod}(n)$ hat den Rang $k$ (also $r(x) = k$), wenn $x$ ein Unterraum der Dimension $k$ ist. Die Menge aller Elemente aus $\mathrm{Mod}(n)$ der Dimension (Rang) $k$ wird $k$-Grassmannische genannt und mit $\mathrm{Gr}(n, k)$ bezeichnet.

Während die Gruppe der Permutationen auf dem Verband $P(S)$ in natürlicher Weise agiert, wirkt die *orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(n)$ (die Gruppe der Rotationen um den Ursprung und Spiegelungen an Hyperebenen durch den Ursprung) in natürlicher Weise auf $\mathrm{Mod}(n)$. Unser Ziel im Folgenden ist die Konstruktion eines rotationsinvarianten Maßes auf $\mathrm{Gr}(n, k)$. Nach einem klassischen Satz ist dieses Maß bis auf einen (multiplikativen) Faktor eindeutig bestimmt (was wir nicht beweisen werden). Die Analogie von $\mathrm{Mod}(n)$ und $P(S)$ wird sich in dem Umstand zeigen, dass die Gesamtmassen der $\mathrm{Gr}(n, k)$ viele Gemeinsamkeiten mit Binomialkoeffizienten haben.

Wir betrachten zunächst das am Ende des letzten Kapitels eingeführte invariante Maß $\tau_n$ auf $\mathrm{Gr}(n, 1)$ und schreiben

$$[n] := \tau_n(\mathrm{Gr}(n, 1)) = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}. \tag{6.1}$$

Die Rolle der reellen Zahlen $[n]$ wird im Folgenden analog zu den positiven ganzen Zahlen $n$ im diskreten Fall sein.

Wir erinnern auch noch kurz an die Konstruktion des Maßes $\tau_n$. Dazu sei $\sigma_{n-1}$ das (rotationsinvariante) sphärische Lebesgue-Maß auf $S^{n-1}$. Für jede Borel Menge $A \subseteq \mathrm{Gr}(n,1)$, sei $A'$ die Teilmenge von $S^{n-1}$ definiert durch

$$A' = \bigcup_{x \in A} x \cap S^{n-1}.$$

Dann ist

$$\tau_n(A) := \frac{\sigma_{n-1}(A')}{2\omega_{n-1}},$$

womit $\tau_n$ nach Definition sicher $\mathrm{O}(n)$ invariant ist.

**Definition.** Wir bezeichnen mit $\mathrm{Flag}(n)$ die Menge aller Fahnen in $\mathrm{Mod}(n)$ und für $x \in \mathrm{Mod}(n)$, bezeichne $\mathrm{Flag}(x)$ die Menge aller Fahnen in $\mathrm{Mod}(n)$ die $x$ enthalten.

**Bemerkungen:**

(a) $\mathrm{Flag}(x)$ ist die Menge aller Tupel $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \mathrm{Mod}(n)$ und $\dim x_i = i$, sodass $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$ und eines der $x_i$ gleich $x$ ist.

(b) Für jede Fahne $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ist offenbar $x_0 = \{0\}$ und $x_n = \mathbb{R}^n$.

(c) Für festgehaltenes $x_k \in \mathrm{Mod}(n)$ ist die Menge aller Tupel $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \mathrm{Mod}(n)$, $\dim x_i = i$ und $x_i \leq x_{i+1}$ isomorph zu $\mathrm{Flag}(n-k)$. Analog ist die Menge der Tupel $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ isomorph zu $\mathrm{Flag}(k)$.

**Satz 6.1** *Auf der Menge aller Fahnen* $\mathrm{Flag}(n)$ *gibt es ein (eindeutiges) rotationsinvariantes Maß* $\phi_n$ *mit*

$$\phi_n(\mathrm{Flag}(n)) = [n]! := [n][n-1]\cdots[2][1] = \frac{n!\omega_n}{2^n}.$$

*Beweis*: Zu jeder Fahne $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathrm{Mod}(n)$ definieren wir einen *Rahmen*, d.h. ein geordnetes Tupel $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ orthogonaler Geraden, durch

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1^\perp \cap x_2, \quad y_3 = x_2^\perp \cap x_3, \quad \cdots \quad y_n = x_{n-1}^\perp \cap x_n.$$

Umgekehrt bestimmt jeder Rahmen $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine Fahne durch

$$x_0 = \{0\}, \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_1 \vee y_2, \quad x_3 = y_1 \vee y_2 \vee y_3, \quad \cdots$$

Es besteht also eine Eins-zu-Eins Beziehung zwischen Fahnen und Rahmen. Ist $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine reelle (messbare) Funktion auf Fahnen und $\overline{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ die entsprechende Funktion auf Rahmen, dann definieren wir

$$\int f\, d\phi_n = \int\int\cdots\int \overline{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, d\tau_1(y_n)\, d\tau_2(y_{n-1}) \cdots d\tau_n(y_1). \tag{6.2}$$

Das so definierte Maß $\phi_n$ ist offenbar rotationsinvariant und hat das behauptete Gesamtmaß nach (6.1). ■

**Bemerkung:**

(a) Formel (6.2) hat eine einfache kombinatorische Interpretation: Wurde die Gerade $y_1$ gewählt, was auf $\tau_n$ viele Arten erfolgen kann, so ist der Unterraum $x_2$ durch die Wahl einer Geraden $y_2$ im zu $x_1$ orthogonalen Komplement bestimmt, diese kann auf $\tau_{n-1}$ viele Arten gewählt werden, usw.

Wir können nun ein rotationsinvariantes Maß auf $\mathrm{Gr}(n,k)$ definieren.

**Definition.** Für $A \subseteq \mathrm{Gr}(n,k)$ sei $\mathrm{Flag}(A)$ die Menge aller Fahnen $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_k \in A$. Wir definieren das rotationsinvariante Maß $\nu_k^n$ auf $\mathrm{Gr}(n,k)$ durch

$$\nu_k^n(A) = \frac{1}{[k]![n-k]!}\, \phi_n(\mathrm{Flag}(A)). \tag{6.3}$$

Die Gesamtmassen der $\nu_k^n$, also die Zahlen

$$\nu_k^n(\mathrm{Gr}(n,k)) = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k} \frac{\omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}}, \tag{6.4}$$

werden *Fahnenkoeffizienten* genannt.

**Bemerkungen:**

(a) Um die (kombinatorische) Normierung der $\nu_k^n$ zu begründen, beachte, dass es zu jedem $x_k \in A$ genau $[k]![n-k]!$ Fahnen gibt die $x_k$ enthalten: Um eine Fahne die $x_k$ enthält zu wählen, muss einerseits ein Rahmen für $x_k$ gewählt werden, von denen es $[k]!$ viele gibt, und andererseits ein Rahmen für $x_k^\perp$, von denen es $[n-k]!$ viele gibt.

(b) Fahnenkoeffizienten sind stetige Analoga der Binomialkoeffizienten.

## 6.2 Eigenschaften der Fahnenkoeffizienten

Wir wollen als erstes etwas greifbarere Werte für die Fahnenkoeffizienten herleiten. Dazu folgern wir zunächst aus (5.8) und (6.1) das

**Korollar 6.2** *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \qquad \textit{und} \qquad \omega_{2k+1} = \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k+1)!}$$

*und daher*

$$[2k] = \frac{2\pi k}{4^k}\binom{2k-1}{k} \qquad \textit{und} \qquad [2k+1] = 4^k \binom{2k}{k}^{-1}.$$

Aus Korollar 6.2 folgen nun direkt einfache Ausdrücke für die Fahnenkoeffizienten.

**Satz 6.3** *Für $k, m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\begin{bmatrix} 2m \\ 2k \end{bmatrix} = \binom{2m}{2k}\binom{m}{k}^{-1} \qquad \textit{und} \qquad \begin{bmatrix} 2m \\ 2k+1 \end{bmatrix} = \frac{2m\pi}{4^m}\binom{2m-1}{k, m, m-k-1}$$

*während*

$$\begin{bmatrix} 2m+1 \\ 2k \end{bmatrix} = 4^k\binom{m}{k}\binom{2k}{k}^{-1} \qquad \textit{und} \qquad \begin{bmatrix} 2m+1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} = 4^{m-k}\binom{m}{m-k}\binom{2(m-k)}{m-k}^{-1}.$$

Fahnenkoeffizienten besitzen eine Reihe analoger Eigenschaften zu denen von Binomialkoeffizienten, so folgt etwa direkt aus (6.4),

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Die Pascalsche Gleichung für Binomialkoeffizienten (welche die Grundlage für das Pascalsche Dreieck bildet)

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \tag{6.6}$$

hat für Fahnenkoeffizienten allerdings eine etwas kompliziertere Form, welche sich sofort aus (6.4) und (6.6) ergibt:

**Satz 6.4** *Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n-1$ gilt*

$$\frac{\omega_{k-1}\omega_{n-k}}{\omega_{n-1}}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \frac{\omega_k\omega_{n-k-1}}{\omega_{n-1}}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{\omega_k\omega_{n-k}}{\omega_n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

**Bemerkung:**

(a) Das Pascalsche Dreieck für Fahnenkoeffizienten hat folgende Form:

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad \frac{\pi}{2} \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad \frac{3\pi}{4} \quad 3 \quad \frac{3\pi}{4} \quad 1 \\
1 \quad \frac{8}{3} \quad 4 \quad 4 \quad \frac{8}{3} \quad 1 \\
1 \quad \frac{15\pi}{16} \quad 5 \quad \frac{15\pi}{8} \quad 5 \quad \frac{15\pi}{16} \quad 1 \\
1 \quad \frac{16}{5} \quad 6 \quad 8 \quad 8 \quad 6 \quad \frac{16}{5} \quad 1 \\
1 \quad \frac{35\pi}{32} \quad 7 \quad \frac{105\pi}{32} \quad \frac{35}{3} \quad \frac{105\pi}{32} \quad 7 \quad \frac{35\pi}{32} \quad 1
\end{array}$$

Ein zu (6.6) analoger Ausdruck gilt für Fahnenkoeffizienten immer noch mit einer Ungleichheitsrelation. Zum Beweis beachte, dass das Volumen der $n$-dimensionalen Einheitskugel durch Integration über $(n-1)$-Sphären (unterschiedlicher Radien) berechnet werden kann:

$$\omega_n = 2\int_0^1 \omega_{n-1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta d\theta \end{matrix} \right| = 2\omega_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,d\theta.$$

**Lemma 6.5** *Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$[n] + [m] > [n+m].$$

*Beweis*: Da $0 \le \cos\theta \le 1$ wenn $0 \le \theta \le \pi/2$, folgt aus

$$[n] = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}} = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta$$

sofort

$$\begin{aligned} [n] + [m] &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta + m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta\ d\theta \\ &> (n+m)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+m}\theta d\theta = [n+m]. \end{aligned}$$

■

**Satz 6.6 (Pascalsche Ungleichung für Fahnenkoeffizienten)** *Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n-1$ gilt*

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

*Beweis*: Da $[k] + [n-k] > [k + (n-k)] = [n]$ nach Lemma 6.5, folgt

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n-1]!([k]+[n-k])}{[k]![n-k]!} > \frac{[n-1]![n]}{[k]![n-k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

■

Der klassische Binomialkoeffizient wird für festes $n$ durch $k = \langle n/2 \rangle$ maximiert. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass dies auch für die Fahnenkoeffizienten zutrifft. Dazu benötigen wir

**Lemma 6.7** *Die Abbildung $n \mapsto [n]$ ist eine monoton wachsende Funktion.*

*Beweis*: Nach (6.1) und (5.8) ist

$$[n] = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}} = \frac{n\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{n\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ sei definiert durch

$$f(t) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(t+\frac{1}{2})}{\Gamma(t)}.$$

Dann ist $f(\frac{n}{2}) = [n]$ und es genügt zu zeigen, dass $f$ monoton wachsend in $t$ ist. Dazu verwenden wir die bekannte Darstellung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^t k!}{t(t+1)\cdots(t+k)}.$$

Damit folgt für $f$ die Darstellung

$$f(t) = \sqrt{\pi} \lim_{k\to\infty} \frac{t(t+1)\cdots(t+k)\sqrt{k}}{(t+\frac{1}{2})(t+\frac{1}{2}+1)\cdots(t+\frac{1}{2}+k)}. \tag{6.7}$$

Da die Funktion $t \mapsto t/(t+\frac{1}{2})$ für $t > 0$ monoton steigend ist, gilt dies auch für das Produkt auf der rechten Seite von (6.7). Damit ist auch $f$ monoton wachsend. ■

**Satz 6.8** *Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n \\ \langle n/2 \rangle \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

*Beweis*: Wir zeigen zunächst für $1 \leq k \leq l \leq n/2$ die Ungleichung

$$[k]![n-k]! \geq [l]![n-l]!. \tag{6.9}$$

Dazu beachte, dass nach Lemma 6.7 wegen $0 \leq k \leq l \leq \frac{n}{2} \leq n-l \leq n-k \leq n$ gilt

$$[n-l+1]\cdots[n-k] \geq [k+1]\cdots[l].$$

Durch Multiplikation von $[k]![n-l]!$ auf beiden Seiten folgt daraus (6.9). Für den Beweis von (6.8), genügt es wegen (6.5) den Fall $k < \langle n/2 \rangle$ zu betrachten. Eine Anwendung von (6.9) auf den Fall $l = \langle n/2 \rangle$ liefert

$$[n-k]![k]! \geq [\langle n/2 \rangle]![n - \langle n/2 \rangle]!,$$

woraus auf einfache Weise (6.8) folgt. ■

### 6.3 Ein stetiges Analogon zum Satz von Sperner

Mit Hilfe der direkten Summe der Maße $\nu_k^n$ definieren wir ein Maß $\nu_n$ auf $\mathrm{Mod}(n)$: Für jede messbare Teilmenge $A \subseteq \mathrm{Mod}(n)$ sei

$$\nu_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \nu_k^n(A \cap \mathrm{Gr}(n,k)).$$

Das Maß $\nu_n$ erfüllt das folgende Analogon der klassischen L.Y.M. Ungleichung (3.2).

**Satz 6.9 (Stetige L.Y.M. Ungleichung)** *Es sei $A \subseteq \mathrm{Mod}(n)$ eine Antikette. Für $0 \leq k \leq n$ sei $A_k = A \cap \mathrm{Gr}(n,k)$, sodass*

$$A = \bigcup_k A_k$$

*eine disjunkte Vereinigung ist. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\nu_k^n(A_k)}{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}} \leq 1. \tag{6.10}$$

*Beweis*: Nach Definition (6.3) ist für jedes $0 \leq k \leq n$ das Maß der Fahnen die $A_k$ treffen, gegeben durch

$$\phi_n(\mathrm{Flag}(A_k)) = \nu_k^n(A_k)\,[k]![n-k]!.$$

Da jede Fahne in $\mathrm{Flag}(n)$ die Menge $A$ in höchstens einem Element schneidet, gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \nu_k^n(A_k)\,[k]![n-k]! = \sum_{k=0}^{n} \phi_n(\mathrm{Flag}(A_k)) = \phi_n(\mathrm{Flag}(A)) \leq [n]!$$

woraus sofort (6.10) folgt. ∎

Aus Satz 6.9 folgt (mit demselben Beweis wie im diskreten Setting) ein stetiges Analogon zum Satz von Sperner.

**Satz 6.10 (Stetiger Satz von Sperner)** *Es sei $A$ eine Antikette in* $\mathrm{Mod}(n)$. *Dann ist*

$$\nu_n(A) \leq \begin{bmatrix} n \\ \langle n/2 \rangle \end{bmatrix}$$

*mit Gleichheit für* $A = \mathrm{Gr}(n, \langle n/2 \rangle)$.

**Definition.** Es sei $1 \leq r \leq n+1$ eine natürliche Zahl. Wir nennen eine Teilmenge $F \subseteq \mathrm{Mod}(n)$ eine $r$-*Familie*, wenn Ketten in $F$ nicht mehr als $r$ Elemente enthalten.

Für eine $r$-Familie $F$ in $\mathrm{Mod}(n)$ bezeichne $F_k = F \cap \mathrm{Gr}(n,k)$. Da jede Fahne in $\mathrm{Mod}(n)$ die $r$-Familie $F$ in höchstens $r$ Elementen schneidet, gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \phi_n(\mathrm{Flag}(F_k)) \leq [n]! \cdot r.$$

Aus (6.3) erhalten wir sofort die folgende Verallgemeinerung von (6.10):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\nu_k^n(F_k)}{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}} \leq r. \tag{6.11}$$

Aus Ungleichung (6.11) folgt wiederum (mit demselben Beweis) ein stetiges Analogon von Satz 3.3:

**Satz 6.11** *Es sei $F$ eine $r$-Familie in* $\mathrm{Mod}(n)$. *Dann gilt*

$$\nu_n(F) \leq \begin{bmatrix} n \\ \langle \frac{n+1}{2} \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ \langle \frac{n+2}{2} \rangle \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ \langle \frac{n+r}{2} \rangle \end{bmatrix}.$$

Schließlich betrachten wir noch ein stetiges Analogon einer Frage von Sperner (die wir mit Satz 3.14 beantwortet hatten). Für $A \subseteq \mathrm{Gr}(n,k)$ und $0 \leq l \leq k \leq n$ bezeichne $[A]_l$ die Menge

$$[A]_l = \{W \in \mathrm{Gr}(n,l) : W \subseteq V \text{ für ein } V \in A\}.$$

Gibt es eine untere Schranke für das Maß von $[A]_l$ in Bezug auf das Maß $\nu_n(A)$. Ganz analog zum diskreten Setting folgt aus der stetigen L.Y.M. Ungleichung:

**Satz 6.12** *Für $A \subseteq \mathrm{Gr}(n,k)$ ist*

$$\nu_n([A]_l) \geq \frac{[k]![n-k]!}{[l]![n-l]!}\nu_n(A).$$

### 6.4 Ein stetiges Analogon zum Satz von Meshalkin

Nun wenden wir uns $r$-Zerlegungen und $s$-Systemen auf dem Verband $\mathrm{Mod}(n)$ zu.

**Definition.** Eine Abbildung $\delta : \{1,...,r\} \to \mathrm{Mod}(n)$ heißt $r$-Zerlegung von $\mathbb{R}^n$, wenn

(i) $\delta(i) \perp \delta(j)$ für $i \neq j$;

(ii) $\delta(1) \oplus \cdots \oplus \delta(r) = \mathbb{R}^n$.

Es bezeichne $\mathrm{Dec}(n,r)$ die Menge aller $r$-Zerlegungen von $\mathbb{R}^n$.

**Bemerkung.** Für jedes $\delta \in \mathrm{Dec}(n,r)$ ist offenbar

$$\dim \delta(1) + \cdots + \dim \delta(r) = n.$$

**Definition.** Für $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ mit $a_1 + \cdots + a_r = n$ bezeichne $\mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$ die Menge aller $r$-Zerlegungen $\delta$ von $\mathbb{R}^n$, sodass $\dim \delta(i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

**Bemerkungen.**

(a) $\mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$ ist die Menge aller (geordneten) Zerlegungen von $\mathbb{R}^n$ in orthogonale direkte Summen von Unterräumen der Dimensionen $a_1, \ldots, a_r$.

(b) Die Menge $\mathrm{Dec}(n,r)$ kann offenbar als endliche disjunkte Vereinigung

$$\mathrm{Dec}(n,r) = \biguplus_{a_1+\cdots+a_r=n} \mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$$

dargestellt werden.

**Definition.** Ein *$s$-System* der Ordnung $r$ ist eine Teilmenge $\sigma \subseteq \mathrm{Dec}(n,r)$, sodass für jedes $1 \leq i \leq r$ die Menge $\{\delta(i) : \delta \in \sigma\}$ eine Antikette in $\mathrm{Mod}(n)$ ist.

**Beispiele.**

(a) Die Mengen $\mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$ sind $s$-Systeme der Ordnung $r$.

(b) $s$-Systeme der Ordnung 2
Ist $A$ eine Antikette in $\mathrm{Mod}(n)$, dann ist die Menge $\sigma = \{(V, V^\perp) : V \in A\}$ ein $s$-System der Ordnung 2.

(c) Die $k$-Grassmannische $\mathrm{Gr}(n,k)$ kann mit dem $s$-System $\mathrm{Mult}(n; k, n-k)$ über die Bijektion $V \mapsto (V, V^\perp)$ identifiziert werden.

In Analogie zur Konstruktion des Maßes $\nu_k^n$ auf $\mathrm{Gr}(n,k)$ wollen wir nun invariante Maße auf $\mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$ definieren.

**Definition.** Eine Fahne $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Flag}(n)$ heißt mit $\delta \in \mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$ *kompatibel*, wenn

(i) $x_{a_1} = \delta(1)$;

(ii) $x_{a_1+\cdots+a_{i-1}}^{\perp_i} = \delta(i)$ für $i \geq 2$.

Dabei ist $x_{a_1+\cdots+a_{i-1}}^{\perp_i}$ das orthogonale Komplement von $x_{a_1+\cdots+a_{i-1}}$ in $x_{a_1+\cdots+a_i}$. Ist $A \subseteq \mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)$ so schreiben wir $\mathrm{Flag}(A)$ für die Menge aller Fahnen die mit einem $\delta \in A$ kompatibel sind und definieren

$$\nu_{a_1,\ldots,a_r}^n(A) = \frac{1}{[a_1]![a_2]!\cdots[a_r]!}\phi_n(\mathrm{Flag}(A)).$$

Das so definierte Maß $\nu_{a_1,\ldots,a_r}^n$ ist offenbar invariant unter Rotationen und es gilt

**Proposition 6.13**

$$\nu_{a_1,\ldots,a_r}^n(\mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)) = \frac{[n]!}{[a_1]!\cdots[a_r]!} = \begin{bmatrix} n \\ a_1, \ldots, a_r \end{bmatrix}.$$

Durch direkte Summenbildung der Maße $\nu_{a_1,\ldots,a_r}^n$ können wir nun auch ein Maß $\nu_{n;r}$ auf $\mathrm{Dec}(n,r)$ definieren: Für jede messbare Teilmenge $A \subseteq \mathrm{Dec}(n,r)$ sei

$$\nu_{n;r}(A) = \sum_{a_1+\cdots+a_r=n} \nu_{a_1,\ldots,a_r}^n(A \cap \mathrm{Mult}(n; a_1, \ldots, a_r)).$$

Analog zu Satz 3.6 beweist man nun leicht:

**Satz 6.14 (Stetige multinomiale L.Y.M. Ungleichung)** *Es sei* $\sigma \subseteq \mathrm{Dec}(n,r)$ *ein s-System und für* $a_1 + \cdots + a_r = n$ *sei* $\sigma_{a_1,\ldots,a_r} = \sigma \cap \mathrm{Mult}(n; a_1, ..., a_r)$, *sodass*

$$\sigma = \biguplus_{a_1+\cdots+a_r=n} \sigma_{a_1,\ldots,a_r}.$$

*Dann gilt*

$$\sum_{a_1+\cdots+a_r=n} \frac{\nu_{a_1,\ldots,a_r}^n(\sigma_{a_1,\ldots,a_r})}{\begin{bmatrix} n \\ a_1,\ldots,a_r \end{bmatrix}} \leq 1. \tag{6.12}$$

In Analogie zu den Multinomialkoeffizienten erfüllen die *Multifahnenkoeffizienten* folgende Eigenschaft.

**Satz 6.15** *Sind* $r, n \in \mathbb{N}$ *mit* $r \leq n$ *und* $n \equiv b \bmod r$, *dann gilt für* $a_1 + \cdots + a_r = n$,

$$\begin{bmatrix} n \\ a_1, \ldots, a_r \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} n \\ \underbrace{\langle n/r\rangle, \ldots, \langle n/r\rangle}_{r-b} \underbrace{\langle n/r\rangle + 1, \ldots, \langle n/r\rangle + 1}_{b} \end{bmatrix}.$$

*Beweis*: Es seien $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ mit $a_1 + \cdots + a_r = n$. O.B.d.A. können wir $a_1 < \langle n/r \rangle$ annehmen. Da dann $a_i > \langle n/r \rangle$ für ein $i > 1$ gelten muss, können wir o.B.d.A. $a_1 < \langle n/r \rangle < a_2$ annehmen. Dann ist $a_2 - a_1 \geq 2$, sodass

$$a_1 < \left\langle \frac{a_1 + a_2}{2} \right\rangle < a_2.$$

Aus Ungleichung (6.9) folgt nun

$$[a_1 + 1]![a_2 - 1]! \leq [a_1]![a_2]!.$$

Ersetze nun $a_1$ durch $a_1+1$ und $a_2$ durch $a_2-1$, wodurch die Identität $a_1+\cdots+a_r = n$ erhalten bleibt, und wiederhole diesen Prozess bis $a_i \geq \langle n/r \rangle$ für alle $1 \leq i \leq r$, d.h. bis $a_i = \langle n/r \rangle + 1$ für $1 \leq i \leq b$ und $a_i = \langle n/r \rangle$ für $b + 1 \leq 1 \leq r$. Da jede Iteration den Wert des Produkts $[a_1]! \cdots [a_r]!$ verkleinert, folgt

$$[a_1]! \cdots [a_r]! \geq ([\langle n/r \rangle]!)^{r-b}([\langle n/r \rangle + 1]!)^b$$

für alle $a_1 + \cdots + a_r = n$. Deshalb ist

$$\frac{[n]!}{[a_1]! \cdots [a_r]!} \leq \frac{[n]!}{[[\langle n/r \rangle]!)^{r-b}([\langle n/r \rangle + 1]!)^b}$$

für alle $a_1 + \cdots + a_r = n$. ∎

Aus den Sätzen 6.14 und 6.15 folgt nun direkt ein stetiges Analogon zum Satz von Meshalkin.

**Satz 6.16 (Stetiger Satz von Meshalkin)** *Ist $\sigma$ ein s-System in* $\mathrm{Dec}(n, r)$*, dann gilt*

$$\nu_{n;r}(\sigma) \leq \left[ \begin{matrix} n \\ \underbrace{\langle n/r \rangle, ..., \langle n/r \rangle}_{r-b}, \underbrace{\langle n/r \rangle + 1, ..., \langle n/r \rangle + 1}_{b} \end{matrix} \right],$$

*wobei $n \equiv b$ mod $r$.*

## 6.5 Der Satz von Helly für Unterräume

Wir beschließen Kapitel 6 mit folgender Variante des Satzes von Helly.

**Satz 6.17 (Satz von Helly für** $\mathrm{Mod}(n)$**)** *Es sei $F$ eine Familie nicht-trivialer Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Gilt für jede Teilmenge $G \subseteq F$ mit $|G| \leq n$, dass*

$$\dim \left( \bigcap_{x \in G} x \right) > 0,$$

*dann ist*

$$\dim \left( \bigcap_{x \in F} x \right) > 0.$$

*Beweis*: Wir nehmen zunächst an, dass $F$ eine *endliche* Familie von Unterräumen ist und beweisen die Behauptung durch Induktion nach der Anzahl $|F|$ der Elemente von $F$. Ist $|F| \leq n$, dann ist die Aussage trivial. Wir nehmen daher an, der Satz gilt für $|F| = m$ für ein $m \geq n$ und zeigen, dass dieser dann auch für $|F| = m + 1$ gilt.

Es sei $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\}$ und für $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ sei

$$y_i = \bigcap_{j \neq i} x_j. \tag{6.13}$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat jedes $y_i$ positive Dimension. Das heißt, für jedes $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ existiert ein von Null verschiedener Vektor $v_i \in y_i$. Da $m \geq n$, ist die Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ linear abhängig. O.B.d.A. können wir annehmen, dass

$$v_{m+1} = c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m,$$

wobei nicht alle $c_i$ Null sind. Nach (6.13) ist $v_i \in x_{m+1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Daraus folgt, dass auch $v_{m+1} \in x_{m+1}$. Da aber auch $v_{m+1} \in y_{m+1}$, erhalten wir

$$v_{m+1} \in \bigcap_{j=1}^{m+1} x_j,$$

womit der Induktionsschritt und der Satz für endliche $F$ gezeigt ist.

Zum Beweis des allgemeinen Falls, betrachte zu einem von Null verschiedenen Unterraum $x$ die Menge $\tilde{x}$ aller Geraden durch den Ursprung, die in $x$ enthalten sind:

$$\tilde{x} = \{\ell \in \mathrm{Gr}(n, 1) : \ell \subseteq x\}.$$

Für alle von Null verschiedenen $x \in \mathrm{Mod}(n)$ ist $\tilde{x}$ eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes $\mathrm{Gr}(n, 1)$. Wir definieren nun weiters

$$\tilde{F} = \{\tilde{x} : x \in F\} \qquad \text{und} \qquad \tilde{G} = \{\tilde{x} : x \in G\}.$$

Angenommen $G$ ist eine *endliche* Unterfamilie von Unterräumen aus $F$. Da $F$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, gilt dies auch für die Unterfamilie $G$. Da aber $G$ endlich ist, folgt aus dem ersten Teil des Beweises

$$\dim \left( \bigcap_{x \in G} x \right) > 0.$$

Damit hat jede endliche Unterfamilie $\tilde{G}$ (von abgeschlossenen Mengen) der Familie $\tilde{F}$ einen nicht-leeren Schnitt. Es folgt aus der Kompaktheit von $\mathrm{Gr}(n, 1)$, dass die Familie $\tilde{F}$ von abgeschlossenen Mengen einen nicht-leeren Schnitt hat, womit der Schnitt aller Unterräume in $F$ positive Dimension besitzt. ∎

# 7 Innere Volumina polykonvexer Mengen

Um innere Volumina vom Verband der Parallelotope auf den größeren Verband polykonvexer Mengen fortzusetzen, betrachten wir zunächst statt der Grassmanischen ($k$-Ebenen durch den Ursprung im $\mathbb{R}^n$) die affinen Grassmanischen (alle $k$-Ebenen im $\mathbb{R}^n$). Ein weiteres entscheidendes Werkzeug wird in diesem Abschnitt wieder die Euler Charakteristik sein, welche wir zum Testen, ob eine kompakte konvexe Menge eine gegebene $k$-Ebene schneidet, verwenden. Am Ende dieses Abschnitts stellen wir mit einer vorläufigen Version der Projektionsformel eine fundamentale Verbindung zwischen den inneren Volumina und dem Verband der Unterräume her.

## 7.1 Die affinen Grassmannischen

Wir beginnen wieder mit einer zentralen

**Definition.** Wir bezeichnen die (durch die Inklusionsrelation) partiell geordnete Menge aller affinen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{Aff}(n)$. Die Teilmenge von $\mathrm{Aff}(n)$ aller Elemente vom Rang (bzw. der Dimension) $k$ heißt die affine $k$-Grassmannische und wird mit $\mathrm{AGr}(n,k)$ bezeichnet.

**Bemerkungen:**

(a) Das minimale Element von $\mathrm{Aff}(n)$ ist die leere Menge, nicht $\{0\}$ wie in $\mathrm{Mod}(n)$.

(b) Die Euklidische Bewegungsgruppe $\mathrm{E}(n)$, also die Gruppe der Translationen und orthogonalen Transformationen, wirkt auf $\mathrm{Aff}(n)$ in natürlicher Weise.

Wir wollen nun ein Maß $\lambda_k^n$ auf $\mathrm{AGr}(n,k)$ konstruieren, welches invariant unter der Aktion von $\mathrm{E}(n)$ ist. Zu diesem Zweck parametrisieren wir $\mathrm{AGr}(n,k)$ wie folgt: Für $V \in \mathrm{AGr}(n,k)$ bezeichne $V^\perp$ den maximalen *linearen* Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der zu $V$ orthogonal ist. Dann gibt es einen eindeutigen $k$-dimensionalen linearen Unterraum $\mathrm{or}(V)$, der orthogonal zu $V^\perp$ ist. Wir nennen $V$ und $\mathrm{or}(V)$ *parallel*. Beachte, dass $\mathrm{or}(V)^\perp = V^\perp$. Die Menge $V \cap V^\perp$ ist ein Punkt in $V$ den wir mit $p(V)$ bezeichnen. Es gibt also zu jedem $V \in \mathrm{AGr}(n,k)$ ein eindeutig bestimmtes Paar $(\mathrm{or}(V), p)$ mit $\mathrm{or}(V) \in \mathrm{Gr}(n,k)$ und $p \in \mathrm{or}(V)^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$. Sind umgekehrt $V_0 \in \mathrm{Gr}(n,k)$ und $p \in V_0^\perp$ gegeben, dann gibt es einen eindeutigen affinen Unterraum $V \in \mathrm{AGr}(n,k)$, sodass $\mathrm{or}(V) = V_0$ und $V \cap V_0^\perp = p$.

Für $V \in \mathrm{AGr}(n,k)$ und $p \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $V+p$ das Translat von $V$ um den Vektor $p$. Für eine reellwertige messbare Funktion $f$ auf $\mathrm{AGr}(n,k)$ definieren wir $\overline{f} : \mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\overline{f}(V_0,p) = f(V_0+p)$$

und das $\mathrm{E}(n)$ invariante Maß $\lambda_k^n$ auf $\mathrm{AGr}(n,k)$ durch

$$\int_{\mathrm{AGr}(n,k)} f\,d\lambda_k^n = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} \overline{f}(V_0,p)\,dp\,d\nu_k^n(V_0),$$

wobei $dp$ das gewöhnliche Lebesgue-Maß auf $V_0^\perp \cong \mathbb{R}^{n-k}$ bezeichnet.

## 7.2 Innere Volumina und die Formel von Hadwiger

Wir fixieren wieder ein orthogonales Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ und betrachten den Verband $\mathrm{Par}(n)$ aller endlichen Vereinigungen von Parallelotopen, deren Seiten parallel zu diesem festen Koordinatensystem sind.

**Notation.** Für $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathrm{AGr}(A;k)$ die Menge aller $V \in \mathrm{AGr}(n,k)$ mit $A \cap V \neq \emptyset$.

Wir leiten im Folgenden eine wichtige Beziehung zwischen den auf $\mathrm{Par}(n)$ definierten inneren Volumina aus Kapitel 4 und dem invarianten Maß $\lambda_k^n$ auf $\mathrm{AGr}(n,k)$ her. Dazu benötigen wir zunächst

**Lemma 7.1** *Es seien $A$ und $B$ konvexe Körper im $\mathbb{R}^n$, sodass auch $A \cup B$ konvex ist. Ist $V$ ein affiner Unterraum positiver Dimension mit $V \cap A \neq \emptyset$ und $V \cap B \neq \emptyset$, dann ist auch $V \cap A \cap B \neq \emptyset$.*

*Beweis*: Die Menge $V \cap (A \cup B) = (V \cap A) \cup (V \cap B)$ ist als Schnitt zweier konvexer Mengen selbst wieder konvex. Angenommen $V \cap A \cap B$ wäre leer. Dann gibt es Punkte $a \in (V \cap A) \backslash (V \cap B)$ und $b \in (V \cap B) \backslash (V \cap A)$. Es sei $I$ das Geradensegment mit Endpunkten $a$ und $b$. Offenbar ist $I \subseteq V$. Da $A \cup B$ konvex ist, haben wir $I \subseteq A \cup B$, sodass $I = (I \cap A) \cup (I \cap B)$. Da $I$ zusammenhängend ist und $I \cap A$ und $I \cap B$ abgeschlossen sind, folgt

$$I \cap (A \cap B) = (I \cap A) \cap (I \cap B) \neq \emptyset,$$

im Widerspruch zur Annahme, dass $V \cap A \cap B = \emptyset$. ■

Als direkte Folgerung von Lemma 7.1 notieren wir: Sind $A$ und $B$ konvexe Körper im $\mathbb{R}^n$, sodass auch $A \cup B$ konvex ist, dann gilt für jedes $k > 0$

$$\mathrm{AGr}(A \cap B; k) = \mathrm{AGr}(A;k) \cap \mathrm{AGr}(B;k),$$

womit

$$\lambda_k^n(\mathrm{AGr}(A \cup B;k)) = \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(A;k)) + \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(B;k)) - \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(A \cap B;k)). \quad (7.1)$$

**Satz 7.2** *Für alle Parallelotope $P \in \mathrm{Par}(n)$ gilt*

$$\mu_{n-k}(P) = C_k^n \, \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(P;k)), \quad (7.2)$$

*wobei die Konstanten $C_k^n$ nur von $n$ und $k$ abhängen.*

**Bemerkungen:**

(a) Beachte, dass Gleichung (7.2) nur für Parallelotope und nicht für beliebige endliche Vereinigungen von Parallelotopen gilt.

(b) In Kapitel 9 werden wir $C_n^k = 1$ für alle $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$ beweisen.

*Beweis*: Wir definieren zunächst eine Bewertung $\eta$ auf Parallelotopen durch

$$\eta(P) = \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(P;k)). \tag{7.3}$$

Aus (7.1) und Satz 4.3 folgt, dass $\eta$ eine eindeutige Fortsetzung zu einer Bewertung auf ganz $\mathrm{Par}(n)$ besitzt (Gleichung (7.3) gilt jedoch *nicht* für beliebige endliche Vereinigungen von Parallelotopen). Aus der Invarianz von $\lambda_k^n$ folgt die $\mathrm{E}(n)$-Invarianz der Bewertung $\eta$.

Es sei nun $P$ ein Parallelotop und $f_P$ die Indikatorfunktion von $\mathrm{AGr}(P;k)$ in $\mathrm{AGr}(n,k)$. Dann gilt

$$\lambda_k^n(\mathrm{AGr}(P;k)) = \int_{\mathrm{AGr}(n,k)} f_P(V)\, d\lambda_k^n(V) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} \overline{f}_P(V_0,p)\, dp\, d\nu_k^n(V_0).$$

Für festes $V_0 \in \mathrm{Gr}(n,k)$ ist

$$\overline{f}_P(V_0,p) = f_P(V_0+p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn}(V_0+p)\cap P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist genau dann $\overline{f}_P(V_0,p) = 1$ wenn $p \in P|V_0^\perp$. Anders ausgedrückt ist die Funktion $\overline{f}_P(V_0,p)$ die Indikatorfunktion $I_{P|V_0^\perp}$ von $P|V_0^\perp$. Für $\alpha > 0$ gilt daher

$$\begin{aligned} \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(\alpha P;k)) &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} I_{\alpha P|V_0^\perp}(p)\, dp\, d\nu_k^n(V_0) \\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mathrm{vol}_{n-k}(\alpha P|V_0^\perp)\, d\nu_k^n(V_0), \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{vol}_{n-k}$ das $(n-k)$-dimensionale Volumen im $(n-k)$-dimensionalen Raum $V_0^\perp$ bezeichnet. Da $(n-k)$-dimensionales Volumen homogen vom Grad $n-k$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \eta(\alpha P) &= \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(\alpha P;k)) = \alpha^{n-k} \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mathrm{vol}_{n-k}(P|V_0^\perp)\, d\nu_k^n(V_0) \\ &= \alpha^{n-k}\lambda_k^n(\mathrm{AGr}(P;k)) = \alpha^{n-k}\eta(P). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Damit ist $\eta$ homogen vom Grad $n-k$ auf Parallelotopen und daher auf ganz $\mathrm{Par}(n)$. Da $\mathrm{vol}_{n-k}$ stetig auf konvexen Körpern in $V_0^\perp$ ist, folgt aus (7.4) auch die Stetigkeit von $\eta$. Nach Korollar 4.10 gibt es daher eine Konstante $\gamma_k^n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\eta(P) = \gamma_k^n\, \mu_{n-k}(P)$$

für alle $P \in \mathrm{Par}(n)$. Aus (7.4) folgt weiters, dass $\eta(P) > 0$, wenn $P$ nicht-leeres Inneres im $\mathbb{R}^n$ hat. Daher ist $\gamma_k^n \neq 0$. Setzen wir nun $C_k^n = 1/\gamma_k^n$, so erhalten wir

$$\mu_{n-k}(P) = C_k^n\, \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(P;k))$$

für alle Parallelotope $P \in \mathrm{Par}(n)$. ■

Nach Satz 7.2 berechnen die inneren Volumina $\mu_{n-k}$, welche wir für Parallelotope als symmetrische Funktionen der Seitenlängen definiert hatten, das Maß der Menge aller $k$-dimensionalen Ebenen, die das gegebene Parallelotop schneiden. Dies legt die nachfolgende Definition von $\mu_{n-k}$ für allgemeine konvexe Körper nahe. Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Groemer können wir diese dann auf polykonvexe Mengen fortsetzen:

**Definition.** Wir definieren die stetige Funktion $\mu_{n-k}^n : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\mu_{n-k}^n(K) = C_k^n\, \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(K;k)). \tag{7.5}$$

Aus (7.1) und (7.4) folgt, dass $\mu_{n-k}^n$ eine stetige Bewertung auf konvexen Körpern ist. Nach Satz 5.3 besitzt $\mu_{n-k}^n$ daher eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathrm{Polycon}(n)$, der Menge aller polykonvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$.

Beachte, dass Gleichung (7.5) nur für konvexe $K \in \mathrm{Polycon}(n)$ gilt. Wir können jedoch mit Hilfe der Euler Charakteristik eine explizite Darstellung der Fortsetzung von $\mu_{n-k}^n$ auf $\mathrm{Polycon}(n)$ angeben:

**Satz 7.3 (Formel von Hadwiger)** *Für alle* $A \in \mathrm{Polycon}(n)$ *ist*

$$\mu_{n-k}^n(A) = C_k^n \int_{\mathrm{AGr}(n,k)} \mu_0(A \cap V)\, d\lambda_k^n(V). \tag{7.6}$$

*Beweis*: Aus der Stetigkeit und der Bewertungseigenschaft der Euler-Charakteristik $\mu_0$ folgt, dass die rechte Seite von (7.6) eine stetige Bewertung auf $\mathrm{Polycon}(n)$ ist. Da aber $\mu_0(K \cap V) = I_{\mathrm{AGr}(K;k)}(V)$, wenn $K$ ein konvexer Körper ist, haben wir

$$\int_{\mathrm{AGr}(n,k)} \mu_0(A \cap V)\, d\lambda_k^n(V) = \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(K;k))$$

für alle $K \in \mathcal{K}^n$, womit die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung in Groemers Satz 5.3 folgt. ■

Nach Korollar 4.6 sind die inneren Volumina auf $\mathrm{Par}(n)$ unabhängig von der Dimension des Umgebungsraumes normiert. Wir werden in Kapitel 8 sehen, dass sich diese Eigenschaft auf die durch (7.6) definierte Fortsetzung überträgt, sodass der Name „innere Volumina“ gerechtfertigt bleibt. Bis dahin verwenden wir jedoch weiter die Notation $\mu_k^n$ für das $k$-te innere Volumen auf $\mathrm{Polycon}(n)$, mit Ausnahme von $\mu_0$, welches offensichtlich unabhängig von der Dimension des Umgebungsraumes normiert ist, da $\mu_0(K) = 1$ für alle nicht-leeren konvexen Körper $K$.

Mit Hilfe der durch (7.5) definierten inneren Volumina können wir nun (1.4) auf beliebige Dimensionen verallgemeinern: Sind $K, L \in \mathcal{K}^n$ mit $K \subseteq L$ und hat $L$ die Dimension $n$, dann ist $\mathrm{AGr}(K;k) \subseteq \mathrm{AGr}(L;k)$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine affine Ebene der Dimension $k$ die Menge $K$ trifft, wenn wir schon wissen, dass sie $L$ schneidet, gegeben durch

$$\frac{\lambda_k^n(\mathrm{AGr}(K;k))}{\lambda_k^n(\mathrm{AGr}(L;k))}.$$

Beachte, dass diese Wahrscheinlichkeit nicht von der Normierung des invarianten Maßes auf $\mathrm{AGr}(n,k)$ abhängt. Aus (7.5) folgt nun unmittelbar der

**Satz 7.4 (Satz von Sylvester)** *Es seien $K \subseteq L$ konvexe Körper im $\mathbb{R}^n$. Hat $L$ die Dimension $n$, dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine $k$-dimensionale affine Ebene die Menge $K$ trifft, wenn wir schon wissen, dass sie $L$ schneidet, gegeben durch*

$$\frac{\mu^n_{n-k}(K)}{\mu^n_{n-k}(L)}.$$

### 7.3 Eine Eulerrelation für die inneren Volumina

Mit Hilfe der Formel von Hadwiger können wir die Euler–Schläfli–Poincaré Formel, Satz 5.7, auf beliebige innere Volumina verallgemeinern.

**Satz 7.5** *Ist $F$ ein System von Seiten des polytopalen Komplexes $P$, dann gilt*

$$\mu^n_k(P) = \sum_{Q\in F} (-1)^{\dim Q - k} \mu^n_k(Q).$$

*Beweis*: Nach Satz 5.6 ist die Euler Charakteristik des relativen Inneren eines Polytops $Q$ gegeben durch $\mu_0(\operatorname{relint} Q) = (-1)^{\dim Q}$. Da aber für $\lambda^n_{n-k}$-fast alle $V \in \mathrm{AGr}(n, n-k)$ gilt $\operatorname{relint}(Q) \cap V \neq \emptyset$ wann immer $Q \cap V \neq \emptyset$, impliziert nun die Formel von Hadwiger (7.6), dass

$$\begin{aligned}
\mu^n_k(\operatorname{relint}(Q)) &= C^n_k \int_{\mathrm{AGr}(n,n-k)} \mu_0(\operatorname{relint}(Q) \cap V)\, d\lambda^n_{n-k}(V) \\
&= C^n_k \int_{\mathrm{AGr}(n,n-k)} (-1)^{\dim(\operatorname{relint}(Q)\cap V)} \mu_0(Q \cap V)\, d\lambda^n_{n-k}(V).
\end{aligned}$$

Ist $\operatorname{relint}(Q) \cap V \neq \emptyset$, dann gilt

$$\dim(\operatorname{relint}(Q) \cap V) = \dim(Q \cap V) = \dim Q + \dim V - \dim(Q \cup V),$$

wobei $\dim(Q\cup V)$ die Dimension der kleinsten Ebene, die $Q\cup V$ enthält, bezeichnet. Ist $\mu^n_k(\operatorname{relint}(Q)) \neq 0$, dann folgt $\dim Q \geq k$. Daher gilt $\dim(Q\cup V) = n$ für fast alle $V \in \mathrm{AGr}(n, n-k)$ und damit

$$\dim(\operatorname{relint}(Q) \cap V) = \dim Q + (n-k) - n = \dim Q - k,$$

Zusammenfassend erhalten wir also

$$\mu^n_k(\operatorname{relint}(Q)) = (-1)^{\dim Q - k} \mu^n_k(Q) \tag{7.7}$$

für alle Polytope $Q$. Die Behauptung folgt nun direkt aus der Definition eines Systems von Seiten eines polytopalen Komplexes. ∎

## 7.4 Die Projektionsformel für innere Volumina

Wir wollen nun noch eine alternative Interpretation der Formel von Hadwiger herleiten. Dazu erinneren wir, dass $\mu_k^k$ mit dem $k$-dimensionalen Volumen auf jedem $k$-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt. Unser abschließendes Resultat zeigt, dass das $k$-te innere Volumen $\mu_k^n(K)$ proportional zum Mittel der $k$-Volumina der orthogonalen Projektion von $K$ auf $k$-dimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ ist.

**Satz 7.6 (Die Projektionsformel)** *Für alle $K \in \mathcal{K}^n$ und $0 \le k \le n$ gilt*

$$\mu_k^n(K) = C_{n-k}^n \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mu_k^k(K|V_0)\, d\nu_k^n(V_0).$$

*Beweis*: Bezeichnen wir für $K \in \mathcal{K}^n$ mit $f_K$ wieder die Indikatorfunktion von $\mathrm{AGr}(K; n-k)$, dann ist

$$\mu_k^n(K) = C_{n-k}^n\, \lambda_{n-k}^n(\mathrm{AGr}(K; n-k)) = C_{n-k}^n \int_{\mathrm{Gr}(n,n-k)} \int_{V_0^\perp} \overline{f}_K(V_0, p)\, dp\, d\nu_{n-k}^n(V_0).$$

Genau wie im Beweis von Satz 7.2 zeigt man, dass $\overline{f}_K(V_0, p) = I_{K|V_0^\perp}(p)$, womit

$$\begin{aligned}
\mu_k^n(K) &= C_{n-k}^n\, \lambda_{n-k}^n(\mathrm{AGr}(K; n-k)) = C_{n-k}^n \int_{\mathrm{Gr}(n,n-k)} \int_{V_0^\perp} I_{K|V_0^\perp}(p)\, dp\, d\nu_{n-k}^n(V_0) \\
&= C_{n-k}^n \int_{\mathrm{Gr}(n,n-k)} \mu_k^k(K|V_0^\perp)\, d\nu_{n-k}^n(V_0) = C_{n-k}^n \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mu_k^k(K|V_0)\, d\nu_k^n(V_0),
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung verwendet haben, dass die orthogonale Dualität zwischen $\mathrm{Gr}(n, k)$ und $\mathrm{Gr}(n, n-k)$ Maß erhaltend ist. ■

**Bemerkung:**

(a) Der Beweis von Satz 7.6 zeigt auch, dass

$$\lambda_{n-k}^n(\mathrm{AGr}(K; n-k)) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mu_k^k(K|V_0)\, d\nu_k^n(V_0)$$

für alle *polykonvexen* Mengen $K$ gilt. Da (7.5) jedoch $\mu_k^n$ nur für *konvexe* Körper definiert, gilt Satz 7.6 nicht für alle $K \in \mathrm{Polycon}(n)$.

# 8 Charakterisierungen des Volumens

In diesem Kapitel beweisen wir einen der wichtigsten Sätze der Integralgeomtrie, die Charakterisierung des Volumens auf polykonvexen Mengen als stetige bewegungsinvariante einfache Bewertung. Diese Volumen-Charakterisierung wird uns eine mühelose Charakterisierung aller inneren Volumina in Kapitel 9 ermöglichen. Am Ende dieses Abschnitts beweisen wir noch die Unabhängigkeit der inneren Volumina von der Dimension des Umgebungsraumes.

### 8.1 Einfache Bewertungen auf polykonvexen Mengen

Wir wollen im Folgenden Satz 4.8 auf Polycon($n$) verallgemeinern. Wir erinnern daran, dass Satz 4.8 das Volumen auf zwei verschiedene Arten charakterisiert: als *monotone* und als *stetige* Bewertung, die translationsinvariant und einfach ist. Wir werden sehen, dass die Charakterisierung unter der Monotonie-Voraussetzung eine viel einfachere Verallgemeinerung zulässt als die unter der Stetigkeitsvoraussetzung. Wir benötigen dazu zunächst eine

**Definition.** Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan messbar*, wenn

$$\sup\{\mu_n(P) : P \in \mathrm{Par}(n), P \subseteq A\} = \inf\{\mu_n(Q) : Q \in \mathrm{Par}(n), A \subseteq Q\}.$$

Ist $A$ Jordan messbar, dann nennt man diesen Wert das Jordan Maß von $A$.

**Bemerkungen.**

(a) Jede Jordan messbare Menge ist auch Lebesgue messbar und ihr Jordan Maß stimmt mit dem Lebesgue-Maß (also dem gewöhnlichen Volumen) überein.

(b) Jeder konvexe Körper ist Jordan messbar.

**Satz 8.1** *Eine Funktion $\mu$ : Polycon($n$) $\to \mathbb{R}$ ist genau dann eine translationsinvariante, einfache und monotone Bewertung, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mu(K) = c\mu_n(K)$ für alle $K \in$ Polycon($n$).*

*Beweis*: O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\mu$ monoton steigend ist (falls $\mu$ monoton fallend ist, dann ist $-\mu$ monoton steigend). Nach Satz 4.8 gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(P) = c\mu_n(P)$ für alle $P \in \mathrm{Par}(n)$. Nun sei $K \in \mathcal{K}^n$. Da $K$ Jordan messbar ist, gilt

$$\mu_n(K) = \sup\{\mu_n(P) : P \in \mathrm{Par}(n), P \subseteq K\} = \inf\{\mu_n(Q) : Q \in \mathrm{Par}(n), K \subseteq Q\}.$$

Da $\mu$ monoton steigend ist, gilt $\mu(P) = c\mu_n(P) \leq \mu(K)$ für alle $P \subseteq K$, womit $c\mu_n(K) \leq \mu(K)$. Analog schließt man, dass $\mu(K) \leq c\mu_n(K)$. Es gilt also insgesamt $\mu(K) = c\mu_n(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$ und damit für alle $K \in$ Polycon($n$). ∎

Zur Vorbereitung einer Charakterisierung des Volumens als stetige Bewertung, frei von Monotonievoraussetzungen, benötigen wir zunächst einige Begriffsbildungen.

**Definition.** Für $K \in \mathcal{K}^n$ sei $-K = \{-x : x \in K\}$ die Spiegelung von $K$ am Ursprung. Ist $K = -K$, dann nennen wir $K$ *ursprungssymmetrisch*. Eine Menge $K$ heißt *zentralsymmetrisch*, wenn ein Translat von $K$ ursprungssymmetrisch ist. Die Menge aller zentralsymmetrischen konvexen Körper im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}_c^n$.

Unter den zentralsymmetrischen konvexen Körpern spielt die Klasse der sogenannten Zonoide eine besonders wichtige Rolle.

**Definition.** Ein *Zonotop* ist eine endliche Minkowski Summe von Strecken (d.h. Geradensegmenten). Ein konvexer Körper heißt *Zonoid*, wenn er Grenzwert in der Hausdorff Metrik einer Folge von Zonotopen ist.

Wir erinnern daran, dass ein konvexer Körper $K \in \mathcal{K}^n$ durch seine *Stützfunktion* $h(K, \cdot) : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt wird.

**Lemma 8.2** *Ist $K \in \mathcal{K}_c^n$ und $h(K, \cdot)$ eine $C^\infty$-Funktion, dann gibt es Zonoide $Y_1$ und $Y_2$, sodass*

$$K + Y_2 = Y_1.$$

*Beweis*: Für $g \in C^\infty(S^{n-1})$ ist die *Cosinus Transformation* $Cg$ von $g$ definiert durch

$$(Cg)(u) = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| g(v)\, dv.$$

Die Transformation $C$ ist ein bijektiver linerarer Operator auf dem Raum aller *geraden* $C^\infty$ Funktionen auf $S^{n-1}$. Dies ist eine Konsequenz aus dem Satz von Funk–Hecke für Kugelfunktionen (vgl. dazu „Harmonische Analysis und Geometrie" unter http://dmg.tuwien.ac.at/schuster).

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $K = -K$ ist. Dann ist die Stützfunktion $h(K, \cdot) : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine gerade $C^\infty$-Funktion. Daher gibt es eine gerade (eindeutig bestimmte) $C^\infty$-Funktion $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, sodass $h(K, \cdot) = Cg$. Es bezeichne $g^+(v) = \max\{g(v), 0\}$ und $g^-(v) = \max\{-g(v), 0\}$. Dann gilt

$$h(K, u) + \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| g^-(v)\, dv = \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| g^+(v)\, dv. \tag{8.1}$$

Da die beiden Funktionen $g^+$ und $g^-$ positiv sind, sind $h(Y_1, \cdot) := Cg^+$ und $h(Y_2, \cdot) := Cg^-$ sublinear und daher Stützfunktionen von ursprungssymmetrischen konvexen Körpern $Y_1$ und $Y_2$. Gleichung (8.1) ist also äquivalent zu $K + Y_2 = Y_1$.

Da die Riemannsummen, welche gegen die Integrale in (8.1) konvergieren, Linearkombinationen von Stützfunktionen von Strecken (und damit Stützfunktionen von Zonotopen) sind, folgt schließlich, dass $Y_1$ und $Y_2$ Zonoide sind. ■

**Notation.** Es bezeichne $\mathrm{SO}(n)$ die spezielle orthogonale Gruppe, also die Gruppe aller Rotationen des $\mathbb{R}^n$. Bezeichnet $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, dann schreiben wir $\mathrm{SO}(n, \mathcal{B})$ für die Menge aller Rotationen aus $\mathrm{SO}(n)$, welche mindestens $n - 2$ Elemente der Basis $\mathcal{B}$ fest lassen.

**Lemma 8.3** *Zu jedem $\phi \in \mathrm{SO}(n)$ gibt es endlich viele $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m \in \mathrm{SO}(n, \mathcal{B})$, sodass $\phi = \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_m$.*

*Beweis*: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension, wobei der Fall $n = 2$ wegen $\mathrm{SO}(2, \mathcal{B}) = \mathrm{SO}(2)$ trivial ist. Wir nehmen daher an, dass $n \geq 3$ und die Aussage für $n-1$ gezeigt ist.

Es sei $\phi \in \mathrm{SO}(n)$, aber $\phi \notin \mathrm{SO}(n, \mathcal{B})$. Weiters sei $v = \phi e_n$ und o.B.d.A. $v \neq e_n$. Bezeichnen wir mit $v'$ die auf Länge 1 normierte Orthogonalprojektion von $v$ auf den Unterraum $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} = \mathbb{R}^{n-1}$, dann gibt es ein $\psi \in \mathrm{SO}(n)$, sodass $\psi e_n = e_n$ und $\psi v' = e_{n-1}$. Nachdem $v$ in der Ebene $\mathrm{span}\{v', e_n\}$ liegt, folgt daraus, dass $\psi v$ in $\mathrm{span}\{e_{n-1}, e_n\}$ liegt.

Es sei nun $\zeta$ die Rotation, welche $e_1, \ldots, e_{n-2}$ fest lässt und $\psi v$ nach $e_n$ rotiert. Dann ist $\zeta \in \mathrm{SO}(n, \mathcal{B})$ und $\zeta \psi \phi e_n = \zeta \psi v = e_n$. Bezeichnet $\eta = \zeta \psi \phi$, dann fixieren $\psi$ und $\eta$ beide $e_n$. Aus der Induktionsannahme für $\mathrm{SO}(n-1)$ folgt daher die Existenz von $\psi_1, \ldots \psi_i, \eta_1, \ldots \eta_j \in \mathrm{SO}(n, \mathcal{B})$, sodass $\psi = \psi_1 \cdots \psi_i$ und $\eta = \eta_1 \cdots \eta_j$. Damit erhalten wir aber

$$\phi = \psi^{-1} \zeta^{-1} \eta = \psi_i^{-1} \cdots \psi_1^{-1} \zeta^{-1} \eta_1 \cdots \eta_j.$$

■

Bevor wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts kommen, benötigen wir noch zwei Begriffsbildungen.

**Definition.** Eine Bewertung $\mu$ auf $\mathcal{K}^n$ heißt *gerade*, wenn $\mu(-K) = \mu(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$ gilt. Ist $\mu(-K) = -\mu(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$, dann nennt man $\mu$ *ungerade*. Eine Bewertung $\mu$ auf $\mathcal{K}^n$ wird *einfach* genannt, wenn $\mu$ auf Mengen der Dimension kleiner $n$ verschwindet.

**Bemerkung.**

(a) Offenbar kann jede Bewertung $\mu$ auf $\mathcal{K}^n$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Bewertung geschrieben werden

$$\mu = \mu_{\text{gerade}} + \mu_{\text{ungerade}}, \tag{8.2}$$

wobei

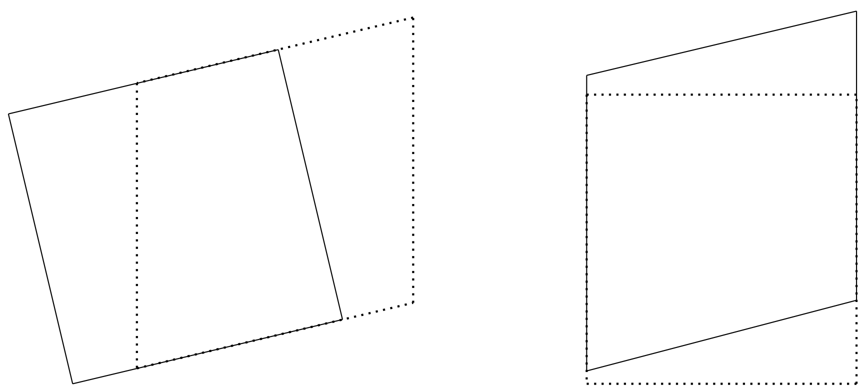
$$\mu_{\text{gerade}}(K) = \frac{1}{2}(\mu(K) + \mu(-K)) \quad \text{und} \quad \mu_{\text{ungerade}}(K) = \frac{1}{2}(\mu(K) - \mu(-K)).$$

**Satz 8.4** *Eine stetige, translationsinvariante, einfache und gerade Bewertung $\mu$ auf $\mathcal{K}^n$ erfüllt genau dann $\mu([0,1]^n) = 0$ wenn $\mu(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$ gilt.*

*Beweis*: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension $n$. Ist $n = 1$, dann ist jeder konvexe Körper in $\mathcal{K}^1$ ein abgeschlossenes Intervall. Da $\mu$ einfach und translationsinvariant ist und auf $[0,1]$ verschwindet, muss die Bewertung auf allen abgeschlossenen Intervallen rationaler Länge den Wert Null annehmen. Da $\mu$ aber auch stetig ist, verschwindet $\mu$ auf ganz $\mathcal{K}^1$. Wir nehmen daher nun an, dass $n > 1$ ist und die Behauptung für $\mathcal{K}^{n-1}$ gilt.

Da $\mu$ einfach und translationsinvariant ist, folgt aus $\mu([0,1]^n) = 0$, dass $\mu([0,\frac{1}{k}]^n) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher ist auch $\mu(C) = 0$ für alle Boxen $C$ mit rationalen Kantenlängen, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Die Stetigkeit von $\mu$ impliziert nun $\mu(C) = 0$ für alle Boxen $C$, deren Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Es sei nun $D$ eine Box deren Kanten parallel zu einer anderen Familie orthogonaler Koordinatenachsen sind. Ist $n = 2$, so kann $D$ offenbar in eine endliche Anzahl von Teilen geschnitten werden, deren *Translate* zu einer Box $C$ zusammengefügt werden können, deren Kanten parallel zu den ursprünglichen Koordinatenachsen sind:



Da $\mu$ einfach und translationsinvariant ist, folgt $\mu(D) = \mu(C) = 0$. Ist $n > 2$, dann kann für jede Rotation $\zeta \in \mathrm{SO}(n, \mathcal{B})$ eine Box, deren Kanten parallel zur Basis $\zeta\mathcal{B}$ sind, wie im Fall $n = 2$ in endlich viele Teile geschnitten werden, deren Translate zu einer Box $C$ zusammengefügt werden können, deren Kanten parallel zu $\mathcal{B}$ sind. (Dies ist möglich, da $\zeta$ mindestens $n-2$ der ursprünglichen Koordinatenachsen fixiert). Nach Lemma 8.3, ist dies daher auch für eine beliebige Rotation $\psi \in \mathrm{SO}(n)$ möglich. Ist daher $D$ eine Box, deren Kanten parallel zu einem beliebigen (orthogonalen) Koordinatensystem sind, so kann $D$ in eine Box $C$, deren Kanten parallel zu den ursprünglichen Koordinatenachsen sind, durch Zerschneiden und Translatieren umgewandelt werden. Es folgt allgemein $\mu(D) = \mu(C) = 0$.

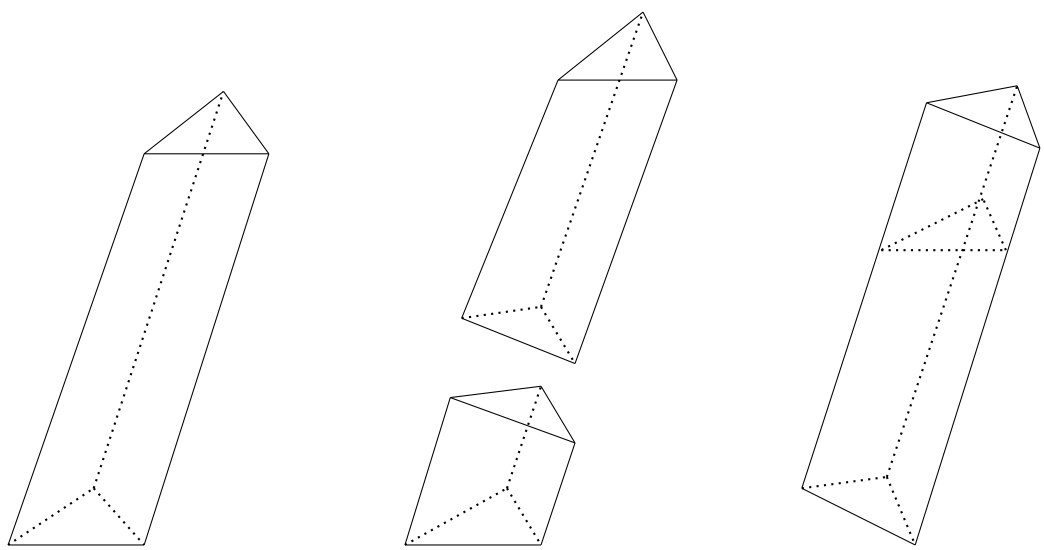
Als nächstes definieren wir eine Bewertung $\tau : \mathcal{K}^{n-1} \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für einen konvexen Körper $K$ im $\mathbb{R}^{n-1}$ sei

$$\tau(K) = \mu(K \times [0,1]).$$

Offenbar ist $\tau([0,1]^{n-1}) = \mu([0,1]^n) = 0$ und $\tau$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes in Dimension $n-1$. Nach Induktionsannahme ist daher $\tau = 0$. Da $\mu$ einfach ist, folgt daraus $\mu(K \times [a,b]) = 0$ für alle konvexen Körper $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und alle rationalen Zahlen $a$ und $b$, mit $a \leq b$. Die Stetigkeit von $\mu$ impliziert dann, dass $\mu(K \times [a,b]) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Anders ausgedrückt, verschwindet $\mu$ auf allen *rechtwinkligen Zylindern* mit konvexer Basis.

Sind $x_1, \ldots, x_n$ die von uns gewählten Koordinaten im $\mathbb{R}^n$, so haben wir bisher $\mathbb{R}^{n-1}$ durch die Hyperebene $x_n = 0$ ausgedrückt. Die rechtwinkligen Zylinder, für welche wir gezeigt haben, dass $\mu$ verschwindet, haben kongruente Ober- und Unterseiten, deren Verbindungskanten orthogonal auf die Hyperebene $x_n = 0$ sind. Da $\mu$ aber auf Boxen beliebiger Orientierung verschwindet, kann mit derselben Argumentation gezeigt werden, dass $\mu$ auf rechtwinkligen Zylindern mit Grundflächen in beliebigen $(n-1)$-dimensionalen Unterräumen verschwindet.

Es sei nun $M$ ein *Prisma*, also ein schräger Zylinder, dessen Ober- und Unterseiten kongruent und parallel zur Hyperebene $x_n = 0$ sind, aber dessen Mantel nicht länger orthogonal auf $x_n = 0$ steht, sondern stattdessen einen konstanten Winkel mit der Ebene einschließt. Wir können nun $M$ mit einer Hyperebene, welche orthogonal auf den Mantel des Prismas steht, in zwei Teile $M_1$ und $M_2$ schneiden und diese Teile neu anordnen, um einen rechtwinkligen Zylinder $Z$ zu erhalten, dessen Mantel orthogonal auf die neuen Ober- und Unterseiten steht. (Genau genommen, ist solch ein Zerschneiden und Neuanordnen nur möglich, wenn die Durchmesser der Ober- und Unterseiten von $M$ hinreichend klein sind. Ist allerdings die Grundfläche von $M$ zu groß, so können wir $M$ zunächst in „schmale" Prismen unterteilen, und die Argumentation auf jeden dieser kleineren Prismen einzeln anwenden.)



Da $\mu$ einfach und translationsinvariant ist, folgt

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2) = \mu(Z) = 0.$$

Als nächstes sei $P$ ein konvexes Polytop mit Facetten $P_1, \ldots, P_m$ und zugehörigen äußeren Normaleneinheitsvektoren $u_1, \ldots, u_m$. Weiters sei $v \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt und es bezeichne $\bar{v}$ das Liniensegment, welches $v$ mit dem Ursprung $o$ verbindet. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $P_1, \ldots, P_j$ die Facetten von $P$ sind, für die $u_i \cdot v > 0$ für alle $1 \leq i \leq j$. In diesem Fall kann die Minkowski Summe $P + \bar{v}$ in der Form

$$P + \bar{v} = P \cup \left( \bigcup_{i=1}^{j} (P_i + \bar{v}) \right)$$

ausgedrückt werden, wobei jeder Term der obigen Vereinigung entweder disjunkt von den anderen ist oder einen Schnitt der Dimension $n-1$ hat. Es folgt daher

$$\mu(P+\bar{v}) = \mu(P) + \left( \sum_{i=1}^{j} \mu(P_i + \bar{v}) \right).$$

Da aber jeder Körper der Form $P_i + \bar{v}$ ein Prisma ist, folgt $\mu(P_i + \bar{v}) = 0$ und damit

$$\mu(P+\bar{v}) = \mu(P) \tag{8.3}$$

für alle konvexen Polytope $P$ und alle Liniensegmente $\bar{v}$. Durch Induktion über endliche Minkowski Summen von Strecken, folgt aus (8.3) unmittelbar

$$\mu(Z) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu(P+Z) = \mu(P)$$

für alle konvexen Polytope $P$ und alle Zonotope $Z$. Die Stetigkeit von $\mu$ impliziert daher

$$\mu(Y) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mu(K+Y) = \mu(K), \tag{8.4}$$

für alle $K \in \mathcal{K}^n$ und alle Zonoide $Y$.

Besitzt nun $K \in \mathcal{K}^n_c$ eine $C^\infty$ Stützfunktion $h(K,\cdot)$, so gibt es nach Lemma 8.2 Zonoide $Y_1$ und $Y_2$, sodass $K + Y_2 = Y_1$. Aus (8.4) folgt somit

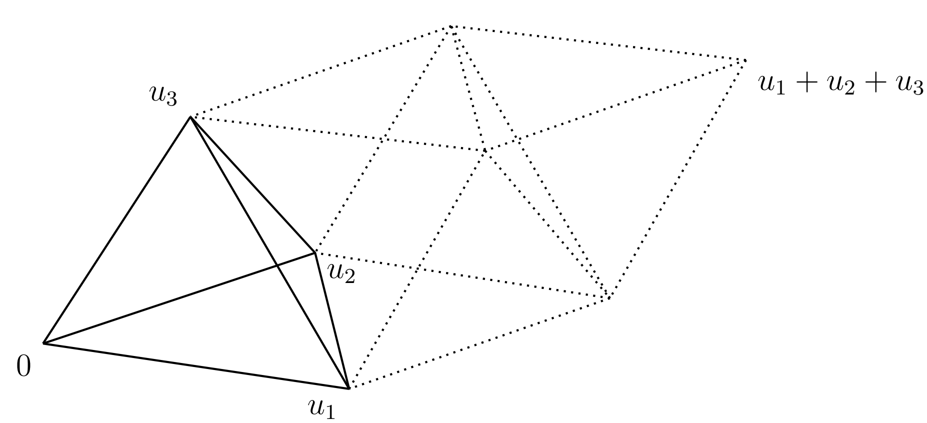
$$\mu(K) = \mu(K+Y_2) = \mu(Y_1) = 0.$$

Nachdem jeder zentralsymmetrische, konvexe Körper $K$ durch eine Folge $K_i \in \mathcal{K}^n$ mit $C^\infty$ Stützfunktionen $h(K_i,\cdot)$ approximiert werden kann, folgt aus der Stetigkeit von $\mu$, dass $\mu$ auf ganz $\mathcal{K}^n_c$ verschwindet.

Schließlich sei nun $\Delta$ ein $n$-Simplex mit einem Eckpunkt im Ursprung. Es bezeichne $u_1,\dots,u_n$ die anderen Eckpunkte von $\Delta$ und $P$ sei das von den Vektoren $u_1,\dots,u_n$ aufgespannte Parallelotop. Weiters sei $v = u_1+\cdots+u_n$, $\xi_1$ die Hyperebene, welche die Punkte $u_1,\dots,u_n$ enthält und $\xi_2$ die durch die Punkte $v-u_1,\dots,v-u_n$ bestimmte affine Hyperebene. Bezeichnen wir noch mit $P_*$ die Menge aller Punkte in $P$, welche zwischen den Hyperebenen $\xi_1$ und $\xi_2$ liegt, dann ist

$$P = \Delta \cup P_* \cup (-\Delta + v),$$

wobei die Inneren jedes Terms dieser Vereinigung disjunkt sind.



Da $P$ und $P_*$ zentralsymmetrisch sind, erhalten wir

$$0 = \mu(P) = \mu(\Delta) + \mu(P_*) + \mu(-\Delta + v) = \mu(\Delta) + \mu(-\Delta).$$

Anders ausgedrückt, $\mu(\Delta) = -\mu(-\Delta)$. Da $\mu$ gerade ist, ist auch $\mu(\Delta) = \mu(-\Delta)$, womit $\mu(\Delta) = 0$ für jeden Simplex $\Delta$.
Ist $P$ ein konvexes Polytop im $\mathbb{R}^n$, so kann $P$ als endliche Vereinigung von Simplizes

$$P = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m,$$

dargestellt werden, sodass die Schnittmengen $\Delta_i \cap \Delta_j$ Dimension kleiner $n$ haben, für alle $i \neq j$. Es folgt, dass

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\Delta_i) = 0.$$

Da die Menge aller konvexen Polytope in $\mathcal{K}^n$ dicht liegt, impliziert die Stetigkeit von $\mu$, dass $\mu(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$. ■

Satz 8.4 ist äquivalent zu folgender Aussage.

**Satz 8.5 (Charakterisierungssatz für das Volumen)** *Eine gerade Bewertung* $\mu : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ *ist genau dann stetig, translationsinvariant und einfach, wenn es ein* $c \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass* $\mu(K) = c\mu_n(K)$ *für alle* $K \in \mathcal{K}^n$.

*Beweis*: Für eine gerade Bewertung $\mu$ auf $\mathcal{K}^n$, die stetig, translationsinvariant und einfach ist, definiere

$$\nu(K) = \mu(K) - \mu([0,1]^n)\mu_n(K).$$

Die Bewertung $\nu$ erfüllt dann offenbar die Vorraussetzungen des Satzes 8.4, sodass $\nu(K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$. Es folgt

$$\mu(K) = c\mu_n(K),$$

wobei $c = \mu([0,1]^n)$. Umgekehrt ist $\mu_n$ offenbar eine Bewertung mit den angegebenen Eigenschaften. ■

Nach (8.2) und Satz 8.5 kann eine allgemeine stetige, translationsinvariante und einfache Bewertung $\mu$ auf $\mathcal{K}^n$ in der Form

$$\mu(K) = c\mu_n(K) + \mu_{\text{ungerade}}(K) \tag{8.5}$$

für $K \in \mathcal{K}^n$ dargestellt werden. Eine natürliche Frage ist daher die Charakterisierung stetiger, translationsinvarianter, einfacher und *ungerader* Bewertungen.

**Satz 8.6 (Charakterisierungssatz von Schneider)** *Eine ungerade Bewertung* $\mu : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ *ist genau dann stetig, translationsinvariant und einfach, wenn es eine stetige, ungerade Funktion* $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ *gibt, sodass*

$$\mu(K) = \int_{S^{n-1}} g(u)\, dS_{n-1}(K, u)$$

*für alle* $K \in \mathcal{K}^n$.

Hier bezeichnet $S_{n-1}(K, \cdot)$ das Oberflächenmaß des konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ (siehe zum Beispiel das Skriptum „Harmonische Analysis und Geometrie" unter http://dmg.tuwien.ac.at/schuster).

Zusammenfassend lässt sich also jede stetige, translationsinvariante und einfache Bewertung $\mu$ in folgender Form darstellen

$$\mu(K) = c\mu_n(K) + \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(u)dS_{n-1}(K, u),$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine stetige, ungerade Funktion ist.

## 8.2 Volumen-Charakterisierung auf Polycon($n$)

Um Satz 4.8 auf den Verband Polycon($n$) zu verallgemeinern, benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Lemma 8.7 (Lemma von Sah)** *Zu jedem $n$-Simplex $\Delta$ gibt es Polytope $P_1, \dots, P_m$, sodass*

$$\Delta = P_1 \cup \dots \cup P_m,$$

*wobei der Schnitt jedes Polytops dieser Vereinigung mit jedem anderen höchstens Dimension $n-1$ hat und wobei jedes der Polytope $P_i$ symmetrisch bezüglich einer Spiegelung an einer Hyperebene ist.*

*Beweis*: Es seien $x_0, \dots, x_n$ die Eckpunkte von $\Delta$ und es bezeichne $\Delta_i$ die Facette von $\Delta$ die gegenüber von $x_i$ liegt. Es sei $z$ das Zentrum der eingeschriebenen Kugel von $\Delta$ und $z_i$ bezeichne den Fußpunkt der auf $\Delta_i$ orthogonal stehenden Verbindungsstrecke von $z$ mit $\Delta_i$. Für alle $i < j$ bezeichne $A_{i,j}$ die konvexe Hülle von $z, z_i, z_j$ und der Seite $\Delta_i \cap \Delta_j$ von $\Delta$. Dann ist

$$\Delta = \bigcup_{0 \le i < j \le n} A_{i,j},$$

wobei die Dimension des Schnitts von je zwei verschiedenen $A_{i,j}$ höchstens $n-1$ ist. Offenbar ist jedes $A_{i,j}$ symmetrisch bezüglich der Spiegelung an der Hyperebene, die durch den Punkt $z$ und die Seite $\Delta_i \cap \Delta_j$ bestimmt ist. Umbenennen der Polytope $A_{i,j}$ in $P_1, \dots, P_m$ mit $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ liefert daher

$$\Delta = P_1 \cup \dots \cup P_m,$$

wobei die Polytope $P_i$ die geforderten Eigenschaften besitzen. ■

Bevor wir die angekündigte Verallgemeinerung von Satz 4.8 angeben, erinnern wir daran, dass nach dem Fortsetzungssatz 5.3 von Groemer eine stetige Bewertung auf Polycon($n$) bereits durch ihre Werte auf $\mathcal{K}^n$ eindeutig bestimmt ist.

**Satz 8.8 (Volumen-Charakterisierung auf Polycon($n$))** *Es sei $\mu$ eine stetige, bewegungsinvariante und einfache Bewertung auf $\mathcal{K}^n$ oder* Polycon($n$). *Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(K) = c\mu_n(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$ bzw.* Polycon($n$).

*Beweis*: Da $\mu$ translationsinvariant (und auch rotationsinvariant) und einfach ist, folgt aus Satz 8.5 die Existenz eines $a \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(K)+\mu(-K) = a\mu_n(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$. Damit gilt speziell für jeden Simplex $\Delta$ im $\mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\mu(\Delta) + \mu(-\Delta) = a\mu_n(\Delta). \tag{8.6}$$

Ist die Dimension $n$ des umgebenden Euklidischen Raumes gerade, so unterscheiden sich $\Delta$ und $-\Delta$ nur durch eine Rotation, sodass

$$\mu(\Delta) = \mu(-\Delta) = \frac{a}{2}\mu_n(\Delta).$$

Ist hingegen $n$ ungerade, so existieren nach Lemma 8.7 Polytope $P_1, \ldots, P_m$, sodass

$$\Delta = P_1 \cup \cdots \cup P_m,$$

wobei der Schnitt jedes Polytops dieser Vereinigung mit jedem anderen höchstens Dimension $n-1$ hat und wobei jedes der Polytope $P_i$ symmetrisch bezüglich einer Spiegelung an einer Hyperebene ist. Es folgt daraus, dass sich jedes $P_i$ von $-P_i$ nur durch eine eigentliche Bewegung (also einer Rotation, gefolgt von einer Translation) unterscheidet, sodass $\mu(-P_i) = \mu(P_i)$. Daher erhalten wir auch in diesem Fall

$$\mu(-\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(P_i) = \mu(\Delta). \tag{8.7}$$

Zusammen implizieren (8.6) und (8.7), dass $\mu(\Delta) = \frac{a}{2}\mu_n(\Delta)$ für jeden Simplex $\Delta$ gilt. Es sei nun $c = \frac{a}{2}$ und $P$ ein konvexes Polytop im $\mathbb{R}^n$. Dann kann $P$ als endliche Vereinigung von Simplices

$$P = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m,$$

dargestellt werden, sodass die Dimension von $\Delta_i \cap \Delta_j$ kleiner $n$ ist für alle $i \neq j$. Es folgt daher

$$\mu(P) = \mu(\Delta_1) + \cdots + \mu(\Delta_m) = c\,(\mu_n(\Delta_1) + \cdots + \mu_n(\Delta_m)) = c\mu_n(P).$$

Da die Menge aller konvexen Polytope dicht liegt in $\mathcal{K}^n$, folgt schließlich aus der Stetigkeit von $\mu$, dass $\mu(K) = c\mu_n(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}^n$. ∎

### 8.3 Die Normierung der inneren Volumina

Ist $P$ ein Parallelotop im $\mathbb{R}^l$ und betrachten wir $\mathbb{R}^l \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein $n > l$, so gilt nach Korollar 4.6, dass $\mu_k^l(P) = \mu_k^n(P)$ für alle $k \geq 0$. Wie werden nun zeigen, dass diese Aussage gültig bleibt, wenn $P$ durch eine beliebige polykonvexe Menge ersetzt wird.

**Satz 8.9 (Der Normierungssatz)** *Die inneren Volumina $\mu_i$, $0 \leq i \leq n$, auf* Polycon$(n)$ *sind unabhängig von der Dimension $n$ normiert.*

*Beweis*: Die Behauptung gilt offensichtlich für $i = 0$, da $\mu_0^n(K) = \mu_0(K) = 1$ für alle konvexen Körper beliebiger Dimension. Für $l < k$ stimmt weiters die Einschränkung von $\mu_k^k$ auf konvexe Körper im $\mathbb{R}^l$ mit $\mu_k^l$ überein, da beide Bewertungen auf polykonvexen Mengen der Dimension $l < k$ verschwinden.
Wir können daher annehmen, dass $n > k$ ist und

$$\mu_k^{n-1} \text{ auf } \mu_k^l \text{ einschränkt, für alle } k \leq l \leq n-1. \tag{8.8}$$

Es bleibt zu zeigen, dass (8.8) auch für $\mu_k^n$ gilt. Da $\mu_k^n$ in Dimensionen kleiner als $k$ verschwindet, ist die Einschränkung von $\mu_k^n$ auf eine $k$-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$ eine stetige, bewegungsinvariante und einfache Bewertung auf Polycon$(k)$. Nach Satz 8.8 existiert daher ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mu_k^n(K) = c\mu_k^k(K)$ für alle $K \in$ Polycon$(k)$. Da aber $\mu_k^n(P) = \mu_k^k(P)$ für alle Parallelotope $P \in \mathrm{Par}(k)$ (nach Korollar 4.6), folgt $c = 1$ und $\mu_k^n = \mu_k^k$ auf Polycon$(k)$. Ist $k = n-1$, dann sind wir fertig. Ist $k < n-1$, so nehmen wir an, dass

$$\mu_k^n \text{ auf } \mu_k^l \text{ einschränkt, für alle } k \leq l < n-1. \tag{8.9}$$

Um den Induktionsschritt abzuschließen, müssen wir zeigen, dass (8.9) für $\mu_k^n$ und $\mu_k^{l+1}$ gilt. Dazu bezeichne $\nu$ die Einschränkung von $\mu_k^n$ auf Polycon$(l+1)$. Nach (8.9) schränkt dann $\nu$ auf $\mu_k^l$ auf Polycon$(l)$ ein, während $\mu_k^{l+1}$ auf $\mu_k^l$ einschränkt auf Polycon$(l)$ nach (8.8). Es folgt, dass $\nu - \mu_k^{l+1}$ auf Polycon$(l)$ verschwindet, sodass $\nu - \mu_k^{l+1}$ eine stetige, bewegungsinvariante und einfache Bewertung auf Polycon$(l+1)$ ist. Nach Satz 8.8 existiert daher ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $\nu - \mu_k^{l+1} = c\mu_{l+1}^{l+1}$ auf Polycon$(l+1)$. Da $\nu - \mu_k^{l+1}$ aber auf $\mathrm{Par}(l+1)$ verschwindet (nach Korollar 4.6), haben wir $c = 0$ und $\nu = \mu_k^{l+1}$. Die Behauptung folgt nun durch doppelte Induktion, zuerst nach $l$ und dann nach $n$. ■

Im Folgenden werden wir bei der Notation für innere Volumina die Dimension des umgebenden Raumes nicht mehr andeuten, also nur noch $\mu_k$ anstatt $\mu_k^n$ schreiben. Die im Beweis des Normierungssatzes verwendete Induktionstechnik wird uns am Beginn von Kapitel 9 wiederbegegnen, wo wir die Charakterisierung der inneren Volumina nach Hadwiger beweisen.

# 9 Der Charakterisierungssatz von Hadwiger

In diesem Abschnitt verwenden wir Satz 8.8, um die Charakterisierung invarianter Bewertungen auf polykonvexen Mengen mit einem der schönsten und wichtigsten Sätze der klassischen Integralgeometrie, dem Charakterisierungssatz von Hadwiger, abzuschließen. Wir verwenden dann Hadwigers Satz um einfache Beweise für eine Reihe von integralgeometrischen Formeln zu geben. Schließlich behandeln wir auch noch eine Verallgemeinerung des Buffonschen Nadelproblems für Räume und Ebenen beliebiger Dimensionen.

## 9.1 Beweis des Hadwigerschen Charakterisierungssatzes

Das folgende Resultat verallgemeinert Satz 4.9 auf den Verband Polycon($n$). Wie auch im Fall von Parallelotopen ist der Satz äquivalent zur entsprechenden Volumen-Charakterisierung, Satz 8.8.

**Satz 9.1 (Charakterisierungssatz von Hadwiger)** *Die inneren Volumina $\mu_0, \mu_1 \ldots, \mu_n$ bilden eine Basis des Vektorraums aller stetigen, bewegungsinvarianten Bewertungen auf polykonvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$.*

*Beweis*: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension $n$. Für $n = 1$ ist die Aussage genau Satz 4.4. Wir können daher annehmen, dass $n > 1$ und die Aussage für Dimension $n - 1$ gezeigt ist.

Es sei nun $\mu$ eine stetige, invariante Bewertung auf Polycon($n$) und $H$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$. Die Einschränkung von $\mu$ auf $H$ ist dann eine stetige, invariante Bewertung auf $H$. Nach unserer Induktionsannahme gibt es daher Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, sodass

$$\mu(K) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i(K)$$

für jede polykonvexe Menge $K \subseteq H$. Damit ist aber die stetige, invariante Bewertung

$$\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i$$

einfach, verschwindet also auf allen polykonvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$, deren Dimension kleiner $n$ ist. Dies folgt aus der Invarianz der Bewertungen $\mu$ und $\mu_i$ und der Tatsache, dass durch eine Drehung und Translation jede niedrig-dimensionale polykonvexe Menge in $H$ abgebildet werden kann. Nach Satz 8.8 gibt es daher ein $c_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i = c_n \mu_n.$$

■

**Definition.** Eine Bewertung $\mu$ : Polycon($n$) $\to \mathbb{R}$ heißt *homogen* vom Grad $k > 0$, wenn

$$\mu(\alpha K) = \alpha^k \mu(K)$$

für alle $K \in$ Polycon($n$) und alle $\alpha \geq 0$.

Genau wie im Fall von Parallelotopen (vgl. Korollar 4.10) folgt aus Hadwigers Charakterisierungssatz auf einfache Weise das folgende Resultat.

**Korollar 9.2** *Ist $\mu$ eine stetige, bewegungsinvariante Bewertung auf* Polycon$(n)$*, die homogen vom Grad $k \in \mathbb{R}$ ist, für ein $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(K) = c\mu_k(K)$ für alle $K \in$* Polycon$(n)$.

### 9.2 Die inneren Volumina der Einheitskugel

Wir wollen im Folgenden mit Hilfe des Satzes von Hadwiger die inneren Volumina $\mu_i(B_n)$ der Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ berechnen. Dazu benötigen wir das nachstehende Hilfsresultat über das Volumen der Minkowski-Summe

$$K + r\bar{u} = \{x + ry : x \in K \text{ und } y \in \bar{u}\}$$

eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ mit einem Liniensegment $r\bar{u}$. Hier bezeichnet $\bar{u}$ das Segment, welches den Ursprung mit $u \in S^{n-1}$ verbindet und $r \geq 0$.

**Proposition 9.3** *Für $K \in \mathcal{K}^n$, $r \geq 0$ und jeden Einheitsvektor $u \in S^{n-1}$ gilt*

$$\mu_n(K + r\bar{u}) = \mu_n(K) + r\mu_{n-1}(K|u^\perp).$$

*Beweis*: Es sei $L = K + r\bar{u}$. Das Volumen $\mu_n$ von $L$ ist gegeben durch

$$\mu_n(L) = \int_{u^\perp} \mu_1(L \cap \ell_x)\, dx,$$

wobei $\ell_x$ die Gerade parallel zu $u$ durch den Punkt $x \in u^\perp$ bezeichnet. Nachdem $\mu_1(L \cap \ell_x) = \mu_1(K \cap \ell_x) + r$ für alle $x \in K|u^\perp$ gilt, während $L \cap \ell_x = \emptyset$, wenn $x \notin K|u^\perp$, erhalten wir

$$\mu_n(L) = \int_{u^\perp} \mu_1(L \cap \ell_x)\, dx = \int_{K|u^\perp} \mu_1(K \cap \ell_x) + r\, dx = \mu_n(K) + r\mu_{n-1}(K|u^\perp).$$

■

Bezeichnet $C_n$ den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$, so gilt für $0 \leq i \leq n$ nach Satz 4.5, dass

$$\mu_i(C_n) = \binom{n}{i}.$$

**Proposition 9.4** *Für jedes $r \geq 0$ ist*

$$\mu_n(C_n + rB_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(C_n)\omega_{n-i}r^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\omega_{n-i}r^{n-i}. \tag{9.1}$$

*Beweis*: Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die Standardorthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt nach Proposition 9.3, dass

$$\mu_n(B_n + r\bar{u}_1) = \omega_n + r\omega_{n-1} = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \omega_{n-i} r^i$$

für alle $n \geq 1$. Wir können daher annehmen, dass Gleichung (9.1) in niedrigeren Dimensionen gilt und dass

$$\mu_n(B_n + r\bar{u}_1 + \cdots + r\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega_{n-i} r^i$$

für $1 \leq k < n$. Dann ist nach Proposition 9.3 und der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
\mu_n(B_n+r\bar{u}_1+\cdots+r\bar{u}_{k+1}) &= \mu_n(B_n+r\bar{u}_1+\cdots+r\bar{u}_k)+r\mu_{n-1}(B_n+r\bar{u}_1+\cdots+r\bar{u}_k|u_{k+1}^{\perp}) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega_{n-i} r^i + r\mu_{n-1}(B_{n-1}+r\bar{u}_1+\cdots+r\bar{u}_k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega_{n-i} r^i + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega_{n-1-i} r^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \left( \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right) \omega_{n-i} r^i = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \omega_{n-i} r^i.
\end{aligned}$$

Nachdem $C_n = \bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_n$, folgt Gleichung (9.1) nun aus der Homogenität des Volumens. ■

Mit Hilfe von Proposition 9.4 und Hadwigers Charakterisierungssatz können wir nun eines der klassischen Resultate der Integralgeometrie beweisen.

**Satz 9.5 (Formel von Steiner)** *Für $K \in \mathcal{K}^n$ und jedes $r \geq 0$ gilt*

$$\mu_n(K + rB_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(K) \omega_{n-i} r^{n-i}. \tag{9.2}$$

*Beweis*: Für $K \in \mathcal{K}^n$, definieren wir $\eta(K) = \mu_n(K + B_n)$. Da für $K, L, M \in \mathcal{K}^n$ mit $K \cup L$ konvex stets

$$(K \cup L) + M = (K + M) \cup (L + M)$$

und

$$(K \cap L) + M = (K + M) \cap (L + M),$$

ist $\eta$ eine stetige, bewegungsinvariante Bewertung. Nach Satz 9.1 gibt es daher Konstanten $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass für alle $K \in \mathcal{K}^n$ gilt

$$\eta(K) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(K).$$

Damit haben wir für $r > 0$,

$$\mu_n(K + rB_n) = r^n \mu_n\left(\frac{1}{r}K + B_n\right) = r^n \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(K) \frac{1}{r^i} = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(K) r^{n-i}. \qquad (9.3)$$

Setzen wir $K = C_n$ und vergleichen (9.1) mit (9.3), so folgt $c_i = \omega_{n-i}$. ■

Mit Hilfe der Formel von Steiner lassen sich nun die inneren Volumina $\mu_i(B_n)$ leicht berechnen.

**Proposition 9.6** *Für $0 \leq i \leq n$ gilt*

$$\mu_i(B_n) = \binom{n}{i} \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \omega_i.$$

*Beweis*: Aus der Formel von Steiner mit $K = B_n$ erhalten wir für jedes $r > 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i(B_n) \omega_{n-i} r^{n-i} = \mu_n(B_n + rB_n) = (1+r)^n \mu_n(B_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \omega_n r^{n-i}.$$

Die Aussage folgt nun durch Koeffizientenvergleich. ■

### 9.3 Die Formeln von Crofton und Kubota

Wir sind nun auch in der Lage wie angekündigt zu zeigen, dass die Konstanten $C_k^n$ aus Satz 7.2 alle gleich 1 sind.

**Satz 9.7** *Für $K \in \mathcal{K}^n$ und alle $0 \leq k \leq n$ gilt*

$$\mu_{n-k}(K) = \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(K; k)). \qquad (9.4)$$

*Beweis*: Nach Definition ist

$$\mu_{n-k}(K) = C_k^n \, \lambda_k^n(\mathrm{AGr}(K; k))$$

für alle $K \in \mathcal{K}^n$. Setzen wir $K = B_n$, so haben wir einerseits nach Proposition 9.6

$$\mu_{n-k}(B_n) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \omega_{n-k}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
\lambda_k^n(\mathrm{AGr}(B_n; k)) &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} \mu_0(B_n \cap (V_0 + p)) \, dp \, d\nu_k^n(V_0) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} I_{B_{n-k}} \, dp \, d\nu_k^n(V_0) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \omega_{n-k} \, d\nu_k^n(V_0) \\
&= \omega_{n-k} \, \nu_k^n(\mathrm{Gr}(n,k)) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \omega_{n-k}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun $C_k^n = 1$. ■

Mit Hilfe von Satz 9.7 können wir nun auch die Formel von Hadwiger (7.6) präziser formulieren:

$$\mu_{n-k}(K) = \int_{\mathrm{AGr}(n,k)} \mu_0(K \cap V)\, d\lambda_k^n(V). \tag{9.5}$$

Beachte, dass, im Gegensatz zu Formel (9.4), Hadwigers Formel (9.5) für alle polykonvexen Mengen $K$ gilt und nicht bloß für $K \in \mathcal{K}^n$.

Unser nächstes Resultat stellt eine Verallgemeinerung der Formel von Hadwiger dar.

**Satz 9.8 (Formel von Crofton)** *Für* $K \in \mathrm{Polycon}(n)$ *und alle* $0 \leq i, j \leq n$ *gilt*

$$\int_{\mathrm{AGr}(n,n-i)} \mu_j(K \cap V)\, d\lambda_{n-i}^n(V) = \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix} \mu_{i+j}(K). \tag{9.6}$$

*Beweis*: Ist $i + j > n$, dann sind beide Seiten von (9.6) gleich Null. Es sei daher $i + j \leq n$. Für $K \in \mathcal{K}^n$ definieren wir

$$\eta(K) = \int_{\mathrm{AGr}(n,n-i)} \mu_j(K \cap V)\, d\lambda_{n-i}^n(V).$$

Nach (9.5) ist dann

$$\eta(K) = \int_{\mathrm{AGr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{AGr}(V,n-i-j)} \mu_0(K \cap V \cap W)\, d\lambda_{n-i-j}^{n-i}(W)\, \mathrm{d}\lambda_{n-i}^n(V),$$

wobei $\mathrm{AGr}(V, n-i-j)$ die Menge aller affinen Ebenen $W \subseteq V$ der Dimension $n-i-j$ bezeichnet. Da jedes $W \subseteq V$ ist, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\eta(K) &= \int_{\mathrm{AGr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{AGr}(V,n-i-j)} \mu_0(K \cap W)\, d\lambda_{n-i-j}^{n-i}(W)\, d\lambda_{n-i}^n(V) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)} \int_{V_0^\perp} \int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \int_{W_0^\perp \cap V_0} \mu_0(K \cap (W_0 + p + q))\, dq\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(W_0)\, dp\, d\nu_{n-i}^n(V_0) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \int_{V_0^\perp} \int_{W_0^\perp \cap V_0} \mu_0(K \cap (W_0 + p + q))\, dq\, dp\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(W_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \int_{V_0^\perp \oplus (W_0^\perp \cap V_0)} \mu_0(K \cap (W_0 + v))\, dv\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(W_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \int_{W_0^\perp} \mu_0(K \cap (W_0 + v))\, dv\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(W_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \int_{W_0^\perp} I_{K|W_0^\perp}\, dv\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(W_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)} \int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \mu_{i+j}(K|W_0^\perp)\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(W_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0).
\end{aligned}$$

Da $\mu_{i+j}$ eine stetige Bewertung und homogen vom Grad $i+j$ ist, folgt aus der Linearität obiger Integrale, dass $\eta$ ebenfalls eine stetige Bewertung auf $\mathcal{K}^n$ und homogen vom Grad $i+j$ ist. Aus der Invarianz von $\mu_{i+j}$ und der Maße $\nu_{n-i-j}^{n-i}$ und $\nu_{n-i}^n$ folgt weiters die Invarianz von $\eta$. Damit gibt es nach Korollar 9.2 ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\eta = c\, \mu_{i+j}.$$

Zur Bestimmung von $c$ setzen wir $K = B_n$. Dann gilt einerseits

$$\begin{aligned}\eta(B_n) &= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-i)}\int_{\mathrm{Gr}(V_0,n-i-j)} \mu_{i+j}(B_n|W_0^\perp)\, d\nu^{n-i}_{n-i-j}(W_0)\, d\nu^n_{n-i}(V_0) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i \\ n-i-j \end{bmatrix} \omega_{i+j}\end{aligned}$$

und andererseits nach Proposition 9.6

$$c\,\mu_{i+j}(B_n) = c \begin{bmatrix} n \\ i+j \end{bmatrix} \omega_{i+j}$$

Damit erhalten wir

$$c = \begin{bmatrix} n \\ i+j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i \\ n-i-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix}.$$

■

Nachdem $C_k^n = 1$ für alle $0 \le k \le n$, können wir auch Satz 7.6 neu formulieren und damit die Oberflächenformel von Cauchy (5.9) verallgemeinern.

**Satz 9.9 (Die Projektionsformel)** *Für alle $K \in \mathcal{K}^n$ und $0 \le k \le n$ gilt*

$$\mu_k(K) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mu_k(K|V_0)\, d\nu_k^n(V_0).$$

Mit Hilfe von Zufallsvariablen können wir die Projektionsformel auch probabilistisch interpretieren. Dazu bezeichnen wir für $K \in \mathcal{K}^n$ mit $X_k(K)$ das $k$-dimensionale Volumen der Projektion von $K$ auf einen *zufälligen* $k$-dimensionalen Unterraum $V \in \mathrm{Gr}(n, K)$. Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X_k(K))$ ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}(X_k(K)) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mu_k(K|V)\, dV,$$

wobei

$$\int_{\mathrm{Gr}(n,k)} 1\, dV = 1.$$

Unter Berücksichtigung der Normierung der Maße $\nu_k^n$, erhalten wir damit folgende äquivalente Formulierung der Projektionsformel.

**Korollar 9.10** *Für alle $K \in \mathcal{K}^n$ und $0 \le k \le n$ gilt*

$$\mu_k(K) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \mathbb{E}(X_k(K)).$$

Der Charakterisierungssatz von Hadwiger ermöglicht uns auch sofort eine weitere Verallgemeinerung von Satz 9.9 anzugeben.

**Satz 9.11 (Formel von Kubota)** *Für alle $K \in \mathcal{K}^n$ und $0 \le k \le l \le n$ gilt*

$$\int_{\mathrm{Gr}(n,l)} \mu_k(K|V)\, d\nu_l^n(V) = \begin{bmatrix} n-k \\ l-k \end{bmatrix} \mu_k(K).$$

*Beweis*: Wir definieren eine Bewertung $\eta$ auf $\mathcal{K}^n$ durch

$$\eta(K) = \int_{\mathrm{Gr}(n,l)} \mu_k(K|V)\, d\nu_l^n(V).$$

Offenbar ist $\eta$ stetig, invariant und homogen vom Grad $k$. Nach Korollar 9.2 gibt es daher ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\eta = c\,\mu_k.$$

Zur Bestimmung von $c$ setzen wir wieder $K = B_n$ und erhalten

$$c\,\mu_k(B_n) = \eta(B_n) = \int_{\mathrm{Gr}(n,l)} \mu_k(B_n|V)\, d\nu_l^n(V) = \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \mu_k(B_l),$$

womit

$$c = \frac{\mu_k(B_l)}{\mu_k(B_n)} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix} \omega_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{\omega_k} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-k \\ l-k \end{bmatrix}.$$

■

## 9.4 Das verallgemeinerte Buffonsche Nadelproblem

Wir wollen hier eine Verallgemeinerung des eingangs besprochenen Buffonschen Nadelproblems auf beliebige Dimensionen behandeln. Dazu benötigen wir zunächst einige Begriffsbildungen und Aussagen in Bezug auf Gitterpunkte in konvexen Körpern. Es sei daher $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{L} = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Menge $\mathcal{L}$ bildet eine diskrete Untergruppe des $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Vektoraddition. Solche diskreten Untergruppen werden als *Gitter* und ihre Elemente als *Gitterpunkte* bezeichnet. Der *Fundamentalbereich* des Gitters $\mathcal{L}$ ist das Parallelotop gegeben durch

$$C = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n : 0 \le a_1, \dots, a_n \le 1\}.$$

Bezeichnet $A$ die Matrix, deren Spalten die $v_i$ sind (bezüglich der Standardorthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$), dann ist das Volumen von $C$ gegeben durch $\mu_n(C) = |\det A|$.

**Proposition 9.12** *Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ enthält das Translat $kC + x$ von $kC$ mindestens $k^n$ und höchstens $(k+1)^n$ Gitterpunkte aus $\mathcal{L}$.*

*Beweis*: Für $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ besteht die Menge $(kC + x) \cap \mathcal{L}$ genau aus den Vektoren $v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$ mit $x_i \le y_i \le k + x_i$ ist. Da es entweder $k$ oder $k+1$ mögliche ganzzahlige Werte für $y_i$ in diesem Intervall gibt, für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, enthält $kC + x$ zwischen $k^n$ und $(k+1)^n$ Gitterpunkte. ■

Wir wollen als nächstes die erwartete Anzahl von Gitterpunkten in einem zufälligen Translat $K + x$ einer polykonvexen Menge $K$ im $\mathbb{R}^n$ bestimmen.

**Satz 9.13** *Es sei $K \in \operatorname{Polycon}(n)$ und $Y_K$ bezeichne die Anzahl der Punkte in $(K+x)\cap\mathcal{L}$ für eine zufällige Translation $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$\mathbb{E}(Y_K) = \frac{\mu_n(K)}{\mu_n(C)}.$$

*Beweis*: Beachte zunächst, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ die Anzahl der Gitterpunkte in $K+x$ gegeben ist durch $\mu_0((K+x)\cap\mathcal{L})$. Um den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y_K)$ zu bestimmen, müssen wir $\mu_0((K+x)\cap\mathcal{L})$ über alle $x \in \mathbb{R}^n$ mitteln. Ein solches Integral würde aber mit Sicherheit divergieren. Da $\mathcal{L}$ aber invariant unter Translationen durch Punkte aus $\mathcal{L}$ ist, genügt es über Translationen durch Vektoren $x \in C$ zu mitteln und wir erhalten

$$\mathbb{E}(Y_K) = \int_C \mu_0((K+x)\cap\mathcal{L})\,dx.$$

Damit ist $\mathbb{E}(Y_K)$ eine translationsinvariante, monotone Bewertung in $K$. Da offenbar auch $\mathbb{E}(Y_K)=0$ für alle $K$ deren Dimension kleiner als $n$ ist, ist $\mathbb{E}(Y_K)$ einfach. Nach Satz 8.1 gibt es daher ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbb{E}(Y_K) = \alpha\mu_n(K), \tag{9.7}$$

für alle $K \in \operatorname{Polycon}(n)$. Um $\alpha$ zu bestimmen, setzen wir $K = C$. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Proposition 9.12

$$k^n \le \mu_0((kC+x)\cap\mathcal{L}) \le (k+1)^n,$$

folgt

$$k^n \le \mathbb{E}(Y_{kC}) \le (k+1)^n.$$

Aus (9.7) erhalten wir daher

$$k^n \le \alpha k^n \mu_n(C) \le (k+1)^n,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Division durch $k^n$ und Bildung des Grenzwerts $k \to \infty$, liefert schließlich $\alpha = 1/\mu_n(C)$. ■

Wir können nun eine verallgemeinerte Version des Buffonschen Nadelproblems formulieren. Dazu sei $V \in \operatorname{Gr}(n,k)$, $\{v_1,\dots,v_{n-k}\}$ eine Basis von $V^\perp$ und

$$\mathcal{V} = \{V + a_1v_1 + \cdots + a_{n-k}v_{n-k} : a_1,\dots,a_{n-k} \in \mathbb{Z}\}$$

Was ist die erwartete Anzahl von Schnittpunkten eines zufällig bewegten konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^n$ mit $\mathcal{V}$?

**Satz 9.14** *Es sei $K \in \mathcal{K}^n$ und $X_K$ bezeichne die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $gK \cap \mathcal{V}$ für eine zufällige Bewegung $g$. Dann ist*

$$\mathbb{E}(X_K) = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}^{-1} \frac{\mu_{n-k}(K)}{\mu_{n-k}(C)}.$$

*Beweis*: Es sei $\mathcal{L}$ das Gitter in $V^\perp$ gegeben durch

$$\mathcal{L} = \{a_1 v_1 + \cdots + a_{n-k} v_{n-k} : a_1, \ldots, a_{n-k} \in \mathbb{Z}\},$$

und $C$ bezeichne den Fundamentalbereich von $\mathcal{L}$. Beachte, dass uns die Symmetrie von $\mathcal{V}$ wieder erlaubt nur Bewegungen zu berücksichtigen, die Translationen durch Vektoren aus $C$ beinhalten. Wir betrachten also die Mengen $\phi K + x$ mit $\phi \in \mathrm{O}(n)$ und $x \in C$. Für festes $\phi \in \mathrm{O}(n)$ ist die Anzahl von Schnittpunkten von $\phi K + x$ mit $\mathcal{V}$ gleich der erwarteten Anzahl von Elementen in $(\phi K + x)|V^\perp \cap \mathcal{L}$. Nach Satz 9.13 ist daher die zu erwartende Anzahl von Schnittpunkten von $\phi K + x$ mit $\mathcal{V}$ gerade

$$\frac{\mu_{n-k}((\phi K + x)|V^\perp)}{\mu_{n-k}(C)} = \frac{\mu_{n-k}((\phi K)|V^\perp)}{\mu_{n-k}(C)}. \tag{9.8}$$

Das Mittel der zu erwartenden Anzahl von Schnittpunkten von $\phi K + x$ mit $\mathcal{V}$ über alle $x$ und alle $\phi$ ist daher gleich dem Erwartungswert von (9.8) über alle $\phi \in \mathrm{O}(n)$. Korollar 9.10 liefert daher die gewünschte Aussage. ■

## 9.5 Die Berechnung innerer Volumina

Die explizite Berechnung der inneren Volumina einer polykonvexen Menge ist im Allgemeinen schwierig. Bisher haben wir Formeln für innere Volumina orthogonaler Parallelotope und Euklidischer Kugeln angegeben. Wir wollen nun zunächst den Charakterisierungssatz von Hadwiger dazu verwenden, die inneren Volumina eines orthogonalen kartesischen Produkts zweier polykonvexer Mengen zu bestimmen, deren innere Volumina bereits bekannt sind, und dabei folgende Verallgemeinerung von Satz 4.7 beweisen.

**Satz 9.15** *Es sei $0 \leq k \leq n$ und $K \subseteq \mathbb{R}^k$, $L \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ polykonvexe Mengen. Dann gilt für alle $0 \leq i \leq n$,*

$$\mu_i(K \times L) = \sum_{r+s=i} \mu_r(K)\mu_s(L). \tag{9.9}$$

*Beweis*: Offenbar ist die Funktion $\mu_i(K \times L)$ eine stetige Bewertung in jeder der Variablen $K$ und $L$ wenn die andere festgehalten wird. Da außerdem jede Bewegung $\phi$ des $\mathbb{R}^k$ bzw. des $\mathbb{R}^{n-k}$ Einschränkung einer Bewegung $\Phi$ des $\mathbb{R}^n$ ist, ist $\mu_i(K \times L)$ sogar eine stetige und invariante Bewertung in jeder Variablen. Durch zweimalige Anwendung von Satz 9.1 erhalten wir daher Konstanten $c_{rs} \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mu_i(K \times L) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{n-k} c_{rs} \mu_r(K) \mu_s(L)$$

für alle $K \in \mathcal{K}^k$ und $L \in \mathcal{K}^{n-k}$. Zur Bestimmung der $c_{rs}$ bezeichnen wir mit $C_m$ den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^m$. Dann gilt für $\alpha, \beta \geq 0$ einerseits

$$\mu_i(\alpha C_k \times \beta C_{n-k}) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{n-k} c_{rs} \mu_r(C_k) \mu_s(C_{n-k}) \alpha^r \beta^s = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{n-k} c_{rs} \binom{k}{r} \binom{n-k}{s} \alpha^r \beta^s$$

und andererseits nach Satz 4.7

$$\mu_i(\alpha C_k \times \beta C_{n-k}) = \sum_{r+s=i} \binom{k}{r}\binom{n-k}{s} \alpha^r \beta^s.$$

Daher ist für $0 \leq r \leq k$ und $0 \leq s \leq n-k$, $c_{rs} = 1$ wenn $r+s=i$ und ansonsten $c_{rs} = 0$. ■

Als nächstes wollen wir eine Formel für die inneren Volumina eines beliebigen nicht notwendig orthogonalen Parallelotops herleiten. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung der Volumen-Charakterisierung auf $\mathrm{Par}(n)$, Satz 4.8. Zur Formulierung dieses Resultats seien $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$ bezeichne den Verband von endlichen Vereinigungen von Parallelotopen mit Kanten parallel zu den Vektoren $v_i$.

**Satz 9.16 (Volumen-Charakterisierung auf Par$(v_1, \ldots, v_n)$)** *Es sei $\mu$ eine einfache und translationsinvariante Bewertung auf $\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$, die entweder stetig oder monoton ist. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(P) = c\mu_n(P)$ für alle $P \in \mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$.*

*Beweis*: Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\bar{v}_i$ das Liniensegment, welches $v_i$ mit dem Ursprung verbindet. Der Beweis der Aussage verläuft Wort für Wort wie der Beweis von Satz 4.8, wobei nur der Einheitswürfel $[0,1]^n$ mit dem „Einheitsparallelotop“

$$C = \bar{v}_1 + \cdots + \bar{v}_n$$

in $\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$ zu ersetzen ist. Es folgt dann $\mu = c\mu_n$, wobei $c = \mu(C)/\mu_n(C)$. ■

Da jedes Parallelotop $P \in \mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$ ein Translat eines Parallelotops der Form $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ für geeignete $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ ist, liefert das folgende Resultat die angekündigte Formel für innere Volumina allgemeiner Parallelotope.

**Satz 9.17** *Für alle $1 \leq k \leq n$ und $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ gilt*

$$\mu_k(a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu_k(a_{i_1}\bar{v}_{i_1} + \cdots + a_{i_k}\bar{v}_{i_k}). \tag{9.10}$$

*Beweis*: Ist $P \in \mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$ ein Parallelotop und Translat von $a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n$, so definieren wir

$$\nu_k(P) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu_k(a_{i_1}\bar{v}_{i_1} + \cdots + a_{i_k}\bar{v}_{i_k}).$$

Offenbar ist $\nu_k$ eine Bewertung und mit Hilfe (einer leicht zu beweisenden Version für $\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$) von Satz 4.3, können wir $\nu_k$ auf ganz $\mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$ fortsetzen. Weiters sei $\eta = \mu_k - \nu_k$. Wir wollen zeigen, dass $\eta(P) = 0$ für alle $P \in \mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$.

Da $\mu_k$ und $\nu_k$ beide in Dimensionen kleiner $k$ verschwinden, verschwindet auch $\eta$ in Dimensionen kleiner $k$. Die Einschränkung von $\eta$ auf die $k$-Ebene $V_{i_1,\ldots,i_k}$, welche von $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ aufgespannt wird, ist dann eine stetige, translationsinvariante und *einfache* Bewertung auf $\mathrm{Par}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$. Nach Satz 9.16 gibt es daher ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\eta(P) = c\mu_k(P)$ für alle $P \in \mathrm{Par}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$. Da aber nach Definition

$$\eta(\bar{v}_{i_1} + \cdots + \bar{v}_{i_k}) = 0,$$

ist $c = 0$ und $\eta$ verschwindet in Dimension $k$.

Schränken wir nun $\eta$ auf eine $k+1$-Ebene $V_{i_1,\ldots,i_{k+1}}$, aufgespannt durch $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k+1}}$, ein, so erhalten wir wieder eine stetige, translationsinvariante, einfache Bewertung, dieses Mal auf Parallelotopen der Dimension $k+1$. Nach Satz 9.16 gibt es wieder ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\eta(P) = c\mu_{k+1}(P)$ für alle $P \in \mathrm{Par}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k+1}})$. Da aber die Bewertung $\eta$ homogen vom Grad $k$ ist, während $\mu_{k+1}$ homogen vom Grad $k+1$ ist, muss $c = 0$ sein, womit $\eta$ in Dimension $k+1$ verschwindet. Sukzessive Wiederholung dieser Argumentation liefert schließlich $\eta(P) = 0$ für alle $P \in \mathrm{Par}(v_1, \ldots, v_n)$. ■

**Bemerkung.** Der Wert jedes Summanden $\mu_k(a_{i_1}\bar{v}_{i_1} + \cdots + a_{i_k}\bar{v}_{i_k})$ in (9.10) kann unter Verwendung elementarer linearer Algebra leicht berechnet werden: Ist $A$ die $k \times n$ Matrix deren $j$-te Zeile durch die Koordinaten des Vektors $a_{i_j}v_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$, gegeben ist, dann ist

$$\mu_k(a_{i_1}\bar{v}_{i_1} + \cdots + a_{i_k}\bar{v}_{i_k}) = \sqrt{\det(AA^{\mathrm{T}})}.$$

Um eine Formel für innere Volumina eines beliebigen Polytops $P \in \mathcal{K}^n$ herzuleiten, betrachten wir die Minkowski Summe $P + rB_n$ für ein $r \geq 0$. Es ist wohlbekannt, dass es aufgrund der Konvexität und Abgeschlossenheit von $P$ zu jedem $x \in P + rB_n$ einen eindeutig bestimmten Punkt $x_P \in P$ gibt, sodass

$$|x - x_P| \leq |x - y|$$

für alle $y \in P$. Ist $x \in P$, dann ist offensichtlich $x = x_P$. Ist hingegen $x \notin P$, dann liegt $x_P$ am Rand $\partial P$ von $P$. Weiters ist für $x \notin P$ und $y \in \partial P$ genau dann $y = x_P$, wenn $x - y \perp H$, wobei $H$ eine Stützebene von $P$ und $y \in P \cap H$ ist.

Es bezeichne $P_i(r)$ die Menge aller $x \in P + rB_n$, sodass $x_P$ im relativen Inneren einer $i$-dimensionalen Seite von $P$ liegt. Also, zum Beispiel, $P_n(r) = \mathrm{int}\, P$. Die Menge $P + rB_n$ lässt sich dann offenbar als disjunkte Vereinigung der $P_i(r)$ darstellen:

$$P + rB_n = \bigcup_{i=0}^{n} P_i(r). \tag{9.11}$$

**Satz 9.18** *Ist $P \in \mathcal{K}^n$ ein Polytop, dann gilt für $0 \leq i \leq n$,*

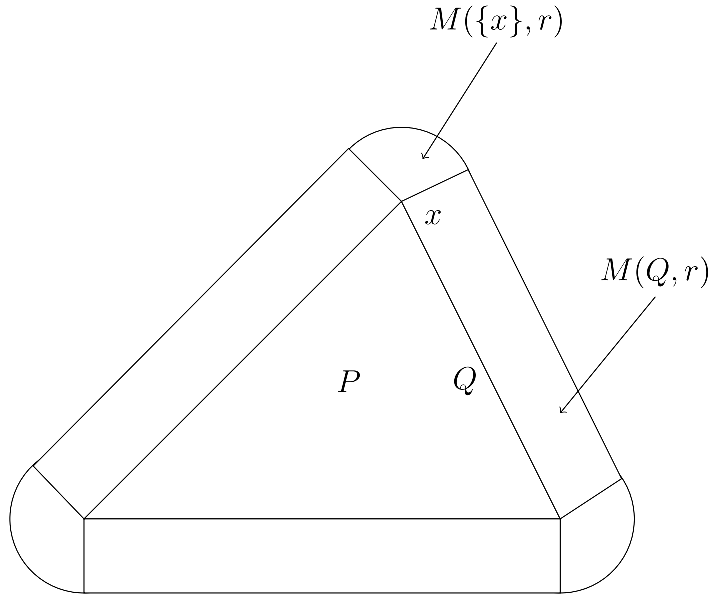
$$\mu_i(P) = \frac{\mu_n(P_i(1))}{\omega_{n-i}}. \tag{9.12}$$

*Beweis*: Es bezeichne $F_i(P)$ die Menge aller $i$-dimensionalen Seiten von $P$. Für jede Seite $Q$ mit $\dim Q < n$ von $P$ sei

$$M(Q, r) = \{y + \delta v : 0 \leq \delta \leq r\},$$

wobei $y \in \mathrm{relint}\, Q$ und $v$ ein äußerer Normalenvektor von $\partial P$ im Punkt $y$ ist. Dann gilt für $0 \leq i < n$,

$$P_i(r) = \bigcup_{Q \in F_i(P)} M(Q, r). \tag{9.13}$$




Zum Beweis von (9.13), sei zunächst $x \in P_i(r)$. Dann ist $x_P \in \operatorname{relint} Q$ für eine geeignete $i$-Seite $Q$ von $P$. Ist $x \in \operatorname{relint} Q$, dann ist $x \in M(Q,r)$. Ist $x \notin \operatorname{relint} Q$, dann ist $x \neq x_P$. Sei $v = (x - x_P)/|x - x_P|$. Dann ist $v \perp H$ für eine geeignete Stützebene $H$ im Punkt $x \in \operatorname{relint} Q$ und es folgt $y = x_P$ und $x \in P_i(r)$. Ist Umgekehrt $x = y + \delta v \in M(Q,r)$ für eine $i$-Seite $Q$, dann ist offenbar $x \in \operatorname{relint} Q$, wenn $\delta = 0$. Ansonsten ist $x - y \perp H$ für eine geeignete Stützebene $H$ im Punkt $y \in \operatorname{relint} Q$, woraus $y = x_P$ und damit $x \in P_i(r)$ folgt.

Ist $Q$ eine $i$-Seite, dann hat der zur affinen Hülle von $Q$ orthogonale Unterraum $Q^\perp$ die Dimension $n - i$, sodass $\mu_n(M(Q,r)) = r^{n-i}\mu_n(M(Q,1))$. Damit folgt aber aus (9.13), $\mu_n(P_i(r)) = r^{n-i}\mu_n(P_i(1))$, und daher aus (9.11),

$$\mu_n(P + rB_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu_n(P_i(1))r^{n-i}, \tag{9.14}$$

für alle $r > 0$. Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Steiner Formel, Satz 9.5,

$$\mu_n(P + rB_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i(P)\omega_{n-i}r^{n-i}, \tag{9.15}$$

so folgt die Behauptung durch Koeffizientenvergleich. ∎

# 10 Die kinematische Hauptformel

Im abschließenden Kapitel verwenden wir den Charakterisierungssatz von Hadwiger, um kinematische Formeln auf dem Verband polykonvexer Mengen zu beweisen.

### 10.1 Der Beweis der kinematischen Hauptformel

Wir verwenden wieder $E_n$ zur Bezeichnung der Euklidischen Bewegungsgruppe im $\mathbb{R}^n$. Da jede Bewegung als Zusammensetzung einer Translation und orthogonalen Transformation geschrieben werden kann, erhalten wir ein invariantes Maß auf $E_n$ indem wir das Produkt des $n$-dimensionalen Lebesgue Maßes mit dem Haarschen Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{O}(n)$ (welches durch Normierung aus dem invarianten Maß auf der Menge der Rahmen $\mathrm{Mod}(n)$ entsteht) verwenden. Wir schreiben dann $\int_{E_n} f(g)\,dg$ für die Integration einer messbaren Funktion $f$ auf $E_n$ bezüglich dieses invarianten Maßes.

Das zentrale Resultat dieses Abschnitts, die kinematische Hauptformel, wird uns eine Verallgemeinerung des Satzes von Sylvester, Satz 7.4, ermöglichen, in der affine Ebenen durch konvexe Körper ersetzt werden.

**Satz 10.1 (Die kinematische Hauptformel)** *Für alle $A$, $K \in \mathrm{Polycon}(n)$ gilt*

$$\int_{E_n} \mu_0(A \cap gK)\,dg = \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(A)\mu_{n-i}(K). \tag{10.1}$$

*Beweis*: Für $A$, $K \in \mathrm{Polycon}(n)$ definieren wir

$$\mu_0(A, K) = \int_{E_n} \mu_0(A \cap gK)\,dg. \tag{10.2}$$

Offenbar ist $\mu_0(A, K)$ eine stetige Bewertung in jeder der Variablen $K$ und $A$, wenn die jeweils andere festgehalten wird. Weiters folgt für $g' \in E_n$ aus der Invarianz der Euler Charakteristik sowie des Haarschen Maßes

$$\mu_0(g'A, K) = \int_{E_n} \mu_0(g'A \cap gK)\,dg = \int_{E_n} \mu_0(A \cap g'^{-1}gK)\,dg = \int_{E_n} \mu_0(A \cap gK)\,dg.$$

Analog zeigt man $\mu_0(A, g'K) = \mu_0(A, K)$ für alle $g' \in E_n$. Da das Haarsche Ma auf $E_n$ auch invariant unter der Inversion $g \mapsto g^{-1}$ ist, gilt außerdem

$$\int_{E_n} \mu_0(A \cap gK)\,dg = \int_{E_n} \mu_0(g^{-1}A \cap K)\,dg = \int_{E_n} \mu_0(gA \cap K)\,dg,$$

womit $\mu_0(A, K) = \mu_0(K, A)$. Zweimalige Anwendung des Charakterisierungssatzes von Hadwiger, Satz 9.1, liefert nun Konstanten $c_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $c_{ij} = c_{ji}$, sodass

$$\mu_0(A, K) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_{ij}\mu_i(A)\mu_j(K).$$

Zur Bestimmung der $c_{ij}$ seien $aB_n$ und $bB_n$ die Kugeln mit Radien $a, b \geq 0$ im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt im Ursprung. Da $\phi B_n = B_n$ für jedes $\phi \in \mathrm{O}(n)$ und wir das Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{O}(n)$ verwenden, erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned}
\mu_0(aB_n, bB_n) &= \int_{E_n} \mu_0(aB_n \cap gbB_n)\, dg = \int_{\mathrm{O}(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_0(aB_n \cap (\phi bB_n + v))\, dv\, d\phi \\
&= \int_{\mathrm{O}(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_0(aB_n \cap (bB_n + v))\, dv\, d\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \mu_0(aB_n \cap (bB_n + v))\, dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} I_{(a+b)B_n}\, dv = (a+b)^n \omega_n = \omega_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\mu_0(aB_n, bB_n) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} \mu_i(aB_n) \mu_j(bB_n) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} a^i b^j \mu_i(B_n) \mu_j(B_n).$$

Daraus folgt $c_{ij} = 0$ für $i + j \neq n$ und

$$c_{i,n-i} = \frac{\omega_n}{\mu_i(B_n)\mu_{n-i}(B_n)} \binom{n}{i} = \binom{n}{i}^{-1} \frac{\omega_i \omega_{n-i}}{\omega_n} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1}$$

nach Proposition 9.6. ■

**Bemerkungen:**

(a) Das Integral $\mu_0(A, K)$ kann als das Maß der Menge aller $g \in E_n$ interpretiert werden, für die $A \cap gK \neq \emptyset$. Alternativ, kann $\mu_0(A, K)$ als das „Maß" aller zu $K$ kongruenten konvexen Körper angesehen werden, welche $A$ schneiden.

(b) Sind $A$ und $C$ konvexe Körper der Dimension $n$ mit $C \supseteq A$, dann gibt der Quotient

$$\frac{\int \mu_0(A \cap gK)\, dg}{\int \mu_0(C \cap gK)\, dg} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(A)\mu_{n-i}(K)}{\sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(C)\mu_{n-i}(K)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit an, mit der eine feste konvexe Menge $K$, die zufällig im $\mathbb{R}^n$ geworfen wird, sodass sie die Menge $C$ trifft, auch $A$ treffen wird. Dies ist die angekündigte Verallgemeinerung des Satzes von Sylvester.

## 10.2 Allgemeine kinematische Formeln

Mit Hilfe der Formel von Hadwiger lassen sich nun auch noch analoge kinematische Formeln für die weiteren inneren Volumina $\mu_1, \ldots, \mu_n$ herleiten.

**Satz 10.2** *Für alle $A$, $K \in \mathrm{Polycon}(n)$ und $0 \leq k \leq n$ gilt*

$$\int_{E_n} \mu_k(A \cap gK)\, dg = \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i+k \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_{k+i}(A)\mu_{n-i}(K).$$

*Beweis*: Für $A$, $K \in \text{Polycon}(n)$ definieren wir

$$\zeta_k(A, K) = \int_{E_n} \mu_k(A \cap gK)\, dg.$$

Unter Verwendung der Formel von Hadwiger (9.5) und der kinematischen Hauptformel, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\zeta_k(A, K) &= \int_{E_n} \int_{\mathrm{AGr}(n,n-k)} \mu_0((A \cap gK) \cap V)\, d\lambda^n_{n-k}(V)\, dg \\
&= \int_{\mathrm{AGr}(n,n-k)} \int_{E_n} \mu_0((A \cap V) \cap gK)\, dg\, d\lambda^n_{n-k}(V) \\
&= \int_{\mathrm{AGr}(n,n-k)} \sum_{i=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_i(A \cap V) \mu_{n-i}(K)\, d\lambda^n_{n-k}(V) \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_{n-i}(K) \int_{\mathrm{AGr}(n,n-k)} \mu_i(A \cap V)\, d\lambda^n_{n-k}(V) \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \begin{bmatrix} i+k \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \mu_{n-i}(K) \mu_{i+k}(A),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Formel von Crofton (9.6) folgt. ■

Satz 10.2 und Hadwigers Charakterisierungssatz ermöglichen es nun kinematische Formeln

$$\int_{E_n} \mu(A \cap gK)\, dg$$

für beliebige stetige, invariante Bewertungen $\mu$ auf $\text{Polycon}(n)$ anzugeben.