Università degli Studi di Verona

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Informatica

Tesi di laurea

Una caratterizzazione dei lambda termini non fortemente normalizzabili

Candidato:
Federico Aschieri
Matricola IN000817

Relatore:
Dottor Gianluigi Bellin

Correlatore:
Professor Stefano Berardi

Anno Accademico 2006-2007

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il contributo principale di questa tesi consiste nella presentazione di un recente teorema di caratterizzazione dei lambda termini puri non fortemente normalizzabili e della sua applicazione alla dimostrazione del teorema di normalizzazione forte per il lambda calcolo tipato. Tale teorema è stato dimostrato da René David (comunicazione personale), e indipendentemente, dal presente autore. Intuitivamente, il teorema di caratterizzazione afferma che per ogni lambda termine u non fortemente normalizzabile, esiste una sequenza infinita di termini $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ e una β-riduzione R di u tale che ciascun t_i, in qualche punto di R, viene applicato a t_{i+1}. Dunque ciascun t_i passa dallo "status" di argomento della "funzione" t_{i-1}, allo "status" di "funzione" applicata all'argomento t_{i+1}. Vedremo tale teorema di caratterizzazione nel capitolo 4 (teorema 4.1.9).

Nei capitoli 2 e 3 ci occuperemo di un po' di storia del teorema di normalizzazione forte per il lambda calcolo tipato semplice. Presenteremo alcune fra le fondamentali tecniche per dimostrare la normalizzazione forte. In particolare, nel capitolo 2, presenteremo il metodo di traduzione nel lambda I-calcolo. Tale metodo è interessante, perché permette di ottenere il teorema di normalizzazione forte a partire dal teorema di normalizzazione debole, legando dunque i due concetti. Nel capitolo 3 esporremo invece in modo personale il metodo di Tait e il metodo di Gandy, in modo da confrontare fra loro questi due ben noti e importanti metodi. Concluderemo che, dal punto di vista tecnico, il metodo di Tait risulta una semplificazione del metodo di Gandy.

Ringraziamenti

Un ringraziamento al relatore della mia tesi, Gianluigi Bellin, per l'avermi introdotto all'argomento della mia tesi, per il costante appoggio e per le tante opportunità di studio e di ricerca che mi ha aperto. Un ringraziamento a Stefano Berardi, per i suoi preziosi commenti al mio lavoro e per il suo contributo di revisione.

Infine, un ringraziamento ai miei genitori, che mi hanno dato la possibilità di studiare e laurearmi.

Capitolo 2

Il metodo di traduzione

Come insegna la teoria delle categorie, spesso, per studiare una certa struttura, è molto utile studiare i suoi endomorfismi, ovvero le funzioni della struttura in sè che preservano le sue proprietà positive. Nel caso della normalizzazione forte per il lambda calcolo tipato, appare evidente che i morfismi cui siamo interessati sono i morfismi f che preservano la β-riduzione, ovvero tali che se $u\beta t$, allora $f(u)\beta f(t)$. Nel caso del lambda calcolo tipato c'è un interessante (quasi)endomorfismo che preserva la β-riduzione: una funzione che manda Λ in Λ_I, l'insieme dei lambda-I termini. Presentiamo in questo capitolo una bella tecnica, dovuta a Sorensen [4] e Xi [5], e che ha le sue radici in Nederpelt e Klop, per definire indirettamente (nel senso che si può costruire a partire da essa, noi non lo faremo) un (quasi)endomorfismo di Λ. Assumendo il teorema di normalizzazione debole, daremo inoltre una prova del teorema di normalizzazione forte.

2.1 Traduzione nel lambda-I calcolo

Una delle difficoltà principali nello studio della normalizzazione forte per il lambda calcolo tipato è la presenza di variabili vincolate che non occorrono libere nel sottotermine corrispondente al loro raggio d'azione, ovvero la possibilità di "cancellazione". Nel lambda-I calcolo tale problema non si presenta per definizione. Indicando con Λ l'insieme dei lambda termini tipati alla Church, l'insieme dei lambda-I termini tipati, denotato con Λ_I, è il più piccolo sottinsieme di Λ tale che:
-Per ogni variabile x^S, $x^S \in \Lambda_I$.
-Se $u, t \in \Lambda_I$ e $ut \in \Lambda$, allora $ut \in \Lambda_I$.
-Se $u \in \Lambda_I$ e x^S occorre libera in u, allora $\lambda x^S u \in \Lambda_I$.

Definizione (traduzione nel lambda-I calcolo)[Sorensen-Xi] 2.1.1 *Sia c_T, per ogni tipo T, una costante di tipo T. Siano $u, t \in \Lambda$, con $u : S$ e $t : S_1 \to \cdots \to S_n \to O$. Definiamo*

$< u, t > := \lambda x_1^{S_1} \dots \lambda x_n^{S_n} c_{S \to (O \to O)} u(tx_1 \dots x_n),$

dove $x_1, \ldots, x_n$ *sono variabili che non occorrono libere in* u, t. *Notiamo che il tipo di* $< u, t >$ *è esattamente il tipo di* t.

Definiamo ora una funzione $\_* : \Lambda \rightarrow \Lambda_I$ *induttivamente:*
- $x^* = x$
- $(ut)^* = u^* t^*$
- $(\lambda x u)^* = \lambda x < x, u^* >$

Osserviamo che la traduzione $\_*$ appena definita preserva il tipo: $u : T$ sse $u^* : T$.
Osserviamo inoltre che per ogni termine w e $ut_1 \ldots t_n$,
$< w, u > t_1 \ldots t_n \; \beta \; < w, ut_1 \ldots t_n >$. È di fatto quest'ultima la proprietà fondamentale: l'aver tradotto $(\lambda x u)$ in $\lambda x < x, u^* >$ permette di "mettere da parte" i termini eventualmente cancellati dall'applicazione di $\lambda x u$, senza ostacolare le "future" applicazioni.

Proposizione 2.1.2 *Per ogni termine* $u[t/x]$, $u[t/x]^* = u^*[t^*/x]$.

Prova. Per induzione su u.
Sia u una variabile y. Se $y = x$, allora $u[t/x]^* = t^* = x[t^*/x] = u^*[t^*/x]$. Se $y \neq x$, allora $u[t/x]^* = y^* = y = y[t^*/x] = u^*[t^*/x]$.
Sia $u = vw$. Allora $u[t/x]^* = v[t/x]^* w[t/x]^* = v^*[t^*/x] w^*[t^*/x] = v^* w^*[t^*/x] = u^*[t^*/x]$.
Sia $u = \lambda y v$. Allora, per α-equivalenza, $(\lambda y v)[t/x]^* = (\lambda y v[t/x])^* = \lambda y < y, v[t/x]^* >= \lambda y < y, v^*[t^*/x] >= (\lambda y v)^*[t^*/x]$. Q.E.D.

Indichiamo con SN l'insieme dei termini fortemente normalizzabili.

Teorema 2.1.3 *Sia* $v \in \Lambda$. *Allora* $v \in SN$

Prova. Per il teorema di normalizzazione debole, ogni termine è normalizzabile (vedi Girard [2], pag. 24) Ma se un lambda termine è debolmente normalizzabile, allora è normalizzabile per leftmost reduction (vedi Krivine [3], pag. 54). Possiamo dunque procedere per induzione sulla coppia $(l(v^*), c(v^*))$, dove $l(v^*)$ è la lunghezza della leftmost reduction di v^* e $c(v^*)$ è il numero di simboli di v^*. Ci sono tre casi:

Caso 1) $v = \lambda x u$. Abbiamo che $v^* = \lambda x < x, u^* >$. Dunque $l(u^*) \leq l(v^*)$ e $c(u^*) < c(v^*)$. Per ipotesi induttiva $u \in SN$ e dunque $v = \lambda x u \in SN$.

Caso 2) $v = xt_1 \ldots t_n$. Abbiamo che $v^* = (xt_1 \ldots t_n)^* = xt_1^* \ldots t_n^*$. Dunque, per $i = 1, \ldots, n$, $l(t_i^*) \leq l(v^*)$ e $c(t_i^*) < c(v^*)$. Per ipotesi induttiva $t_1, \ldots, t_n \in SN$ e dunque $v = xt_1 \ldots t_n \in SN$.

Caso 3) $v = (\lambda x u) t t_1 \ldots t_n$. Abbiamo che $v^* = ((\lambda x u) t t_1 \ldots t_n)^* =$
$= (\lambda x < x, u^* >) t^* t_1^* \ldots t_n^*$. Poiché il primo passo della leftmost reduction di $v*$ fa ottenere il termine $< t^*, u^*[t^*/x] > t_1^* \ldots t_n^*$, abbiamo che $l(t^*) < l(v^*)$ e quindi per ipotesi induttiva $t \in SN$. Inoltre $(\lambda x < x, u^* >) t^* t_1^* \ldots t_n^*) \; \beta^+ \; < t^*, u^*[t^*/x] t_1^* \ldots t_n^* >=< t^*, (u[t/x] t_1 \ldots t_n)^* >$. Dunque $l((u[t/x] t_1 \ldots t_n)^*) < l(v^*)$ e quindi per ipotesi induttiva $(u[t/x] t_1 \ldots t_n) \in SN$. Ma allora $v = (\lambda x u) t t_1 \ldots t_n \in SN$, per la proposizione 4.1.3 Q.E.D.

Capitolo 3

Il metodo di Tait-Gandy

In questo capitolo presentiamo il metodo di Tait e il metodo semantico di Gandy per provare la normalizzazione forte del lambda calcolo tipato semplice (alla Church). Non presenteremo direttamente le due prove, né daremo di esse le versioni più semplici: se lo facessimo, il nostro sarebbe lavoro inutile, dal momento che tali prove sono esposte ampiamente in letteratura. Presenteremo invece tali prove in maniera "unificata", in modo da evidenziarne le forti analogie. Sarà chiaro in seguito che la prova di Tait risulta essere una semplificazione di quella di Gandy (un fatto curioso, dal momento che, storicamente, è nata prima la prova di Tait).
La nostra presentazione si ispira alle presentazioni del metodo di Tait e del metodo di Gandy contenute rispettivamente in Girard [2] e in Gandy [1].

3.1 Lambda interpretazioni

Definizione 3.1.1 *Una tripla* $(D, \cdot, \iota)$ *si dice una* $\Lambda\beta$*-interpretazione se:*

1) D *è una collezione di insiemi non vuoti* D_T*, indicizzata dall'insieme dei tipi.*

2)$\cdot$ *è un operazione binaria* $\bigcup D \times \bigcup D \to \bigcup D$ *tale che per ogni coppia di tipi* S, T *e per ogni* $a \in D_{S \to T}$ *e per ogni* $b \in D_S$, $a \cdot b \in D_T$*. Indicheremo* $a \cdot b$ *con* ab*.*

3)Poniamo $Env = \{\rho | \rho : Variabili \to \bigcup D \text{ e } \rho(x^S) \in D_S \text{ per ogni variabile } x^S\}$*.*
Allora $\iota : \Lambda \times Env \to \bigcup D$ *tale che, indicando* $\iota(u, \rho)$ *con* $u\rho$*, valgano le seguenti proprietà:*

- $x\rho = \rho(x)$

-$(ut)\rho = u\rho(t\rho)$

-Condizione di Berry. Per ogni coppia di termini u, u' *e ambienti* ρ, ρ'*,*
se per ogni $a \in D_S$, $u\rho[x \mapsto a] = u'\rho'[y \mapsto a]$*, allora* $(\lambda x^S u)\rho = (\lambda y^S u')\rho'$

-Per ogni u*, se* $u \in \Lambda_T$*, allora* $u\rho \in D_T$

La terza condizione enunciata nel punto 3) della definizione è molto naturale: due funzioni definibili da un lambda termine sono uguali, se la valutazione dei rispettivi “corpi” in ogni punto a produce risultati uguali.

La definizione sopra si riferisce a lambda termini tipati considerati come stringhe simboliche, e non come classi di α-equivalenza. Tuttavia, aspettandoci che una qualunque interpretazione del lambda calcolo uguagli termini alfa equivalenti, dimostriamo ora che anche la nostra $\Lambda\beta$-intepretazione gode di tale proprietà.

Proposizione 3.1.2 *Sia M una $\Lambda\beta$-interpretazione. Per ogni variabile x, se x non occorre libera in t, $t\rho[x \mapsto a] = t\rho$, per ogni ρ.*

Prova. Per induzione su t.
Sia t una variabile y. Se $y = x$, la proposizione è banalmente vera. Se $y \neq x$, $t\rho[x \mapsto a] = \rho[x \mapsto a](y) = \rho(y) = t\rho$.
Se $t = uv$, per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a] = u\rho$ e $v\rho[x \mapsto a] = v\rho$, e dunque $t\rho[x \mapsto a] = u\rho[x \mapsto a](v\rho[x \mapsto a]) = u\rho(v\rho) = t\rho$.
Sia $t = \lambda yu$. Sia $c \in D_S$. Se $y = x$, allora $u\rho[x \mapsto a][y \mapsto c] = u\rho[y \mapsto c]$. Per la condizione di Berry, certamente $(\lambda yu)\rho[x \mapsto a] = (\lambda yu)\rho$. Se $y \neq x$, per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a][y \mapsto c] = u\rho[y \mapsto c][x \mapsto a] = u\rho[y \mapsto c]$. Ancora per la condizione di Berry, certamente $(\lambda yu)\rho[x \mapsto a] = (\lambda yu)\rho$. Q.E.D.

Indichiamo con $u < t/x >$ la sostituzione semplice di t in u al posto di x, ovvero la sostituzione delle occorrenze libere di x in u con t, senza ridenominazione di variabili. Vedi Krivine [3], pag. 2.

Lemma 3.1.3 *Sia M una $\Lambda\beta$-interpretazione. Per ogni termine u e variabile z che non occorre in u, $(\lambda xu)\rho = (\lambda zu < z/x >)\rho$.*

Prova. Per la condizione di Berry è sufficiente mostrare, per induzione su u, che se $a \in D_S$, allora $u\rho[x \mapsto a] = u < z/x > \rho[z \mapsto a]$.

Sia u una variabile y. Se $y = x$, allora $u\rho[x \mapsto a] = a = \rho[z \mapsto a](z) = u < z/x > \rho[z \mapsto a]$. Se $y \neq x$, allora $u\rho[x \mapsto a] = \rho[x \mapsto a](y) = \rho(y) = \rho[z \mapsto a](y) = u\rho[z \mapsto a] = u < z/x > \rho[z \mapsto a]$.

Sia $u = vw$. Allora $u\rho[x \mapsto a] = v\rho[x \mapsto a](w\rho[x \mapsto a]) = v < z/x > \rho[z \mapsto a](w < z/x > \rho[z \mapsto a]) = u < z/x > \rho[z \mapsto a]$.

Sia $u = \lambda yv$ e sia $c \in D_S$.
Se $y = x$, allora per la proposizione 3.1.2, $v\rho[x \mapsto a][y \mapsto c] = v\rho[y \mapsto c] = v\rho[y \mapsto c][z \mapsto a] = v\rho[z \mapsto a][y \mapsto c]$. Per la condizione di Berry, $(\lambda yv)\rho[x \mapsto a] = (\lambda yv)\rho[z \mapsto a] = (\lambda yv) < z/x > \rho[z \mapsto a]$.
Se $y \neq x$, allora per ipotesi induttiva $v\rho[x \mapsto a][y \mapsto c] = v\rho[y \mapsto c][x \mapsto a] = v < z/x > \rho[y \mapsto c][z \mapsto a]$. Per la condizione di Berry, $(\lambda yv)\rho[x \mapsto a] = (\lambda yv < z/x >)\rho[z \mapsto a] = (\lambda yv) < z/x > \rho[z \mapsto a]$. Q.E.D.

Proposizione 3.1.4 *Sia M una $\Lambda\beta$-interpretazione. Per ogni termine u, u', se $u =_\alpha u'$, allora $u\rho = u'\rho$.*

Prova. Per induzione su u.
Sia u una variabile y. Allora $u' = y$, e la tesi è banale.

Sia $u = vw$. Allora $u' = v'w'$, con $v =_\alpha v'$ e $w =_\alpha w'$. Per ipotesi induttiva $u\rho = v\rho(w\rho) = v'\rho(w'\rho) = u'\rho$.
Sia $u = (\lambda xv)$. Allora $u' = \lambda yv'$ e $v < z/x >=_\alpha v' < z/y >$, con z che non occorre in u e u'. Sia ora $a \in D_S$. Allora per ipotesi induttiva $v < z/x > \rho[z \mapsto a] = v' < z/y > \rho[z \mapsto a]$. Per il lemma 3.1.3 e per la condizione di Berry, $u\rho = (\lambda xv)\rho = (\lambda zv < z/x >)\rho = (\lambda zv' < z/y >)\rho = (\lambda zv')\rho = u'\rho$. Q.E.D.

Possiamo ora lavorare tranquillamente modulo α-equivalenza.

Definizione 3.1.5 *Sia (D, ι, ρ, f) una $\Lambda\beta$-interpretazione e supponiamo che D_O sia un insieme dotato di un ordine parziale (irriflessivo e transitivo) R_0. Chiamiamo "la struttura di Tait associata a M la coppia di collezioni $(C, <)$ indicizzate dall'insieme dei tipi e così induttivamente definite:*

- C_O è l'insieme degli $a \in D_O$ tali che non esiste una catena discendente infinita di elementi di D_O tale che $a > a_1 > a_2 > ..... > a_n > ...$

- $<_O = R_O$

- $C_{S \to T}$ è l'insieme degli $a \in D_{S \to T}$ tali che per ogni $b, b' \in C_S$, $ab \in C_T$ e se $b >_S b'$ allora $ab >_T ab'$.

- $<_{S \to T}$ è una relazione binaria su $D_{S \to T}$ tale che per ogni $a, b \in D_{S \to T}$, $a >_{S \to T} b$ sse per ogni $c \in C_S$, $ac >_T bc$

Ometteremo sistematicamente la notazione $a >_T b$, e scriveremo semplicemente $a > b$, quando è noto che $a, b \in D_T$.

Definizione 3.1.6 *Sia $M = (D, \cdot, \iota, f)$ una $\Lambda\beta$-interpretazione e $(C, <)$ la struttura di Tait associata a M. Diciamo che M preserva $(C, <)$ se :*

-Per ogni termine $\lambda x^S u$, se $u\rho[x^S \mapsto a] \in C_T$ e $a \in C_S$, allora $(\lambda x^S u)\rho a \in C_T$.

-Per ogni $c, d \in C_S$, $c > d$ e $u\rho[x \mapsto c] \geq u\rho[x \mapsto d]$ implica $(\lambda x^S u)\rho c > (\lambda x^S u)\rho d$

-Per ogni $a \in C_S$, $(\lambda x^S u)\rho a > u\rho[x \mapsto a]$

-Se per ogni $a \in C_S$, $u\rho[x^S \mapsto a] > u'\rho'[y^S \mapsto a]$, allora $(\lambda x^S u)\rho > (\lambda y^S u')\rho'$, dove u, u' hanno lo stesso tipo.

Anche le condizioni di questa definizione sono abbastanza naturali. La prima è una indispensabile proprietà di chiusura. La seconda corrisponde alla monotonicità. La terza si riferisce al fatto che, volendo costruire un modello della β-riduzione, l'intepretazione di un redex deve essere strettamente maggiore del suo ridotto. La quarta è analoga alla condizione di Berry: una funzione è maggiore di un'altra, se la valutazione del "corpo" della prima in ogni punto a produce un risultato maggiore rispetto alla valutazione del "corpo" della seconda nello stesso punto.

Proposizione 3.1.7 *Sia $M = (D, \cdot, \iota)$ una $\Lambda\beta$-interpretazione e $(C, <)$ la struttura di Tait associata a M. Supponiamo inoltre che M preservi $(C, <)$. Sia* *inoltre ρ un ambiente tale che $\rho(x^S) \in C_S$ per ogni variabile x^S. Allora:*

1) Per ogni termine t e per ogni tipo T, se $t \in \Lambda_T$, allora $t\rho \in C_T$

2) Per ogni termine t di tipo T e $a, b \in C_S$, se $a >_S b$ e se x occorre libera in t, allora $t\rho[x \mapsto a] >_T t\rho[x \mapsto b]$.

Prova. Dimostriamo 1) e 2) per induzione simultanea sulla complessità di t.

Sia t una variabile y^T.
1) $t\rho = \rho(y^T) \in C_T$ per ipotesi.
2) Supponiamo $a > b$. Allora necessariamente $y = x$, e dunque $t\rho[x \mapsto a] = \rho[x \mapsto a](x) = a > b = \rho[x \mapsto b](x) = t\rho[x \mapsto b]$.

Sia $t = uv$.
1) Poiché $u\rho \in C_{S \to T}$ e $v\rho \in C_S$ per ipotesi induttiva, certamente $t\rho = (uv)\rho = u\rho(v\rho) \in C_T$.
2) Osserviamo innazitutto che se $c, c' \in C_{S \to T}$, $d, d' \in C_S$, $c \geq c'$ e $d \geq d'$, allora $cd \geq cd'$ e $cd' \geq c'd'$. Per la transitività di $<$, abbiamo infine $cd \geq c'd'$. Ora, per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a] \geq u\rho[x \mapsto b]$ e $v\rho[x \mapsto a] \geq v\rho[x \mapsto b]$. Per quanto appena osservato, e poiché per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a], u\rho[x \mapsto b] \in C_{S \to T}$ e $v\rho[x \mapsto a], v\rho[x \mapsto b] \in C_S$, abbiamo che $(uv)\rho[x \mapsto a] = u\rho[x \mapsto a](v\rho[x \mapsto a]) \geq u\rho[x \mapsto b](v\rho[x \mapsto b]) = (uv)\rho[x \mapsto b]$. Inoltre poiché x occorre libera in uv, e dunque in u o v, vale la disuguglianza stretta.

Sia $t = \lambda yu$.
1) Siano $a, a' \in C_S$, con $a > a'$. Per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a] \in C_T$ e dunque $(\lambda yu)\rho a \in C_T$, poiché M preserva $(C, <)$. Inoltre, per ipotesi induttiva, $u\rho[x \mapsto a] \geq u\rho[x \mapsto a']$. Dunque, sempre poiché M preserva $(C, <)$, $(\lambda yu)\rho a > (\lambda yu)\rho a'$.
2) Sia $c \in C_S$. Per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a][y \mapsto c] = u\rho[y \mapsto c][x \mapsto a] > u\rho[y \mapsto c][x \mapsto b] = u\rho[x \mapsto b][y \mapsto c]$. Dunque, poiché M preserva $(C, <)$, $(\lambda yu)\rho[x \mapsto a] > (\lambda yu)\rho[x \mapsto b]$. Q.E.D.

Proposizione 3.1.8 *Sia $M = (D, \cdot, \iota)$ una $\Lambda\beta$-interpretazione. Per ogni coppia di termini u, t e per ogni ambiente ρ, $u[t/x]\rho = u\rho[x \mapsto t\rho]$.*

Prova. Procediamo per induzione sulla complessità di u.

Sia u una variabile y. Se $y = x$, $u[t/x]\rho = t\rho = \rho[x \mapsto t\rho](x) = u\rho[x \mapsto t\rho]$. Se $y \neq x$, $u[t/x]\rho = y\rho = \rho(y) = \rho[x \mapsto t\rho](y) = u\rho[x \mapsto t\rho]$.

Se $u = vw$, per ipotesi induttiva $v[t/x] = v\rho[x \mapsto t\rho]$ e $w[t/x] = w\rho[x \mapsto t\rho]$. Dunque $vw[t/x]\rho = v[t/x]\rho(w[t/x]\rho) = v\rho[x \mapsto t\rho](w\rho[x \mapsto t\rho]) = vw\rho[x \mapsto t\rho]$.

Se $u = \lambda yv$, sia $a \in D_S$. Per ipotesi induttiva e α-equivalenza,
$v[t/x]\rho[y \mapsto a] = v\rho[y \mapsto a][x \mapsto t\rho[y \mapsto a]] = v\rho[y \mapsto a][x \mapsto t\rho] = v\rho[x \mapsto t\rho][y \mapsto a]$. Per definizione di M abbiamo infine $(\lambda yv[t/x])\rho = (\lambda yv)[t/x]\rho = (\lambda yv)\rho[x \mapsto t\rho]$. Q.E.D.

Proposizione 3.1.9 *Sia $M = (D, \cdot, \iota, f)$ una $\Lambda\beta$-interpretazione e $(C, <)$ la struttura di Tait associata a M. Supponiamo inoltre che M preservi $(C, <)$ e* *che ρ sia un ambiente tale che $\rho(x^S) \in C_S$ per ogni variabile x e tipo S. Allora per ogni termine t, se $t\beta_0 t'$, allora $t\rho > t'\rho$.*

Prova. Procediamo per induzione sulla complessità di v.

Se t è una variabile, la proposizione è banalmente vera.

Se $t = uv$, allora ci sono tre casi: 1) $t' = u'v$, con $u\beta_0 u'$. Per ipotesi induttiva $u\rho > u'\rho$ e dunque $uv\rho = u\rho(v\rho) > u'\rho(v\rho) = u'v\rho$. 2) $t' = uv'$, con $v\beta_0 v'$. Per ipotesi induttiva $v\rho > v'\rho$ e dunque $(uv)\rho = u\rho(v\rho) > u\rho(v'\rho) = uv'\rho$. 3) $t = (\lambda xw)v$ e $t' = w[v/x]$. In tal caso, $(\lambda xw)v\rho = (\lambda xw)\rho(v\rho) > w\rho[x \mapsto v\rho] = w[v/x]\rho$, poiché M preserva $(C, <)$.

Se $t = \lambda xu$, allora $t' = \lambda xu'$, con $u\beta_0 u'$. Sia allora $a \in C_S$. Per ipotesi induttiva $u\rho[x \mapsto a] > u'\rho[x \mapsto a]$. Ma allora $(\lambda xu)\rho > (\lambda xu')\rho$, poiché M preserva $(C, <)$. Q.E.D.

Teorema 3.1.10 *Sia $M = (D, \cdot, \iota)$ una $\Lambda\beta$-interpretazione e $(C, <)$ la struttura di Tait associata a M. Supponiamo inoltre che M preservi $(C, <)$. Se per ogni tipo T, $C_T \neq \emptyset$, allora ogni termine t è fortemente normalizzabile.*

Prova. Se t non fosse fortemente normalizzabile, esisterebbe una riduzione infinita $t = t_1\beta_0 t_2\beta_0 \ldots \beta_0 t_n\beta_0 \ldots$. Ma allora, prendendo un ambiente ρ tale che $\rho(x^S) \in C_S$ per ogni variabile x e tipo S (che esiste, essendo C_S non vuoto per ogni tipo S) avremmo che $t\rho = t_1\rho > t_2\rho > \ldots > t_n\rho > \ldots$, ovvero una catena discendente infinita in C_A, dove A è il tipo di t. È sufficiente dunque mostrare che per ogni tipo T, C_T non ha catene discendenti infinite.
Procediamo per induzione su T. Se $T = O$, C_O per definizione non contiene catene discendenti infinite. Se $T = A \to B$, supponiamo per assurdo che $C_{A\to B}$ abbia una catena discendente infinita $c_1 > c_2 > \ldots > c_n \ldots$. Abbiamo che esiste un $x \in C_A$. Ma allora $c_1 x > c_2 x > \ldots > c_n x > \ldots$ sarebbe una catena discendente infinita di C_B, assurdo per ipotesi induttiva. Q.E.D.

3.2 Gandy

Per completare la dimostrazione del teorema di normalizzazione forte, è ora sufficiente costruire una $\Lambda\beta$-interpretazione $M = (D, \cdot, \iota)$ tale che M preservi la struttura di Tait associata a M. A seconda della scelta che faremo, otterremo la prova di normalizzazione forte di Gandy oppure quella di Tait. La scelta di questa paragrafo corrisponde alla prova di Gandy.

Definizione 3.2.1 *Definiamo per induzione sul tipo T una collezione di insiemi G.*
Se $T = O$, poniamo $G_O = \mathbb{N}^+$.
Se $T = A \to B$, poniamo $G_{A\to B} = \{f | f : G_A \to G_B\}$.

Definiamo inoltre una collezione di operazioni $+_T$ per induzione sul tipo T:
Se $T = O$, $+_O : G_O \times G_O \to G_O$ e $n +_0 m = n + m$
se $T = A \to B$, $+_T : G_T \times G_T \to G_T$ e $(f + g)x = f(x) +_B g(x)$

Definiamo ora l'operazione $\cdot_G : \bigcup G \times \bigcup G \to \bigcup G$, *nel seguente modo:* $f \cdot_G g = f(g)$ *se* $f \in G_{A\to B}$ *e* $g \in G_A$ *per qualche tipo* A, B, *e* $f \cdot_G g =$ *un elemento arbitrario altrimenti.*

Sia ora $(C, <)$ *la struttura di Tait associata a* $(G, \cdot_G)$ *e fissiamo un elemento* $c_T \in C_T$ *per ogni tipo* T.
Definiamo inoltre $\iota : \Lambda \times Env \to \bigcup G$ *nel seguente modo:*
$x\rho = \rho(x)$
$(ut)\rho = u\rho(t\rho)$
$(\lambda x^S u)\rho = a \in G_S \longmapsto u\rho[x^S \mapsto a] +_B c_{A\to B}(a)$

Poniamo infine $Gan = (G, \cdot_G, \iota)$ *la struttura di Gandy.*

Ovviamente la bontà della definizione dipende dal non essere vuoti gli insiemi C_T per ogni tipo T.

Proposizione 3.2.2 *Per ogni tipo* T *1)* C_T *è chiuso rispetto all'operazione* $+_T$ *2) Se* $f, f', h, h' \in D_T$, $f > f'$ *e* $h > h'$, *allora* $f +_T h > f' +_T h$ *e* $f +_T h > f +_T h'$ *e* $f +_T h > f$.

Prova. Per induzione su T.
Se $T = O$, allora $C_O = \mathbb{N}^+$ e $+_O = +$; dunque 1) e 2) sono automaticamente garantite.

Sia $T = A \to B$. Siano $f, h \in C_T$ e $a, a' \in C_A$, con $a > a'$. Poiché $f(a), h(a) \in C_B$, per ipotesi induttiva $(f +_T h)(a) = f(a) +_B h(a) \in C_B$. Inoltre $f(a) > f(a')$ e $h(a) > h(a')$ e dunque per ipotesi induttiva $(f +_T h)(a) = f(a) +_B h(a) > f(a') +_B h(a') = (f +_T h)(a')$ e dunque vale 1).
Se inoltre $f, f', h, h' \in D_T$, $f > f'$ e $h > h'$, allora $f(a) > f'(a)$, $h(a) > h'(a)$ e per ipotesi induttiva $f(a) +_B h(a) > f'(a) +_B h(a)$ e $f(a) +_B h(a) > f(a) +_B h'(a)$ e $f(a) +_B h(a) > f(a)$; dunque $(f +_T h)(a) = f(a) +_B h(a) > f'(a) +_B h(a) = (f' +_T h)(a)$ e $(f +_T h)(a) = f(a) +_B h(a) > f(a) +_B h'(a) = (f +_T h')(a)$ e $(f +_T h)(a) = f(a) +_B h(a) > f(a)$ provando dunque che $f +_T h > f' +_T h$ e $f +_T h > f +_T h'$ e $f +_T h > f$, e quindi 2). Q.E.D.

Proposizione 3.2.3 *Sia* $(C, <)$ *la struttura di Tait associata a* $(G, \cdot_G)$. *Per ogni tipo* T, $C_T \neq \emptyset$.

Prova. Definiamo per induzione su T un elemento $c_T \in C_T$.
Se $T = O$, $C_O = \mathbb{N}^+$ e poniamo $c_O = 1$.
Se $T = O \to O$, poniamo $c_O = n \in G_O \longmapsto n$: ovviamente è in C_T, essendo strettamente crescente.
Se $T = (A \to B) \to O$, poniamo $c_T = f \in G_{A\to B} \longmapsto c_{B\to O}(f(c_A))$
Se $T = A \to (B \to E)$, poniamo
$c_T = a \in G_A \longmapsto (b \in G_B \longmapsto c_{A\to E}(a) +_E c_{B\to E}(b))$. Q.E.D.

È a questo punto banale verificare che Gan è una $\Lambda\beta$-interpretazione. Inoltre:

Proposizione 3.2.4 *Sia* $Gan = (G, \cdot_G, \iota)$ *e* $(C, <)$ *la struttura di Tait associata a* $(G, \cdot_G)$. *Allora* Gan *preserva* $(C, <)$.

Prova. -Se $u\rho[x^S \mapsto a] \in C_B$ e $a \in C_A$, allora $(\lambda x^S u)\rho a = u\rho[x^S \mapsto a] +_B c_{A\to B}(a) \in C_B$.

-Siano $b, d \in C_S$, con $b >_S d$ e $u\rho[x \mapsto b] \geq u\rho[x \mapsto d]$. Allora $(\lambda x^S u)\rho b = u\rho[x^S \mapsto b] +_B c_{A\to B}(b) > u\rho[x^S \mapsto d] +_B c_{A\to B}(d) = (\lambda x^S u)\rho d$

-Sia $a \in C_S$. Abbiamo $(\lambda x^S u)\rho a = u\rho[x^S \mapsto a] +_B c_{A\to B}(a) > u\rho[x^S \mapsto a]$

-Se per ogni $a \in C_S$, $u\rho[x^S \mapsto a] > u'\rho'[y^S \mapsto a]$, allora per ogni $a \in C_S$, $(\lambda x^S u)\rho a = u\rho[x^S \mapsto a] +_B c_{A\to B}(a) > u'\rho'[y^S \mapsto a] +_B c_{A\to B}(a) = (\lambda y^S u')\rho' a$. Dunque $(\lambda x^S u)\rho > (\lambda y^S u')\rho'$.

Dunque effettivamente *Gan* preserva $(C, <)$. Q.E.D.

Teorema 3.2.5 *Ogni termine è fortemente normalizzabile*

Prova. *Gan* soddisfa tutte le ipotesi del teorema 3.1.10

3.3 Tait

Una dimostrazione alternativa del teorema di normalizzazione forte si può ottenere costruendo una $\Lambda\beta$-intepretazione sintattica.

Definizione 3.3.1 *Ricordiamo innanzitutto che Λ può essere visto come una collezione di insiemi Λ_T, dove Λ_T è l'insieme dei termini di tipo T, quozientato modulo α-equivalenza. Supporremo inoltre Λ_O ordinato dalla chiusura transitiva della $\beta\eta_0$ riduzione.*

Definiamo ora l'operazione $\cdot_\Lambda : \bigcup\Lambda \times \bigcup\Lambda \to \bigcup\Lambda$, nel seguente modo: $u \cdot_\Lambda t = ut$ se $u \in \Lambda_{A\to B}$ e $t \in \Lambda_A$ per qualche tipo A, B, e $f \cdot_\Lambda g =$ un elemento arbitrario altrimenti.

Definiamo inoltre $\iota : \Lambda \times Env \to \Lambda$ nel seguente modo:

$u\rho = u[\rho(x_1)/x_1 \dots \rho(x_n)/x_n]$, dove $x_1, \dots, x_n$ sono le variabili libere di u.

Poniamo infine $Tai = (\Lambda, \cdot_\Lambda, \iota)$ la struttura di Tait.

Notiamo innanzitutto che Tai è una $\Lambda\beta$-interpretazione. Certamente infatti $x\rho = \rho(x)$ e $(ut)\rho = u\rho(t\rho)$ per le proprietà della sostituzione. Inoltre, per ogni coppia di termini u, u' e ambienti ρ, ρ', se per ogni $a \in \Lambda_S$, $u\rho[x^S \mapsto a] = u'\rho'[y^S \mapsto a]$, allora in particolare $u\rho[x^S \mapsto z^S] = u'\rho'[y^S \mapsto z^S]$, con z variabile che non occorre libera in u, u' e in $\rho(x_i)$ e $\rho'(y_i)$ dove x_i e y_i sono variabili libere di u, u'. Infine abbiamo che $(\lambda x^S u)\rho = (\lambda z^S u[z/x])\rho = \lambda z^S(u\rho[x^S \mapsto z^S]) = \lambda z^S(u'\rho'[y^S \mapsto z^S]) = (\lambda z^S u'[z/y])\rho = (\lambda y^S u')\rho'$. Inoltre:

Proposizione 3.3.2 *Sia $Red_O = SN_0$ e $Red_{A\to B} = \{u \in \Lambda_{A\to B} |$ per ogni $t \in Red_A$, $ut \in Red_B\}$. Allora per ogni tipo T: 1) $Red_T \subseteq SN$. 2) Per ogni variabile x^T, $x \in Red_T$. 3) Per ogni termine $(\lambda x^S u)\rho a$, se $u\rho[x^S \mapsto a] \in Red_T$ e $a \in Red_S$, allora $(\lambda x^S u)\rho a \in Red_T$*

Prova. Standard: vedi Girard [2], pag. 42.

Proposizione 3.3.3 *Sia* $(C, <)$ *la struttura di Tait associata a* Tai*. Allora per ogni* T*,* $Red_T = C_T$*.*

Prova. Mostriamo per induzione su T che per ogni $u, t \in C_T$, $u > t$ sse $u\beta\eta^+ t$. (A partire da tale fatto si può dimostrare, per induzione simultanea sul tipo T, che ogni $t \in Red_T$ è strettamente crescente e che $Red_T = C_T$).
Se $T = O$, la tesi è vera per definizione.
Sia $T = A \to B$. Supponiamo $u\beta\eta^+ t$. Sia $w \in C_A$. Abbiamo che $uw, tw \in C_B$. Per ipotesi induttiva, poichè ovviamente $uw\beta\eta^+ tw$, certamente $uw > tw$. Dunque $u > t$. Viceversa, supponiamo $u > t$ e che per assurdo non sia vero che $u\ \beta\eta^+\ t$. Sia ora $x \in C_A = Red_A$ tale che x non compare libera in u, t. Per ipotesi abbiamo che $ux > tx$ e per ipotesi induttiva $ux\ \beta\eta^+\ tx$. Abbiamo allora che necessariamente, per qualche u'', $u\beta\lambda xu''$ e $ux\ \beta\eta\ (\lambda xu'')x\ \beta\eta\ u''\beta\eta\ tx$. Dunque $u\ \beta\eta\ \lambda xu''\beta\eta\ \lambda xtx = \beta\eta^+\ t$: assurdo (consequentia mirabilis). Q.E.D.

Proposizione 3.3.4 *Sia* $(C, <)$ *la struttura di Tait associata a* Tai*. Allora* Tai *preserva* $(C, <)$*.*

Prova.
-Se $u\rho[x^S \mapsto a] \in C_B = Red_B$ e $a \in C_A = Red_A$, allora $(\lambda x^S u)\rho a \in Red_B = C_B$.

-Siano $b, d \in C_S$, con $b >_S d$. Allora $b\ \beta\eta\ d$ e $(\lambda x^S u)\rho b\ \beta\eta\ (\lambda x^S u)\rho d$; dunque $(\lambda x^S u)\rho b > (\lambda x^S u)\rho d$

-Sia $a \in C_S$. Allora $(\lambda x^S u)\rho a\ \beta\eta\ u\rho[x^S \mapsto a]$, e dunque $(\lambda x^S u)\rho a > u\rho[x^S \mapsto a]$

-Se per ogni $a \in C_S$, $u\rho[x^S \mapsto a] > u'\rho'[y^S \mapsto a]$, allora per ogni $a \in C_S$, allora in particolare $u\rho[x^S \mapsto z^S] > u'\rho'[y^S \mapsto z^S]$, con z variabile che non occorre libera in u, u' e in $\rho(x_i)$ e $\rho'(y_i)$ dove x_i e y_i sono variabili libere di u, u'. Infine abbiamo che $(\lambda x^S u)\rho = (\lambda z^S u[z/x])\rho = \lambda z^S(u\rho[x^S \mapsto z^S]) > \lambda z^S(u'\rho'[y^S \mapsto z^S]) = (\lambda z^S u[z/y])\rho = (\lambda y^S u')\rho'$.

Dunque effettivamente Tai preserva $(C, <)$. Q.E.D.

Teorema 3.3.5 *Ogni termine è fortemente normalizzabile*

Prova. Tai soddisfa tutte le ipotesi del teorema 3.1.10.

Osservazione. La prova appena illustrata è più complicata di quella originale di Tait. Appare tuttavia chiaro che essa può essere semplificata, fino a divenire esattamente la prova di Tait. Lo scopo infatti di questa presentazione non era quello di esporre una prova semplificata al massimo, ma quello di mostrare come la prova di Tait e quella di Gandy siano casi particolari di una medesima prova. In effetti, abbiamo proprio ottenuto la prova di Tait cercando di costruire una $\Lambda\beta$-interpretazione sintattica. Abbiamo poi osservato che la relazione $<$ in $(C, <)$ è collassata nella relazione $\beta\eta$ e che gli stessi insiemi C_T corrispondono ai predicati di riducibilità Red_T introdotti di Tait.

Capitolo 4

Una caratterizzazione dei termini non SN

Nel primo paragrafo di questo capitolo daremo una caratterizzazione sintattica dei lambda termini puri non SN. Nel secondo paragrafo useremo tale caratterizzazione per dimostrare il teorema di normalizzazione forte per i lambda termini tipati semplici alla Church. Nel terzo paragrafo invece dimostreremo la normalizzazione forte per il sistema dei tipi intersezione, utilizzando le proposizioni dimostrate nel primo paragrafo.

4.1 Caratterizzazione dei termini non SN

Richiamiamo alcune definizioni e fatti fondamentali, con riferimento a Krivine [3]. Ogni lambda termine t può essere scritto, in modo unico, nella forma $\lambda x_1 \dots \lambda x_m \; vt_1 \dots t_n$, dove $m, n \geq 0$ e v è una variabile o un redex $v = (\lambda xu)t$. Se v è un redex, v è chiamato il redex di testa di t.
Un termine si dice un'applicazione se è della forma ut, un'astrazione se è della forma λxu. Se un termine v è un'applicazione ut, chiamiamo u l'antecedente e t il conseguente di v.
Se t' è un sottotermine di t scriveremo $t \gg t'$, leggendo t contiene t'.
SN è l'insieme dei termini fortemente normalizzabili.
Indichiamo con β_0 la relazione tale che $t\beta_0 t'$ sse t' è ottenuto da t contraendo un redex di t. Una sequenza (finita o infinita) di termini $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ si dice una riduzione di t, se $t = t_1$, e per ogni i, $t_i \beta_0 t_{i+1}$.
Se $u \in SN$, indichiamo con $h(u)$ la lunghezza della più lunga riduzione di u. Possiamo ora procedere con il lavoro.

Definizione 4.1.1 *Un lambda termine ut si dice elementare se $u \in SN$, $t \in SN$ e $ut \notin SN$.*

Un termine elementare è un termine non fortemente normalizzabile non ulteriormente scomponibile in termini non fortemente normalizzabili più piccoli.

Osserviamo che ogni termine elementare è della forma $(\lambda xu)tt_1 \dots t_n$ (e naturalmente $u, t, t_1, \dots t_n \in SN$). Infatti non può essere della forma $xt_1 \dots\ t_n$, poiché $t_1, \dots, t_n \in SN$, e dunque anche $xt_1 \dots\ t_n \in SN$.

Proposizione 4.1.2 *Sia $v \notin SN$. Allora v ha un sottotermine elementare.*

Prova. Per induzione su v. Se $v = x$, allora $v \notin SN$ è falso, dunque la tesi è banalmente vera.
Se $v = ut$, e $u \in SN$ e $t \in SN$, v è elementare; se invece, $u \notin SN$ o $t \notin SN$, per ipotesi induttiva o u o t contiene un sottotermine elementare, e dunque anche v. Se $v = \lambda xu$, allora $u \notin SN$, dunque per ipotesi induttiva u contiene un sottotermine elementare, e dunque anche v. $\square$

Poiché in ogni termine ogni sottostringa che inizia per (corrisponde a un'unica applicazione, se $t \notin SN$, possiamo definire il termine elementare più a sinistra contenuto in t: chiameremo tale termine il sottotermine standard di t.

Proposizione 4.1.3 *Se $t \in SN$ e $u[t/x]t_1 \dots t_n \in SN$, $(\lambda xu)tt_1 \dots t_n \in SN$.*

Prova. Per induzione su $k = h(u) + h(t) + h(t_1) + \dots + h(t_n)$. Sia v tale che $(\lambda xu)tt_1 \dots t_n \beta_0 v$. Ci sono due casi. Primo caso: $v = (\lambda xu')t't'_1 \dots t'_n$, con $u\beta u'$, $t\beta t'$ e $t_i \beta t'_i$; allora, poiché $u[t/x]t_1 \dots t_n \beta u'[t'/x]t'_1 \dots t'_n$, per ipotesi induttiva $v \in SN$. Secondo caso: $v = u[t/x]t_1 \dots t_n$. Allora $v \in SN$ per ipotesi.
Poiché ogni termine cui $(\lambda xu)tt_1 \dots t_n$ si β_0-riduce è fortemente normalizzabile, anche $(\lambda xu)tt_1 \dots t_n \in SN$. $\square$

Sia ora $v \notin SN$ e $s = (\lambda xu)tt_1 \dots t_n$ un sottotermine elementare di v. Allora, se v' è ottenuto da v per la contrazione del redex di testa di s, ovvero sostituendo s con $u[t/x]t_1 \dots t_n$, allora $v' \notin SN$. Infatti, poiché $t \in SN$, per la proposizione 4.1.3, $u[t/x]t_1 \dots t_n \notin SN$, e poiché v' lo contiene, $v' \notin SN$. Ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione (riduzione standard) 4.1.4 *Sia $t \notin SN$. Definiamo per induzione la riduzione standard di t.*
Poniamo $t_1 = t$. Supponendo di aver definito t_n, poniamo t_{n+1} il termine ottenuto da t_n contraendo il redex di testa del sottotermine standard di t_n. $\square$

Proposizione 4.1.5 *Sia $t \notin SN$. Allora la riduzione standard di t è infinita.* $\square$

Sia $t_1, t_2, \dots, t_n \dots$ la riduzione standard di $t \notin SN$. Scriveremo $t\beta_{st}t'$ sse $t' = t_i$ per qualche $i \in \mathbb{N}$.

Proposizione 4.1.6 *Siano $u, t \in SN$ e $u[t/x] \notin SN$. Allora esiste v tale che $u[t/x]\beta_{st}v$ e il sottotermine standard di v è della forma $tt_1 \dots t_n$.*

Prova. Per induzione su $h(u)$. Sia s il sottotermine standard di $u[t/x]$. Consideriamo il primo passo della beta riduzione standard di $u[t/x]$. Se viene contratto un redex di u ottenendo $u'[t/x]$, con $u\beta_0 u'$, abbiamo immediatamente la tesi per ipotesi induttiva. Se viene contratto un redex di t, poiché $t \in SN$, s non è un sottotermine di t; inoltre, poiché il redex di t che viene contratto è il redex di testa di s, $s = tt_1 \dots t_n$. Se viene contratto un redex che ha per antecedente t, t è l'antecedente del redex di testa di s, e dunque $s = tt_1 \dots t_n$. $\square$

Proposizione 4.1.7 *Sia vt elementare. Allora esiste un termine elementare $(\lambda xs)t$ tale che $vt\beta_{st}(\lambda xs)t$.*

Prova. Per induzione su $h(v)$. Abbiamo $vt = ((\lambda xu)t_1 \dots t_n)t$; dunque, $v = (\lambda xu)t_1 \dots t_n$.
Se $n = 0$, abbiamo ovviamente la tesi. Se $n > 0$, $vt\beta_{st}(u[t_1/x]t_2 \dots t_n)t$. Poiché $(u[t_1/x]t_2 \dots t_n)t \notin SN$, tale termine è elementare. Dunque, per ipotesi induttiva, $(u[t_1/x]t_2 \dots t_n)t\beta_{st}(\lambda xs)t$ e quindi abbiamo la tesi. $\square$

Proposizione 4.1.8 *Sia ut elementare. Allora esiste v tale che $ut\beta_{st}v$ e il sottotermine standard di v è della forma $tt_1 \dots t_n$.*

Prova. Combinando le proposizioni 4.1.6 e 4.1.7.

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione interessante dei termini non fortemente normalizzabili. Indichiamo con la notazione $t \dots t'$ un generico termine della forma $tt_1 \dots t_n t'$.

Teorema di caratterizzazione dei termini non SN 4.1.9 *Sia $u \notin SN$. Allora esiste una sequenza infinita di termini $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ tale che $u_1 = u$, per ogni $i \in \mathbb{N}^+$, $u_i\ \beta\ u_{i+1}$ e inoltre:*

$u_1 \gg t_1 \dots t_2$, $u_2 \gg t_2 \dots t_3$, $u_3 \gg t_3 \dots t_4$, ..., $u_n \gg t_n \dots t_{n+1}$, ..., dove per ogni i, $t_i \dots t_{i+1}$ è un termine elementare;
(più formalmente, esiste una sequenza infinita di termini $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tale che, per ogni i, u_i contiene un termine elementare della forma $t_i \dots t_{i+1}$).

Prova. Poniamo $u_1 = u$. Supponendo di aver definito u_n, e che $u_n \gg t_n \dots t_{n+1}$ elementare, poniamo u_{n+1} il termine che si ottiene da u_n sostituendo $t_n \dots t_{n+1}$, con un termine v' tale che $t_n \dots t_{n+1}\beta_{st}v'$ e v' contiene come sottotermine elementare un termine della forma $t_{n+1} \dots t_{n+2}$. $\square$

In vista del paragrafo sui tipi intersezione, osserviamo che le proposizioni 4.1.6 e 4.1.7. possono essere ri-enunciate nel seguente modo.

Proposizione 4.1.10 *Siano $u, t \in SN$ e $u[t/x] \notin SN$. Allora esiste u' tale che $u\beta u'$, u' ha un sottotermine $xt_1 \dots t_n$ tale che $xt_1 \dots t_n[t/x]$ è elementare e inoltre ogni occorrenza di x in u' è libera.*

Proposizione 4.1.11 *Sia vt elementare. Allora esiste un termine elementare $(\lambda xs)t$ tale che $v\ \beta\ \lambda xs$.*

4.2 Tipi alla Church

La dimostrazione del teorema di normalizzazione forte è più immediata e semplice per i lambda termini tipati alla Church. Essi non sono null'altro che lambda termini le cui variabili sono decorate con i tipi. Il vantaggio di tale decorazione è che ogni termine tipato alla Church ha un unico tipo. Dunque, per ogni lambda termine tipato alla Church, possiamo parlare *del tipo* di t. È inoltre evidente che tutte le proposizioni del paragrafo precedente sono valide per i lambda termini tipati alla Church.

Teorema di normalizzazione forte 4.2.1 *Sia v un lambda termine tipato alla Church. Allora v è fortemente normalizzabile.*

Prova. Supponiamo per assurdo che $v \notin SN$. Per il teorema 4.1.9 di caratterizzazione dei termini non SN, esiste una sequenza infinita di termini $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tale che $u_1 = u$, per ogni i, $u_i \ \beta \ u_{i+1}$ e inoltre $u_1 \gg t_1 \ldots t_2$, $u_2 \gg t_2 \ldots t_3$, $u_3 \gg t_3 \ldots t_4$, ..., $u_n \gg t_n \ldots t_{n+1}$, ..., dove per ogni i, $t_i \ldots t_{i+1}$ è un termine elementare. Per la proprietà di subject reduction, per ogni $i \in \mathbb{N}$, u_i è un termine tipato alla Church, e dunque anche $t_i \ldots t_{i+1}$. Ne segue che per ogni $i \in \mathbb{N}$ il tipo di t_i contiene strettamente il tipo di t_{i+1}: assurdo. Q.E.D.

4.3 Tipi intersezione

In questo paragrafo studiamo il sistema D dei tipi intersezione (vedi Krivine [3]). Ricordiamo che un tipo si dice "primo" se è un tipo variabile o implicazione. Da questa definizione segue che ogni tipo T, nei tipi intersezione, è della forma $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$, con $P_1, \ldots, P_n$ primi, e dunque, con riferimento a questa rappresentazione, diremo che ogni tipo è intersezione di primi e che $P_1, \ldots, P_n$ sono fattori primi di T.
Chiamiamo inoltre un espressione derivabile $\Gamma \vdash u : T$:
-applicativa se $u = vw$ e $\Gamma \vdash v : S \rightarrow T$ e $\Gamma \vdash w : S$;
-astrattiva se $u = \lambda xv$, $T = A \rightarrow B$ e $\Gamma, x : A \vdash u : B$;
-variabile se $u = x$ e $\Gamma = \Gamma', x : T$.
Chiameremo l'espressione $\Gamma \vdash u : T$ "primitiva" se è applicativa, astrattiva o variabile.
Indichiamo inoltre con $Primitivi(\Gamma, u)$ l'insieme dei primi P per i quali esiste un'espressione primitiva $\Gamma \vdash u : T$ tale che P è un fattore di T.

Proposizione 4.3.1 *Per ogni termine u, se $\Gamma \vdash u : T$, allora T è intersezione di tipi appartenenti a $Primitivi(\Gamma, u)$*

Prova. Per induzione sul numero di regole utilizzate per derivare $\Gamma \vdash u : T$.
Se $\Gamma \vdash u : T$ è primitiva, la tesi è vera per ipotesi.
Se $\Gamma \vdash u : T$ non è primitiva, allora l'ultima regola utilizzata è una $\wedge E$ o una $\wedge I$. Dunque o $\Gamma \vdash u : S \wedge T$ e otteniamo la tesi per ipotesi induttiva e per il fatto che ogni fattore primo di T è un fattore primo di $S \wedge T$, oppure $T = A \wedge B$, $\Gamma \vdash u : A$ e $\Gamma \vdash u : B$, e anche in questo caso otteniamo immediatamente la tesi per ipotesi induttiva e per il fatto che i fattori primi di $A \wedge B$ sono esattamente i fattori primi di A, B. Q.E.D.

Proposizione 4.3.2 *Supponiamo che $\Gamma, x : A \vdash xt_1 \ldots t_n : B$. Allora B è intersezione di sottotipi primi di A.*

Prova. Per induzione su n.
Se $n = 0$, allora $\Gamma, x : A \vdash x : B$. Dimostriamo allora la tesi per induzione sul numero di regole utilizzate nella derivazione di $\Gamma, x : A \vdash x : B$. Se $A = B$, la tesi è banalmente vera. Se $A \neq B$, necessariamente l'ultima regola applicata è una $\wedge E$ o una $\wedge I$. Nel primo caso, $\Gamma, x : A \vdash x : C \wedge B$, e otteniamo la tesi per ipotesi induttiva. Nel secondo caso, $B = C \wedge D$, $\Gamma, x : A \vdash x : C$ e $\Gamma, x : A \vdash x : D$, e ancora otteniamo immediatamente la tesi per ipotesi induttiva.
Supponiamo ora $n > 0$. È sufficiente dimostrare la tesi assumendo che $\Gamma, x : A \vdash xt_1 \ldots t_n : B$ sia primitiva, in quanto, per la proposizione precedente, B è comunque intersezione di primi in $Primitivi(\Gamma, x : A, xt_1 \ldots, t_n)$: se essi sono tutti intersezione di sottotipi primi di A, lo è anche B.
Data la nostra assunzione, $\Gamma, x : A \vdash xt_1 \ldots t_n : B$ deve essere necessariamente applicativa. Ma allora $\Gamma, x : A \vdash xt_1 \ldots t_{n-1} : C \rightarrow B$ e $\Gamma, x : A \vdash t_n : C$. Per ipotesi induttiva, $C \rightarrow B$ è intersezione di sottotipi primi di A; dunque $C \rightarrow B$ stesso, essendo primo, deve essere un sottotipo primo di A. Ma allora certamente B è un sottotipo di A, e dunque banalmente intersezione di sottotipi primi di A. Q.E.D.

Corollario 4.3.3 *Se* $\Gamma, x : A \vdash xt_1 \dots t_{n-1} : C \to B$ *e* $\Gamma, x : A \vdash t_n : C$*, allora* C *è un sottotipo proprio di* A.

Prova. Per la proposizione precedente, $C \to B$ è intersezione di sottotipi primi di A, e dunque, essendo primo, è in particolare esso stesso un sottotipo di A. Dunque C è un sottotipo di proprio di A. Q.E.D.

Proposizione 4.3.4 *Se* $\Gamma \vdash (\lambda xu) : A \to B$*, allora* $\Gamma, x : A \vdash u : B$.

Prova. Per induzione sul numero di regole della derivazione, mostriamo che vale una tesi più forte: se $\Gamma \vdash (\lambda xu) : P_1 \wedge \dots \wedge P_n$, con $P_1, \dots, P_n$ primi, allora per ogni i, $P_i = C_i \to D_i$ e $\Gamma, x : C_i \vdash u : D_i$.
Se $\Gamma \vdash (\lambda xu) : P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ è astrattiva, necessariamente $n = 1$, $P_1 = C \to D$ e $\Gamma, x : C \vdash u : D$.
Se $\Gamma \vdash (\lambda xu) : P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ non è astrattiva, l'ultima regola utilizzata per derivarla è una $\wedge E$ oppure una $\wedge I$. Nel primo caso $\Gamma \vdash (\lambda xu) : Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \wedge P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ e otteniamo la tesi per ipotesi induttiva. Nel secondo caso $\Gamma \vdash (\lambda xu) : P_1 \wedge \dots \wedge P_k$ e $\Gamma \vdash (\lambda xu) : P_{k+1} \wedge \dots \wedge P_n$ e otteniamo ancora e immediatamente la tesi per ipotesi induttiva. Q.E.D.

Proposizione 4.3.5 *Supponiamo che* $\Gamma \vdash u : T$*. Allora esiste* S *tale che* $\Gamma \vdash u : S$ *è primitiva.*

Prova. Vedi Krivine [3], pag. 50. Q.E.D.

Proposizione 4.3.6 *Supponiamo che* $\Gamma, x : A \vdash u : B$ *e che* $\Gamma \vdash t : A$*. Allora* $\Gamma \vdash u[t/x] : B$

Prova. Vedi Krivine [3], pag. 50. Q.E.D.

Proposizione (Subject Reduction) 4.3.7 *Se* $\Gamma \vdash t : A$ *e* $t\ \beta\ t'$*, allora* $\Gamma \vdash t' : A$.

Prova. Vedi Krivine [3], pag. 50. Q.E.D.

Teorema di normalizzazione forte 4.3.8 *Ogni lambda termine* s *tipabile con i tipi intersezione è fortemente normalizzabile.*

Prova. Supponiamo per assurdo che $s \notin SN$. Sia E l'insieme dei termini tipati elementari: E è non vuoto. Sia $vt \in E$ tale che:
1) Esiste Γ tale che $\Gamma \vdash v : A \to B$ e $\Gamma \vdash t : A$.
2) Per ogni altro $v't' \in E$, se $\Gamma' \vdash v' : A' \to B'$ e $\Gamma' \vdash t' : A'$, allora A' non è un sottotipo proprio di A.
Per la proposizione 4.1.11, esiste λxu tale che $(\lambda xu)t$ è elementare e $v\beta\lambda xu$. Abbiamo allora, per la proposizione 4.3.7, che $\Gamma \vdash \lambda xu : A \to B$ e dunque, per la proposizione 4.3.4, $\Gamma, x : A \vdash u : B$. Inoltre, per la proposizione 4.1.10, esiste u' tale che $u\ \beta\ u'$, u' contiene un sottotermine $xt_1 \dots t_n$ tale che $xt_1 \dots t_n[t/x] \in E$ e ogni occorrenza di x in u' è libera. Dunque, per la proposizione 4.3.7, abbiamo che $\Gamma, x : A \vdash u' : B$ e dunque esiste $\Gamma' \supseteq \Gamma$ tale che $\Gamma', x : A \vdash xt_1 \dots t_n : D$ ed esiste un tipo C, per la proposizione 4.3.5, tale che $\Gamma', x : A \vdash xt_1 \dots t_{n-1} : C \to D$ e $\Gamma', x : A \vdash t_n : D$. Per il corollario 4.3.3, D è un sottotipo proprio di A. Per la proposizione 4.3.6, poiché certamente $\Gamma' \vdash t : A$, abbiamo che $\Gamma' \vdash xt_1 \dots t_{n-1}[t/x] : C \to D$ e $\Gamma' \vdash t_n[t/x] : D$. Ma $xt_1 \dots t_{n-1}[t/x]t_n[t/x] = xt_1 \dots t_n[t/x] \in E$, e ciò contraddice la nostra scelta di "minimalità" di A. Q.E.D.

Bibliografia

[1] R.O. Gandy, *Proofs of Strong Normalization*, In To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism, pag. 457-477, Academic Press (1980)

[2] Jean-Yves Girard, *Proofs and Types*, Cambridge University Press (1989)

[3] J.L. Krivine: *Lambda-calculus, Types and Models*, Masson, Paris (1993)

[4] Morten Heine Sorensen, *Strong Normalization from Weak Normalization in Typed λ-Calculi*, Information and Computation 133, 35-71 (1997)

[5] H. Xi: *Weak and Strong Beta Normalisations in Typed λ-Calculi*, In Proceedings of 3rd International Conference on Typed Lambda-Calculi and Applications , Lecture Notes in Computer Science, vol. 1210, pp 390-404, Nancy (1997)