DISSERTATION

Die multivariate Sattelpunktmethode und Anwendungen in der abzählenden Kombinatorik

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Bernhard Gittenberger

am Institut für

Diskrete Mathematik und Geometrie

der

Technischen Universität Wien

von

Dipl.-Ing. Johannes Mandlburger
Matr. Nr.: e9625723

Znaimerstraße 39
2070 Retz

Retz, März 2006

Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit der multivariaten Sattelpunktmethode, die eine der wichtigsten Methoden ist, um asymptotische Informationen über schnell wachsende Funktionen der Gestalt

$$F(\mathbf{n}) = \underset{\mathbf{P_n}}{\int \cdots \int} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \mathrm{d}\mathbf{z}$$

für $\mathbf{n} \to \infty$ zu erhalten, wobei $\mathbf{P_n} \subseteq \mathbb{C}^d$ sei.

Nach einer kurzen Einleitung wird erklärt, wie die Sattelpunktmethode funktioniert und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit sie angewendet werden kann.

Danach folgen Anwendungsbeispiele für die Sattelpunktmethode. Diese wird hier verwendet um zu berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass d zufällig gewählte, normierte Polynome $p_1, \ldots, p_d$ teilerfremd beziehungsweise paarweise teilerfremd in $\mathbb{F}_q$ sind, und dass p_j m_j-glatt und vom Grad n_j ist, für $1 \leq j \leq d$.

Im folgenden Teil der Dissertation wird der Begriff der univariaten Hayman-admissiblen Funktionen, den Hayman 1956 in [26] eingeführt hat, für den multivariaten Fall verallgemeinert. Für den univariaten Fall hat Hayman eine Basisfunktion und Abgeschlossenheitsbedingungen angegeben, mit dessen Hilfe aus Hayman-admissiblen Funktionen mittels algebraischer Umformungen wieder Hayman-admissible Funktionen erzeugt werden können.
Das Ziel ist nun, für den multivariaten Fall ebenfalls eine Basisklasse anzugeben und so viele Abgeschlossenheitsbedingungen wie möglich in den multivariaten Fall zu übertragen. Dabei wird großer Wert darauf gelegt, dass die Definition so nahe wie möglich an der Definition von Hayman bleibt. Das erlaubt es, die meisten Beweisideen von Hayman verwenden zu können.

Schlussendlich werden die erzielten Ergebnisse zusammengefasst.

Abstract

The subject of this thesis is the multivariate saddle point method, which is one of the most important methods, for obtaining asymptotic information about rapidly growing functions, which are of the shape

$$F(\mathbf{n}) = \int\cdots\int_{\mathbf{P_n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$$

for $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$, where $\mathbf{P_n} \subseteq \mathbb{C}^d$.

After a short introduction, it is demonstrated, how the saddle point method works and which conditions must be fulfilled, so that it can be applied.

After that applications of the saddle point method are shown. It is used, to calculate the probability that d randomly chosen, monic polynomials $p_1, \ldots, p_d$ are coprime respectively pairwise coprime in $\mathbb{F}_q$, and that p_j is m_j-smooth and of degree n_j, for $1 \leq j \leq d$.

In the following part of the thesis the concept of univariate Hayman-admissible functions, which has been introduced by Hayman 1956 in [26], is generalized to the multivariate case. For the univariate case Hayman quoted a base class and proved closure properties, so that it is possible to generate Hayman-admissible function from Hayman-admissible functions via algebraic rules.
The intention is to quote a base class and to transfer as much closure properties as possible to the multivariate case. Great importance is attached to stay as close as possible to Hayman's definition. This allows to use most of the proof ideas from Hayman.

Finally the results are summarized.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Erzeugende Funktionen der Gestalt

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

für die Folge $(y_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}}$ gehören zu den wichtigsten Konstrukten in der Kombinatorik. Viele Abzählprobleme lassen sich damit behandeln. Da es nur selten möglich ist, die Koeffizienten $y_{\mathbf{n}}$ explizit anzugeben, ist es oft nützlich, sich das asymptotische Verhalten für $\mathbf{n} \to \infty$ anzusehen.

Eine sehr wichtige Methode dafür ist die Sattelpunktmethode, die in den Kapiteln 2 und 3 erklärt und anhand von Beispielen im univariaten und multivariaten Fall demonstriert wird. Dabei sieht man, dass es oft sehr mühsam ist, die Sattelpunktmethode Schritt für Schritt für eine gegebene Funktion nachzurechnen. Deshalb ist es nahe liegend, zu versuchen, einige (leichter überprüfbare) Bedingungen anzugeben, die hinreichend für die Anwendbarkeit der Sattelpunktmethode sind.

Hayman führte 1956 in [26] den Begriff der Hayman-admissiblen (H-admissiblen) univariaten Funktionen ein. Er hat einige Bedingungen definiert, mit denen es möglich ist mit Hilfe der Sattelpunktmethode asymptotische Abschätzungen zu erhalten, ohne die Sattelpunktmethode jedes Mal Schritt für Schritt durchführen zu müssen.

Sei $\mathcal{R}$ das Intervall (R_0, R) und $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, für ein fest gewähltes $R_0 > 0$.

Für die univariaten in $\mathcal{C}$ H-admissiblen Funktionen konnte Hayman folgende Abgeschlossenheitsbedingungen zeigen:

- Wenn $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ ist, dann ist es $\mathrm{e}^{y(z)}$ ebenso.
- Sind $y_1(z)$ und $y_2(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$, dann ist es auch das Produkt $y_1(z) \cdot y_2(z)$.

- Ist $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ und ist $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, für das $p(R) > 0$ für $R < \infty$ und für $R = \infty$ gilt, dass dessen Leitkoeffizient positiv ist, dann ist auch $y(z) \cdot p(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$.

- Sei $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ und $f(z)$ eine analytische Funktion in diesem Gebiet. Ist $f(r)$ reell für reelle r und existiert eine Konstante $\delta > 0$, sodass gilt

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \mathcal{O}\left(y(r)^{1-\delta}\right), \text{ für } r \to R,$$

dann ist $y(z) + f(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$.

- Ist $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ und $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann ist $y(z) + p(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$. Hat $p(z)$ einen positiven Leitkoeffizient, dann ist auch $p(y(z))$ H-admissible in $\mathcal{C}$.

Als eine Basisklasse gab er folgendes an:

Sei $P(z) = \sum_{m \in M} b_m z^m$ ein Polynom in z mit reellen Koeffizienten, wobei $b_m \neq 0$, $\forall m \in M$ gelte und

$$y(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \mathrm{e}^{P(z)}$$

sei.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\forall \vartheta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ gilt: $\left|y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right| < y(r)$, für $r \to \infty$.

- $y(z)$ ist H-admissible in $\mathbb{C}$.

Die Abgeschlossenheitsbedingungen sind deswegen so wichtig, weil sie die Möglichkeit bieten, Klassen von H-admissible Funktionen zu konstruieren, indem man Funktionen durch die Anwendung von algebraischen Gesetzen aus Basisklassen bildet, von denen man weiß, dass sie H-admissible sind. Andererseits, ist es möglich, zu versuchen, eine gegebene Funktion in H-admissible „Atome“ zu zerlegen, und diese Zerlegung für einen Admissibilitäts-Test heranzuziehen, der automatisch von einem Computer erledigt werden kann.

Für den univariaten Fall wurde das zum ersten Mal von Salvy in [46] behandelt und in MAPLE implementiert.

Der zweite Versuch in dieser Richtung wurde von Klausner, Drmota und Gittenberger in [16, 28] für bivariate Funktionen realisiert. Bei ihnen sind den Koeffizienten y_{nm} einer erzeugenden Funktion $y(z,u) = \sum_{n,m \geq 0} y_{nm} z^n u^m$ kombinatorische Zufallsvariablen zugeordnet. Sie gaben Bedingungen an, die hinreichend dafür sind, dass diese Zufallsvariablen als Grenzverteilung eine Gaußsche Normalverteilung besitzen. Analog zum univariaten Fall gaben sie eine Reihe von Abgeschlossenheitsbedingungen an und implementierten ihren Ergebnisse in MAPLE.

Das Ziel des vierten Kapitels der Dissertation ist es nun, die Bedingungen der univariaten H-Admissibilität so auf den multivariaten Fall zu verallgemeinern, dass die Abgeschlossenheitsbedingungen des univariaten Falles so weit wie möglich auf der multivariaten Fall übertragen werden können. Dabei wird großer Wert darauf gelegt, dass die Definition so nahe wie möglich an der Definition von Hayman bleibt. Das erlaubt es, die meisten Beweisideen von Hayman verwenden zu können.
Weiters wird angegeben, welche Bedingungen ein Polynom $P(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m} \in M} b_{\mathbf{m}} \mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ erfüllen muss, damit $\mathrm{e}^{P(\mathbf{z})}$ in einem Gebiet H-admissible ist.

Kapitel 2

Die Sattelpunktmethode

2.1 Der univariate Fall

Die Sattelpunktmethode ist eine der wichtigsten Methode um asymptotische Informationen über schnell wachsende Funktionen zu erhalten. Sie ist sehr nützlich, um Approximationen von Integralen der Gestalt

$$F(n) = \int_{P_n} f_n(z)\mathrm{d}z$$

zu gewinnen, wobei P_n ein Integrationsweg in der komplexen Ebene darstellt und $f_n(z)$ in einer Umgebung von P_n analytisch ist. Nimmt man an, dass der Integrationsweg P_n und die Funktion $f_n(z)$ vom Parameter n abhängen, so ist das asymptotische Verhalten von $F(n)$ für $n \to \infty$ interessant. Jede Anwendung der Sattelpunktmethode besteht aus zwei Schritten

1. Finden eines geeigneten Integrationsweges.

2. Approximieren des Integrals.

Die Idee hinter der Sattelpunktmethode kann wie folgt beschrieben werden. Nimmt man an, das man nicht an dem genauen Wert von $F(n)$, sondern nur an einer guten Abschätzung für eine obere Grenze interessiert ist, dann gilt, wenn der Integrationsweg P_n die endliche Länge l_{P_n} hat

$$|F(n)| \leq \int_{P_n} |f_n(z)| \cdot |\mathrm{d}z| \leq l_{P_n} \max_{z \in P_n} |f_n(z)|,$$

wobei $\max_{z \in P_n} |f_n(z)|$ das Maximum von $|f_n(z)|$ entlang von P_n ist. Es ist nun möglich, bessere Abschätzungen zu bekommen, wenn man den Integrationsweg ändert. Laut dem Cauchyschen Integralsatz darf man P_n durch einen anderen Integrationsweg C_n ersetzen, wenn beide zueinander homotop sind. Das Ziel ist nun, einen solchen Integrationsweg C_n so zu bestimmen, dass

$$l_{P_n} \max_{z \in P_n} |f(z)|$$

minimal wird. Sei

$$l_{C_n} |f(\zeta_n)| = \min_{P_n} \left(l_{P_n} \max_{z \in P_n} |f(z)| \right)$$

dann ist C_n der gesuchte Weg und $\zeta_n \in C_n$ ein Sattelpunkt von $f(z)$. Das motiviert dazu, das Verfahren Sattelpunktmethode zu nennen. Im Sattelpunkt ζ_n gilt $f'(\zeta_n) = 0$. Parametrisiert man C_n so, dass $C_n = \{\varphi_n(\vartheta) : \vartheta \in \Omega_n\}$ gilt, wobei Ω_n das Intervall $[-\omega_n, \omega_n]$ bezeichne und der höchste Punkt von C_n bei $\varphi_n(0)$ liege und ein Sattelpunkt von $f(z)$ sei, so folgt

$$\int_{C_n} f_n(z) \mathrm{d}z = \int_{\Omega_n} (f_n \circ \varphi_n)(\vartheta) \varphi_n'(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta.$$

Setzt man $g_n(\vartheta) = (f_n \circ \varphi_n)(\vartheta)\varphi_n'(\vartheta)$, so gilt

$$\int_{C_n} f_n(z) \mathrm{d}z = \int_{\Omega_n} g_n(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta.$$

Betrachtet man nun eine Umgebung des Sattelpunktes, so ist es einfacher, mit dem Logarithmus von $g_n(\vartheta)$ zu arbeiten. Sei dieser gegeben durch $G_n(\vartheta)$, sodass $g_n(\vartheta) = \mathrm{e}^{G_n(\vartheta)}$ gilt. Aus $g_n(0) \neq 0$ folgt, dass die Bedingungen $g_n'(0) = 0$ und $G_n'(0) = 0$ äquivalent sind. Da $G_n(\vartheta)$ analytisch ist, gibt es die Taylorentwicklung

$$G_n(\vartheta) = G_n(0) + G_n''(0) \frac{\vartheta^2}{2} + \varepsilon(\vartheta)$$

wobei $\varepsilon(\vartheta)$ das Restglied sei. Gilt nun $G_n''(0) \neq 0$, so wird $G_n(\vartheta)$ in einer kleinen Umgebung $|\vartheta| < \delta_n$ hauptsächlich durch den Wert von $G_n''(0)$ bestimmt. Kann man δ_n so wählen, dass für $\vartheta \in \Delta_n = [-\delta_n, \delta_n]$ gleichmäßig $\varepsilon(\vartheta) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, so erhält man

$$G_n(\vartheta) \sim G_n(0) + G_n''(0) \frac{\vartheta^2}{2}, \text{ für } n \to \infty.$$

$G_n(\vartheta)$ ist konkav in einer Umgebung von 0, da sie in 0 ein Maximum hat, das heißt es gilt $G_n''(0) < 0$. Dann gilt für $n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
F(n) &= \int_{C_n} f_n(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\Omega_n} g(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_{\Delta_n} \mathrm{e}^{G(\vartheta)}\mathrm{d}\vartheta + \int_{\Omega_n\setminus\Delta_n} g(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&\sim \int_{\Delta_n} \mathrm{e}^{G_n(0)+G_n''(0)\frac{\vartheta^2}{2}}\mathrm{d}\vartheta + \int_{\Omega_n\setminus\Delta_n} g(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{G_n(0)+G_n''(0)\frac{\vartheta^2}{2}}\mathrm{d}\vartheta}_{I_1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_n} \mathrm{e}^{G_n(0)+G_n''(0)\frac{\vartheta^2}{2}}\mathrm{d}\vartheta}_{I_2} + \underbrace{\int_{\Omega_n\setminus\Delta_n} g(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta}_{I_3}.
\end{aligned}
$$

Berechnet man nun I_1, so erhält man

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{e}^{G_n(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{G_n''(0)\frac{\vartheta^2}{2}}\mathrm{d}z \\
&= g_n(0)\sqrt{\frac{-2}{G_n''(0)}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\
&= g_n(0)\sqrt{\frac{2}{|G_n''(0)|}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\
&= g_n(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|G_n''(0)|}}.
\end{aligned}
$$

Kann man jetzt noch zeigen, dass Die Terme I_2 und I_3 gegenüber I_1 vernachlässigbar klein sind, so gilt

$$
F(n) \sim g_n(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|G_n''(0)|}}, \text{ für } n \to \infty.
$$

Beispiel 2.1.1 (*Stirling-Formel*)**.** Die Sattelpunktmethode wird hier verwendet, um eine asymptotische Abschätzung von

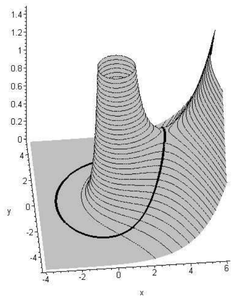
$$
\frac{1}{n!} = [z^n]\mathrm{e}^z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z}{z^{n+1}}\mathrm{d}z
$$

zu finden. Für den Sattelpunkt wählt man r so, dass

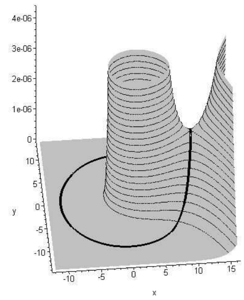
$$
\min_{r\in\mathbb{R}}\max_{|z|=r}\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{e}^z}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\right| = \min_{r\in\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^r}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \min_{r\in\mathbb{R}}\frac{\mathrm{e}^r}{r^n}
$$

erfüllt ist. Dies ist offensichtlich bei $r = n$ der Fall.

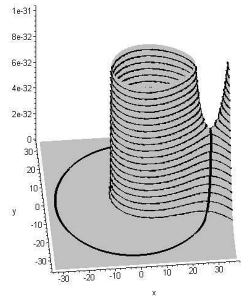
Die folgenden Diagramme zeigen den resultierenden Integrationsweg auf der Funktion $\left|\frac{\mathrm{e}^z}{z^n}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{x+y\mathrm{i}}}{(x+y\mathrm{i})^n}\right|$ für $n = 3,\ 10$ und 30.



$n = 3$



$n = 10$



$n = 30$

Somit erhält man

$$[z^n]\mathrm{e}^z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=n}\frac{\mathrm{e}^z}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} n^{-n}\exp\left(n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - n\mathrm{i}\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta,$$

wobei das Maximum vom Betrag des Integranden bei $\vartheta = 0$ angenommen wird.
Für alle ϑ mit $|\vartheta| \leq \delta$ mit $\delta = n^{-\frac{2}{5}}$ gilt

$$n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} = n\left(1 + \mathrm{i}\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2} + \mathcal{O}\left(\delta^3\right)\right) = n + n\mathrm{i}\vartheta - n\frac{\vartheta^2}{2} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{5}}\right).$$

Eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta} n^{-n}\exp\left(n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - n\mathrm{i}\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta &= \int_{-\delta}^{\delta} n^{-n}\exp\left(n - n\frac{\vartheta^2}{2} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}\left(1 + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right)\int_{-\delta}^{\delta}\exp\left(-n\frac{\vartheta^2}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta.\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta}\exp\left(-n\frac{\vartheta^2}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-n\frac{\vartheta^2}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta - 2\int_{\delta}^{\infty}\exp\left(-n\frac{\vartheta^2}{2}\right)\mathrm{d}\vartheta \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} - \mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{n^{\frac{1}{5}}}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\delta}^{\delta} n^{-n}\exp\left(n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - n\mathrm{i}\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta = \left(1 + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right)\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\cdot\frac{\mathrm{e}^n}{n^n}.$$

Andererseits erhält man für $\delta < |\vartheta| \leq \pi$

$$\cos\vartheta \leq \cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{O}\left(\delta^4\right)$$

und somit

$$n\cos\vartheta \quad \leq \quad n - \frac{n^{\frac{1}{5}}}{2} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{3}{5}}\right).$$

Daher gilt für hinreichend großes n

$$\begin{aligned} \left|\int_{\delta}^{\pi} n^{-n}\exp\left(ne^{\mathrm{i}\vartheta} - n\mathrm{i}\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta\right| \quad &\leq \quad n^{-n}\exp\left(n\cos\delta\right)\cdot\pi \\ &\leq \quad n^{-n}\exp\left(n - \frac{n^{\frac{1}{5}}}{3}\right), \end{aligned}$$

und für das Integral von $-\pi$ bis $-\delta$ erhält man analog die gleiche Abschätzung. Setzt man nun die Ergebnisse zusammen, so erhält man das gewünschte Resultat

$$\frac{1}{n!} = [z^n]\mathrm{e}^z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} n^{-n}\exp\left(n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} - n\mathrm{i}\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta = \left(1 + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right)\frac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}n^n}.$$

2.2 Der multivariate Fall

Wie im univariaten Fall ist die Sattelpunktmethode auch im multivariate Fall eine der wichtigsten Methode um asymptotische Informationen über schnell wachsende Funktionen der Gestalt

$$F(\mathbf{n}) = \int\cdots\int_{\mathbf{P_n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$$

zu gewinnen, wobei $\mathbf{P_n}$ ein Integrationsbereich im komplexen Raum $\mathbb{C}^d$ darstellt und $f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})$ in einer Umgebung von $\mathbf{P_n}$ analytisch ist. Es ist das asymptotische Verhalten von $F(\mathbf{n})$ für $\mathbf{n} \to \infty$ interessant. Jede Anwendung der Sattelpunktmethode besteht auch hier aus zwei Schritten

1. Der erste Schritt besteht darin, einen neuen Integrationsbereich zu finden.

2. In diesem Schritt wird das Integral approximiert.

Analog zum univariaten Fall bildet man nun

$$|F(\mathbf{n})| \leq \int\cdots\int_{\mathbf{P_n}} |f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})|\cdot|\mathrm{d}\mathbf{z}| \leq \mu(\mathbf{P_n})\max_{\mathbf{z}\in\mathbf{P_n}}|f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})|,$$

wobei $\max_{\mathbf{z}\in\mathbf{P_n}} |f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})|$ das Maximum von $|f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})|$ im Bereich $\mathbf{P_n}$ ist und $\mu(\mathbf{P_n})$ das Maß von $\mathbf{P_n}$ bezeichne, und sucht einen Integrationsbereich $\mathbf{C_n}$ der zu $\mathbf{P_n}$ homotop ist, sodass

$$\mu(\mathbf{P_n}) \max_{\mathbf{z}\in\mathbf{P_n}} |f(\mathbf{z})|$$

minimal wird. Wie im univariaten Fall gilt für

$$\mu(\mathbf{C_n})|f(\boldsymbol{\zeta})| = \min_{\mathbf{P_n}} \left(\mu(\mathbf{P_n}) \max_{\mathbf{z}\in\mathbf{P_n}} |f(\mathbf{z})|\right),$$

dass $\mathbf{C_n}$ der gesuchte Bereich und $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{C_n}$ ein Sattelpunkt von $f(\mathbf{z})$ ist, für den $\nabla f(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0}$ gilt, wobei ∇ den Gradienten-Operator bezeichne. Parametrisiert man $\mathbf{C_n}$ so, dass $\mathbf{C_n} = \{\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{\Omega_n}\}$ gilt, wobei $\mathbf{\Omega_n}$ den Quader $\prod_{j=1}^{d}[-\omega_{j,\mathbf{n}}, \omega_{j,\mathbf{n}}]$ bezeichne und der höchste Punkt von $\mathbf{C_n}$ bei $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$ liegt und ein Sattelpunkt von $f(\mathbf{z})$ ist, so folgt

$$\int_{\mathbf{C_n}}\cdots\int f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} = \int_{\mathbf{\Omega_n}}\cdots\int (f_{\mathbf{n}} \circ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}})(\boldsymbol{\vartheta}) \left|\det \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\vartheta})\right| \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}.$$

Sei $g_{\mathbf{n}} = (f_{\mathbf{n}} \circ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}})(\boldsymbol{\vartheta}) \left|\det \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}}(\boldsymbol{\vartheta})\right|$. Wie im univariaten Fall betrachtet man den Logarithmus von $g_{\mathbf{n}}$ in einer Umgebung des Sattelpunktes. Sei dieser gegeben durch $G_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta})$, sodass $g_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathrm{e}^{G_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta})}$ gilt. Aus $g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \neq 0$ folgt, dass die Bedingungen $\nabla g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\nabla G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ äquivalent sind. Sei im weiteren H der Hessematrix-Operator.
Da $g(\mathbf{z})$ analytisch ist, gibt es eine Taylorentwicklung

$$G_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta}) \sim G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\, \mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\vartheta}^t + \varepsilon(\boldsymbol{\vartheta}),$$

wobei $\varepsilon(\boldsymbol{\vartheta})$ das Restglied sei. Ist $\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$ nicht die Nullmatrix, so wird $G_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta})$ in einer kleinen Umgebung $\mathbf{\Delta_n}$ von $\mathbf{0}$ hauptsächlich durch den Wert von $\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$ bestimmt. Kann man $\mathbf{\Delta_n}$ so wählen, dass $\mathbf{0} \in \mathbf{\Delta_n}$ und für $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{\Delta_n}$ gleichmäßig $\varepsilon(\boldsymbol{\vartheta}) \to 0$ für $\mathbf{n} \to \infty$ gilt, so erhält man

$$G_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta}) \sim G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\, \mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})\boldsymbol{\vartheta}^t, \text{ für } \mathbf{n} \to \infty.$$

$G_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\vartheta})$ ist konkav in einer Umgebung von $\mathbf{0}$, da sie in $\mathbf{0}$ ein Maximum hat, das heißt $\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$ ist negativ definit. Dann gilt für $\mathbf{n} \to \infty$

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{n}) &= \int_{\mathbf{C_n}} \cdots \int f_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) \mathrm{d}\mathbf{z} \\
&= \int_{\mathbf{\Omega_n}} \cdots \int g(\boldsymbol{\vartheta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} \\
&= \int_{\mathbf{\Delta_n}} \cdots \int \mathrm{e}^{G(\boldsymbol{\vartheta})} \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} + \int_{\mathbf{\Omega_n} \backslash \mathbf{\Delta_n}} \cdots \int g(\boldsymbol{\vartheta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} \\
&\sim \int_{\mathbf{\Delta_n}} \cdots \int \mathrm{e}^{G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\vartheta\, \mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \vartheta^t} \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} + \int_{\mathbf{\Omega_n} \backslash \mathbf{\Delta_n}} \cdots \int g(\boldsymbol{\vartheta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta} \\
&= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int \mathrm{e}^{G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\vartheta\, \mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \vartheta^t} \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}}_{I_1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \backslash \mathbf{\Delta}_n} \cdots \int \mathrm{e}^{G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\vartheta\, \mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \vartheta^t} \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}}_{I_2} + \underbrace{\int_{\mathbf{\Omega_n} \backslash \mathbf{\Delta_n}} \cdots \int g(\boldsymbol{\vartheta}) \mathrm{d}\boldsymbol{\vartheta}}_{I_3} .
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$ eine negativ definite Matrix ist, existiert eine orthogonale Matrix $A_{\mathbf{n}}$ und eine Diagonalmatrix $D_{\mathbf{n}}$, sodass $\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) = A_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}} A_{\mathbf{n}}^t$ gilt. Seien $\lambda_{j,\mathbf{n}}$ für $1 \leq j \leq d$ die Diagonalelemente der Matrix $D_{\mathbf{n}}$, dann gilt $\lambda_{j,\mathbf{n}} < 0$ für $1 \leq j \leq d$ und $\prod_{j=1}^d \lambda_{j,\mathbf{n}} = \det(D_{\mathbf{n}}) = \det(\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}))$. Substituiert man in I_1 $\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{w} A_{\mathbf{n}}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{e}^{G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathbf{w} D_{\mathbf{n}} \mathbf{w}^t} \mathrm{d}\mathbf{w} \\
&= g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda_{j,\mathbf{n}} w_j^2} \mathrm{d}w_j \\
&= g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{-2\pi}{\lambda_{j,\mathbf{n}}}} \\
&= g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \prod_{j=1}^d \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda_{j,\mathbf{n}}|}} \\
&= g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \sqrt{\frac{(2\pi)^d}{\prod_{j=1}^d |\lambda_{j,\mathbf{n}}|}} \\
&= g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \sqrt{\frac{(2\pi)^d}{|\det(\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}))|}} .
\end{aligned}$$

Kann man jetzt noch zeigen, dass Die Terme I_2 und I_3 gegenüber I_1 vernachlässigbar klein sind, so gilt

$$F(\mathbf{n}) \sim g_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}) \sqrt{\frac{(2\pi)^d}{|\det(\mathrm{H}G_{\mathbf{n}}(\mathbf{0}))|}}, \text{ für } \mathbf{n} \to \infty.$$

Für eine genauere Einführung in das Thema Sattelpunktmethode sei auf [14] von DeBruijn und auf die Arbeiten von Flajolet [19] und Odlyzko [40] verwiesen.

Kapitel 3

Anwendungen der Sattelpunktmethode

Sei bis zum Ende dieses Kapitels q eine fest gewählte Primzahlpotenz, $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen, $\mathbb{F}_q[z]$ die Menge aller Polynome über $\mathbb{F}_q$ und $\mathbb{F}_q[z]_0$ die Menge aller normierten Polynome über $\mathbb{F}_q$.

Sei G eine multiplikative Gruppe und g und y Elemente davon. Dann versteht man unter dem Diskreten Logarithmus Problem für G, die Suche nach dem kleinsten x, sodass $y = g^x$ gilt. Einige öffentliche Kryptosysteme basieren auf der Schwierigkeit, das Diskrete Logarithmus Problem zu lösen, siehe dafür [11, 15, 18]. Der wichtigste Algorithmus zum Lösen ist die Index Calculus Methode, die von Western und Miller in [47] vorgestellt und von Adleman in [1] und Odlyzko in [41] genau analysiert wurde. Eine Variante davon ist der Waterloo Algorithmus der von Blake und anderen in [9, 10] vorgestellt wurde. Diese Variante verbessert die Laufzeit der Index Calculus Methode durch das Einführen eines heuristischen Ansatzes. Drmota lieferte in [17] einen Beweis dafür, dass die heuristische Schranke für die Laufzeit für den Waterloo Algorithmus die kleinstmögliche Schranke ist.

Dafür berechnete er in $\mathbb{F}_q$ für eine fest gewählte Primzahlpotenz, eine asymptotische Abschätzung für die Anzahl zweier, teilerfremder, m-glatter normierter Polynome mit den Graden n_1 und n_2. Daraus kann man sofort die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass 2 beliebig gewählte, normierte Polynome $p_1(z), p_2(z) \in \mathbb{F}_q[z]_0$ m-glatt und teilerfremd sind.

In diesem Kapitel wird diese Aussage für d Polynome verallgemeinert. Gilt $d > 2$, so können d Polynome teilerfremd, paarweise teilerfremd oder nichts von beidem sein. Es wird also die Wahrscheinlichkeit ermittelt, dass für d beliebig gewählte, normierte Polynome $p_1(z), \ldots, p_d(z) \in \mathbb{F}_q[z]_0$ gilt, dass $p_j(z)$ m_j-glatt für $1 \leq j \leq d$ ist und sie teilerfremd beziehungsweise paarweise teilerfremd sind.

3.1 Irreduzible Polynome über $\mathbb{F}_q$

Ein Polynom $p(z) \in \mathbb{F}[z]$ heißt irreduzibel über $\mathbb{F}$, wenn es einen positiven Grad hat und aus $p(z) = b(z)c(z)$ mit $b(z), c(z) \in \mathbb{F}[z]$ folgt, dass entweder $b(z)$ oder $c(z)$ ein konstantes Polynom ist.
Die Anzahl aller normierten Polynome vom Grad n über $\mathbb{F}_q$ ist q^n. Somit ist die erzeugende Funktion gegeben durch

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{f(z)\in\mathbb{F}_q[z]_0} z^{\deg f(z)} \\ &= \sum_{n\geq 0} q^n z^n \\ &= \frac{1}{1-qz}. \end{aligned}$$

Zählt man andererseits für einen fest gewählten, irreduziblen Faktor vom Grad k ab, wie oft dieser auftritt, so erhält man

$$1 + z^k + z^{2k} + \cdots = \frac{1}{1-z^k}.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f(z) \in \mathbb{F}[z]$ ein irreduzibles Polynom über $\mathbb{F}_q$ mit dem Grad m. Dann teilt $f(z)$ das Polynom $z^{q^k} - z$ genau dann, wenn m ein Teiler von k ist. Bildet man das Produkt über alle Polynome über $\mathbb{F}_q$ die einen Grad haben, der n teilt, so ist dieses gleich $z^{q^k} - z$. Sei I_d die Anzahl aller irreduziblen Polynome vom Grad d. Dann gilt

$$q^k = \sum_{d|k} dI_d,$$

wobei $\sum_{d|k}$ die Summation über alle positiven Teiler d von k bezeichne. Definiert man die Möbius-Funktion μ durch

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1 \\ (-1)^l & \text{wenn } k \text{ das Produkt von } l \text{ verschiedenen Primzahlen ist} \\ 0 & \text{wenn } k \text{ durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist,} \end{cases}$$

so ist die Anzahl I_k aller irreduzibler Polynome mit dem Grad k gegeben durch

$$I_k = \frac{1}{k}\sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) q^d = \frac{1}{k}\sum_{d|k} \mu(d) q^{\frac{k}{d}}.$$

Somit gilt für $k \to \infty$

$$I_k = \frac{1}{k}\left(q^k + \mathcal{O}\left(q^{\frac{k}{2}}\right)\right).$$

Bildet man nun das Produkt über alle möglichen irreduziblen Faktoren, so erhält man

$$P(z) = \prod_{k\geq 1} \left(\frac{1}{1-z^k} \right)^{I_k}.$$

Daraus folgt, dass

$$P(z) = \prod_{k\geq 1} \left(\frac{1}{1-z^k} \right)^{I_k} = \frac{1}{1-qz}$$

gilt.

Definition 3.1.1. Ein Polynom $f(z) \in \mathbb{F}[z]$ heißt m-glatt, wenn alle irreduziblen Polynome die $f(z)$ teilen, höchstens den Grad m haben.

Sei $N_q(m;n)$ die Anzahl aller m-glatten normierten Polynome über $\mathbb{F}_q$ vom Grad n und

$$S_m(z) = \sum_{n\geq 0} N_q(m;n) z^n$$

die erzeugende Funktion von $N_q(m;n)$, so erhält man mit dem selben Argument wie vorher, dass gilt

$$S_m(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{1-z^k} \right)^{I_k}.$$

Mit Hilfe der Sattelpunktmethode ist es nun möglich, eine asymptotische Abschätzung für $N_q(m;n)$ anzugeben.

Satz 3.1.2. *Da $S_m(z)$ für $|z| < \frac{1}{q}$ analytisch ist, gilt dort*

$$\log\left(S_m\left(re^{i\vartheta}\right)\right) = \log S(r) + ia(r)\vartheta - \frac{1}{2} b(r)\vartheta^2 + \varepsilon(r,m)$$

mit

$$a(r) = r\frac{S_m'(r)}{S_m(r)}$$

und

$$b(r) = r^2 \frac{S''(r)}{S(r)} - \left(r\frac{S'(r)}{S(r)} \right)^2 + r\frac{S'(r)}{S(r)},$$

wobei $\varepsilon(r,m)$ das Restglied der Taylorreihe darstelle.

Sei $0 < \delta < 1$. *Dann gilt gleichmäßig für* $m, n \to \infty$ *mit* $n^\delta \le m \le n^{1-\delta}$

$$N_q(m;n) \quad \sim \quad \frac{S_m(r_0)}{r_0^n \sqrt{2\pi b(r_0)}},$$

wobei r_0 *die eindeutige, positive Lösung von*

$$a(r) = n$$

ist.

Beweis. Setzt man

$$qr = \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{m}\log n} = n^{\frac{\alpha}{m}},$$

so folgt $1 - \frac{1}{qr} \sim \frac{1}{m}\log n^\alpha$ und damit gilt

$$\begin{aligned}
n &= r\frac{S_m'(r)}{S_m(r)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{I_k k r^k}{1 - r^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{(qr)^k}{1 - r^k} + \mathcal{O}(1) \\
&= \sum_{k=1}^{m} (qr)^k + \mathcal{O}(1) \\
&= qr\frac{(qr)^m - 1}{qr - 1} + \mathcal{O}(1) \\
&= \frac{(qr)^m}{1 - \frac{1}{qr}} \left(1 + \mathcal{O}\left((qr)^{-m} + \frac{1 - \frac{1}{qr}}{(qr)^m}\right)\right) \\
&= \frac{mn^\alpha}{\log(n^\alpha)} \left(1 + \mathcal{O}\left(n^{-\alpha} + \frac{\log(n^\alpha)}{mn^\alpha}\right)\right) \\
&\sim \frac{mn^\alpha}{\log(n^\alpha)}, \text{ für } m, n \to \infty, \text{ mit } n^\delta \le m \le n^{1-\delta}.
\end{aligned}$$

Löst man $n \sim \frac{mn^\alpha}{\log(n^\alpha)}$ nach α auf, so erhält man als Lösung

$$\alpha_0 \sim \frac{log\frac{n}{m}}{\log n}, \text{ für } m, n \to \infty, \text{ mit } n^\delta \le m \le n^{1-\delta}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
r_0 &= \frac{1}{q}\mathrm{e}^{\frac{\alpha_0}{m}\log n} \\
&= \frac{1}{q}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_0}{m}\log n\right)\right) \\
&= \frac{1}{q}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\log\frac{n}{m}}{m}\right)\right) \\
&\sim \frac{1}{q}, \text{ für } m, n \to \infty, \text{ mit } n^\delta \le m \le n^{1-\delta}.
\end{aligned}$$

Wählt man nun als Integrationsweg $|z| = r_0$ und $\delta_0 = m^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$, so erhält man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
N_q(m;n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_0} S_m(z)z^{-n-1}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_m\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right) r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\delta_0}^{\delta_0} S_m\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right) r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta}\mathrm{d}\vartheta}_{I_1} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{\delta_0}^{2\pi-\delta_0} S_m\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right) r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\vartheta}\mathrm{d}\vartheta}_{I_2},
\end{aligned}$$

Odlyzko zeigte in [41, Appendix A], dass gleichmäßig für $m,n\to\infty$ mit $n^{\frac{1}{100}} \le m \le n^{\frac{99}{100}}$

$$b(r_0) \sim mn$$

und

$$\varepsilon(r,m) = \mathcal{O}\left(m^2 n\cdot\delta_0^3\right).$$

gilt. Diese Ergebnisse sind aber auch gleichmäßig für $m,n\to\infty$ mit $n^{\delta} \le m \le n^{1-\delta}$ für ein beliebiges δ mit $0<\delta<1$ gültig.
Somit hat man

$$\varepsilon(r,m) = \mathcal{O}\left(m^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}+3\epsilon}\right)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{S_m(r_0)}{r_0}\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\exp\left(i\underbrace{(a(r_0)-n)}_{=0}\vartheta - \frac{1}{2}b(r_0)\vartheta^2 + \varepsilon(r,m)\right)\mathrm{d}\vartheta \\
&\sim \frac{S_m(r_0)}{r_0}\int_{-\delta_0}^{\delta_0}\exp\left(-\frac{1}{2}b(r_0)\vartheta^2\right)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{S_m(r_0)}{r_0}\left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2}b(r_0)\vartheta^2\right)\mathrm{d}\vartheta}_{I_3} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta_0,\delta_0]}\exp\left(-\frac{1}{2}b(r_0)\vartheta^2\right)\mathrm{d}\vartheta}_{I_4}\right),
\end{aligned}$$

für $m,n\to\infty,$ mit $n^{\delta}\le m\le n^{1-\delta}$. Somit kann man sofort berechnen

$$I_3 = \sqrt{\frac{2\pi}{b(r_0)}}.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} I_4 &= 2\int_{\delta_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-b(r_0)\frac{\vartheta^2}{2}} \mathrm{d}\vartheta \\ &\leq 2\int_{\delta_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\delta_0 b(r_0)}{2}\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{4}{\delta_0 b(r_0)} \mathrm{e}^{-b(r_0)\frac{\delta_0^2}{2}} \\ &\sim \frac{4}{m^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}} \mathrm{e}^{-n^{2\epsilon}} \to 0, \text{ für } m, n \to \infty, \text{ mit } n^{\delta} \leq m \leq n^{1-\delta}, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass I_4 vernachlässigbar klein ist.

Es ist nun nur noch zu zeigen, dass das Integral über $\delta_0 < |\vartheta| \leq \pi$ vernachlässigbar ist. Wie Odlyzko in [41] zeigte, gilt für $\delta_0 < |\vartheta| \leq \pi$,

$$\log S_m(r_0) - \log |S_m(z)| \geq \alpha n^{\beta}$$

für geeignete $\alpha, \beta > 0$. Daraus folgt

$$|S_m(z)| \leq \frac{S_m(r_0)}{\mathrm{e}^{\alpha n^{\beta}}}.$$

Somit erhält man

$$|I_2| \leq (2\pi - 2\delta_0) \frac{S_m(r_0) r_0^{-n}}{\mathrm{e}^{\alpha n^{\beta}}}$$

und sieht sofort, dass auch I_2 vernachlässigbar ist. Somit ergibt sich die Behauptung. □

Definition 3.1.3. Die Menge

$$\mathrm{PZ}_{r,d}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| < r,\ 1 \leq j \leq d\}$$

heiße offener Polyzylinder vom Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und vom Polyradius $(r, \ldots, r)$
und die Menge

$$\overline{\mathrm{PZ}}_{r,d}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| \leq r,\ 1 \leq j \leq d\}$$

heiße abgeschlossener Polyzylinder vom Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und vom Polyradius $(r, \ldots, r)$.

Satz 3.1.4. *Sei $f(\mathbf{z})$ eine in $\mathrm{PZ}_{\frac{1}{q}+\eta,d}(\mathbf{0})$ analytische Funktion, für ein hinreichend kleines η. Dann gilt für $\mathbf{n} \to \infty$*

$$[\mathbf{z}^{\mathbf{n}}] \frac{f(\mathbf{z})}{(1-qz_1)\cdots(1-qz_d)} \sim q^{n_1+\cdots+n_d} f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right)$$

Beweis. Da die Funktion $f(\mathbf{z})$ analytisch ist, besitzt sie eine Darstellung als Potenzreihe. Sei diese gegeben durch $f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j}\geq\mathbf{0}} a_{\mathbf{j}}\mathbf{z}^{\mathbf{j}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{z}^{\mathbf{n}}]\frac{f(\mathbf{z})}{(1-qz_1)\cdots(1-qz_d)} \\
&= [\mathbf{z}^{\mathbf{n}}]\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{j}}\mathbf{z}^{\mathbf{j}} \sum_{k_1\geq 0}(qz_1)^{k_1}\cdots\sum_{k_d\geq 0}(qz_d)^{k_d} \\
&= \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{j}} q^{n_1-j_1}\cdots q^{n_d-j_d} \\
&= q^{n_1+\cdots+n_d}\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{q}\right)^{j_1+\cdots+j_d}.
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{n}\to\infty$ strebt der Ausdruck

$$q^{n_1+\cdots+n_d}\left|\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{q}\right)^{j_1+\cdots+j_d} - f\left(\frac{1}{q},\ldots,\frac{1}{q}\right)\right|$$

gegen 0, da die Reihe konvergent ist. Somit ist der Satz bewiesen. □

Lemma 3.1.5. *Sei $P(y_1,\ldots,y_j)$ ein Polynom mit $P(0,\ldots,0)=1$, das keine linearen Terme besitzt. Dann ist die Funktion $f(z_1,\ldots,z_j)=\prod_{k\geq 1}P(z_1^k,\ldots,z_j^k)^{I_k}$ in $\mathrm{PZ}_{\frac{1}{q}+\eta,j}(\mathbf{0})$ für ein hinreichend kleines $\eta>0$ analytisch.*

Beweis. Es gilt gleichmäßig für $z_1,\ldots,z_j$ in $\overline{\mathrm{PZ}}_{r-\tilde{\eta},j}(\mathbf{0})$, für ein beliebiges, fest gewähltes, positives $\tilde{\eta}<r$

$$P(z_1^k,\ldots,z_j^k)-1=\mathcal{O}\left(r^{2k}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\log\left(\prod_{k\geq 1}P\left(z_1^k,\ldots,z_j^k\right)^{I_k}\right)\right| \\
&= \sum_{k\geq 1} I_k\left|\log\left(1+\left(P\left(z_1^k,\ldots,z_j^k\right)-1\right)\right)\right| \\
&= \mathcal{O}\left(\sum_{k\geq 1} I_k\left|P\left(z_1^k,\ldots,z_j^k\right)-1\right|\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{q^k}{k}r^{2k}\right).
\end{aligned}$$

Für $r<\sqrt{\frac{1}{q}}$ konvergiert diese Reihe, und damit ist $f(z_1,\ldots,z_j)$ speziell in $\mathrm{PZ}_{\frac{1}{q}+\eta,j}(\mathbf{0})\subset \mathrm{PZ}_{\sqrt{\frac{1}{q}},j}(\mathbf{0})$ analytisch für ein hinreichend kleines $\eta>0$. □

Satz 3.1.6. *Seien $f(z_1,\ldots,z_j)$ und $P(z_1^k,\ldots,z_j^k)$ für $1\le j\le d$ wie im vorigen Lemma definiert. Sei o.B.d.A. $m=m_d\le m_{d-1}\le\cdots\le m_1$ und $F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)$ folgendermaßen definiert*

$$F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)=\prod_{k\le m_d}P(z_1^k,\ldots,z_d^k)^{I_k}\prod_{m_d<k\le m_{d-1}}P(z_1^k,\ldots,z_{d-1}^k)^{I_k}\cdots\prod_{m_2<k\le m_1}P(z_1^k)^{I_k}.$$

Sei $\delta,\epsilon>0$ gegeben. Dann gilt gleichmäßig für $m_j,n_j,n\to\infty$ mit $n_j^\delta\le m_j\le n_j^{1-\delta}$ und $n^\epsilon\le n_j\le n^{\frac{1}{\epsilon}}$ für $1\le j\le d$.

$$\begin{aligned}&[z_1^{n_1}\cdots z_d^{n_d}]F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)S_{m_1}(z_1)\cdots S_{m_d}(z_d)\\ \sim\ & f\left(\frac{1}{q},\ldots,\frac{1}{q}\right)\prod_{j=1}^{d}\frac{S_{m_j}(r_j)r_j^{-n_j}}{\sqrt{2\pi m_j n_j}}\\ \sim\ & f\left(\frac{1}{q},\ldots,\frac{1}{q}\right)N_q(m_1;n_1)\cdots N_q(m_d;n_d),\end{aligned}$$

wobei $f(z_1,\ldots,z_d)=\lim_{m_1,\ldots,m_d\to\infty}F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)$ ist.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit Hilfe von 3 Lemmata. Für diese Lemmata gelten sämtliche asymptotischen Relationen $(o,\mathcal{O},\sim)$ gleichmäßig für $m_j,n_j,n\to\infty$ mit $n_j^\delta\le m_j\le n_j^{1-\delta}$ und $n^\epsilon\le n_j\le n^{\frac{1}{\epsilon}}$ für $1\le j\le d$.

Lemma 3.1.7. *Mit den Bezeichnungen des Satzes 3.1.6 gilt gleichmäßig für $z_1,\ldots,z_d$ in $\mathrm{PZ}_{\frac{1}{q}-\eta,d}(\mathbf{0})$ für ein beliebiges, fest gewähltes, positives $\tilde\eta<\frac{1}{q}$*

$$|f(z_1,\ldots,z_d)-F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{mq^m}\right).$$

Beweis. Laut dem Lemma 3.1.5 sind die Produkte

$$\prod_{k\ge1}P(z_1^k,\ldots,z_j^k)^{I_k}$$

konvergent und somit gilt

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k\ge m}P(z_1^k,\ldots,z_j^k)^{I_k}=1$$

für $1\le j\le d$. Da o.B.d.A. $m=m_d=\min\{m_1,\ldots,m_d\}$ ist, gilt $f(z_1,\ldots,z_j)=\lim_{m_1,\ldots,m_d\to\infty}F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)=\lim_{m\to\infty}\prod_{k\le m}P_d(z_1^k,\ldots,z_d^k)^{I_k}$.
Für $z_1,\ldots,z_d$ gilt gleichmäßig in $\overline{\mathrm{PZ}}_{\frac{1}{q}-\tilde\eta,j}(\mathbf{0})$ für $1\le j\le d$

$$P_j(z_1^k,\ldots,z_j^k)-1=\mathcal{O}\left(\frac{1}{q^{2k}}\right).$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
&|\log\left(f(z_1,\dots,z_d)\right) - \log\left(F_{m_1,\dots,m_d}(z_1,\dots,z_d)\right)| \\
&= \left| \sum_{k>m_d} I_k \log(P_d(z_1^k,\dots,z_d^k)) - \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=m_{j+1}+1}^{m_j} I_k \log(P_j(z_1^k,\dots,z_j^k)) \right| \\
&= \mathcal{O}\left(\sum_{k>m_d} I_k \left| P_d(z_1^k,\dots,z_d^k) - 1 \right| + \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=m_{j+1}+1}^{m_j} I_k \left| P_j(z_1^k,\dots,z_j^k) - 1 \right| \right) \\
&= \mathcal{O}\left(\sum_{k>m_d} \frac{q^k}{k} \cdot \frac{1}{q^{2k}} + \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=m_{j+1}+1}^{m_j} \frac{q^k}{k} \cdot \frac{1}{q^{2k}} \right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{q^{m_d}}{m_d} \cdot \frac{1}{q^{2m_d}} \right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_d q^{m_d}} \right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{mq^m} \right).
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.1.8. *Mit den Bezeichnungen des Satzes 3.1.6 gilt*

$$
\begin{aligned}
&[z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] \left(f(z_1,\dots,z_d) - F_{m_1,\dots,m_d}(z_1,\dots,z_d)\right) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&\quad = o\left(N_q(m_1;n_1) \cdots N_q(m_d;n_d)\right).
\end{aligned}
$$

Beweis. Mit Hilfe des vorhergehenden Lemmas folgt

$$
\begin{aligned}
&\left| [z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] \left(f(z_1 \cdots z_d) - F_{m_1,\dots,m_d}(z_1,\dots,z_d)\right) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \right| \\
&= \left| \frac{1}{(2\pi i)^d} \int_{|z_1|=r_1} \cdots \int_{|z_d|=r_d} \left(f(z_1 \cdots z_d) - F_{m_1,\dots,m_d}(z_1,\dots,z_d)\right) \frac{S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d)}{z_1^{n_1+1} \cdots z_d^{n_d+1}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_d \right| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{mq^m} S_{m_1}(r_1) \cdots S_{m_d}(r_d) r_1^{-n_1} \cdots r_d^{-n_d} \right).
\end{aligned}
$$

Wählt man für die Radien die Sattelpunkte $r_j = r_0(m_j;n_j) \sim \frac{1}{q}$, verwendet die asymptotischen Beziehungen $b(r_j) \sim m_j n_j$ und betrachtet den folgenden Ausdruck, so erhält man

$$
\frac{\frac{1}{mq^m} S_{m_1}(r_1) \cdots S_{m_d}(r_d) r_1^{-n_1} \cdots r_d^{-n_d}}{\frac{S_{m_1}(r_1) r_1^{-n_1}}{\sqrt{2\pi b(r_1)}} \cdots \frac{S_{m_d}(r_d) r_d^{-n_d}}{\sqrt{2\pi b(r_d)}}} \quad \sim \quad \frac{1}{mq^m} \sqrt{2\pi 4 m_1 n_1} \cdots \sqrt{2\pi 4 m_d n_d}) = o\left(1\right),
$$

womit die Aussage des Lemmas folgt. □

Lemma 3.1.9. *Mit den Bezeichnungen des Satzes 3.1.6 gilt*

$$
\begin{aligned}
&[z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] f(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&\sim \quad f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) N_q(m_1; n_1) \cdots N_q(m_d; n_d).
\end{aligned}
$$

Beweis. Sei $\mathbf{M}_1 := \{(r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_1}, \ldots, r_d \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_d}) \in \mathbb{C}^d : |\vartheta_j| \leq \delta_j\}$ und $\mathbf{M}_2 := \{(r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_1}, \ldots, r_d \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_d}) \in \mathbb{C}^d : |\vartheta_j| \leq \pi\} \setminus \mathbf{M}_1$ mit $\delta_j := m_j^{-\frac{1}{2}} n_j^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ mit $\epsilon > 0$ und

$$
\begin{aligned}
&[z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] f(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi i)^d} \underbrace{\int \cdots \int_{\mathbf{M}_1} \frac{f(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d)}{z_1^{n_1+1} \cdots z_d^{n_d+1}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_d}_{I_1} \\
&+ \quad \frac{1}{(2\pi i)^d} \underbrace{\int \cdots \int_{\mathbf{M}_2} \frac{f(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d)}{z_1^{n_1+1} \cdots z_d^{n_d+1}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_d}_{I_2}.
\end{aligned}
$$

Da $f(z_1, \ldots, z_d)$ in $\mathbf{M}_1$ analytisch ist, gilt

$$
f(z_1, \ldots, z_d) \sim f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right).
$$

und man erhält damit

$$
\begin{aligned}
I_1 \quad &\sim \quad f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) \int \cdots \int_{\mathbf{M}_1} \frac{S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d)}{z_1^{n_1+1} \cdots z_d^{n_d+1}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_d \\
&\sim \quad f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) \prod_{j=1}^{d} \frac{S_{m_j}(r_j) r_j^{-n_j}}{\sqrt{2\pi m_j n_j}}.
\end{aligned}
$$

Da $f(z_1, \ldots, z_d)$ in einer Umgebung von $\mathbf{M}_2$ analytisch ist, ist die Funktion dort beschränkt. Somit gilt

$$
|I_2| \quad \leq \quad \max_{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbf{M}_2} |f(z_1, \ldots, z_d)| \left| \frac{1}{(2\pi i)^d} \int \cdots \int_{\mathbf{M}_2} \frac{S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d)}{z_1^{n_1+1} \cdots z_d^{n_d+1}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_d \right|.
$$

Da in $\mathbf{M}_2$ $\delta_j < |\vartheta_j| \leq \pi$ für mindestens ein j mit $1 \leq j \leq d$ gilt, folgt wie im univariaten Fall, dass das Integral über $\mathbf{M}_2$ vernachlässigbar klein ist. □

Setzt man die Ergebnisse der 3 Lemmata zusammen erhält man

$$
\begin{aligned}
&[z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] F_{m_1, \ldots, m_d}(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&= \quad [z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] f(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&+ \quad [z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] \left(F_{m_1, \ldots, m_d}(z_1, \ldots, z_d) - f(z_1, \ldots, z_d)\right) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&= \quad f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) N_q(m_1; n_1) \cdots N_q(m_d; n_d) \\
&+ \quad o\left(N_q(m_1; n_1) \cdots N_q(m_d; n_d)\right) \\
&\sim \quad f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) N_q(m_1; n_1) \cdots N_q(m_d; n_d)
\end{aligned}
$$

und somit die Behauptung des Satzes. □

3.2 Teilerfremde Polynome über $\mathbb{F}_q$

Satz 3.2.1. *Seien $p_1, \ldots, p_d$ d beliebige normierte Polynome über $\mathbb{F}_q$ mit den positiven Graden $n_1, \ldots, n_d$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass* $\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_d) \neq 1$ *gilt, gleich* $1 - \frac{1}{q^{d-1}}$.

Beweis. Zählt man das Auftreten eines fest gewählten, irreduziblen Faktor vom Grad k ab, so darf dieser nicht in allen Polynomen auftreten. Somit erhält man

$$\frac{1}{\left(1-z_1^k\right)} \cdots \frac{1}{\left(1-z_d^k\right)} - \frac{z_1^k}{\left(1-z_1^k\right)} \cdots \frac{z_d^k}{\left(1-z_d^k\right)} = \frac{1-(z_1 \cdots z_d)^k}{\left(1-z_1^k\right) \cdots \left(1-z_d^k\right)}.$$

Bildet man nun das Produkt über alle möglichen irreduziblen Faktoren, so erhält man

$$\begin{aligned} &\prod_{k \geq 1} \left(\frac{1-(z_1 \cdots z_d)^k}{\left(1-z_1^k\right) \cdots \left(1-z_d^k\right)} \right)^{I_k} \\ &= \frac{\prod_{k\geq 1} \left(1-(z_1 \cdots z_d)^k\right)^{I_k}}{(1-qz_1) \cdots (1-qz_d)}. \end{aligned}$$

Mit $P(y_1, \ldots, y_d) = 1 - y_1 \cdots y_d$ folgt mit Hilfe das Lemmas 3.1.5, dass $f(z_1, \ldots, z_d) = \prod_{k\geq 1} \left(1-(z_1 \cdots z_d)^k\right)^{I_k}$ in $\mathrm{PZ}_{\frac{1}{q}+\eta,d}(\mathbf{0})$ für ein hinreichend kleines $\eta > 0$ analytisch ist. Laut dem Satz 3.1.4 ist die Anzahl aller teilerfremden Polynome asymptotisch gegeben durch

$$\begin{aligned} [z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] \frac{\prod_{k\geq 1} \left(1-(z_1 \cdots z_d)^k\right)^{I_k}}{(1-qz_1) \cdots (1-qz_d)} &\sim q^{n_1+\cdots+n_d} f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) \\ &= q^{n_1+\cdots+n_d} \prod_{k\geq 1} \left(1 - \left(\frac{1}{q^d}\right)^k\right)^{I_k} \\ &= q^{n_1+\cdots+n_d} \left(1 - q\frac{1}{q^d}\right) \\ &= q^{n_1+\cdots+n_d} \left(1 - \frac{1}{q^{d-1}}\right), \text{ für } \mathbf{n} \to \infty. \end{aligned}$$

Die Anzahl aller teilerfremden Polynome $p_1, \ldots, p_d$ über $\mathbb{F}_q$ mit den positiven Graden $n_1, \ldots, n_d$ ist $q^{n_1+\cdots+n_d}$. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass d Polynome mit den positiven Graden $n_1, \ldots, n_d$ teilerfremd sind, ist gegeben durch

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{q^{d-1}}\right) q^{n_1} \cdots q^{n_d}}{q^{n_1} \cdots q^{n_d}} = 1 - \frac{1}{q^{d-1}}.$$

$\square$

Satz 3.2.2. *Seien $\delta, \epsilon > 0$ gegeben und seien $p_1, \ldots, p_d$ d beliebige normierte Polynome über $\mathbb{F}_q$ mit den positiven Graden $n_1, \ldots, n_d$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die p_j m_j-glatt für $1 \leq j \leq d$ sind und $\mathrm{ggT}(p_1, \ldots, p_d) \neq 1$ gilt, gleichmäßig für $m_j, n_j, n \to \infty$ mit $n_j^\delta \leq m_j \leq n_j^{1-\delta}$ und $n^\epsilon \leq n_j \leq n^{\frac{1}{\epsilon}}$ für $1 \leq j \leq d$ gegeben durch*

$$\left(1 - \frac{1}{q^{d-1}}\right) \frac{N_q(m_1; n_1)}{q^{n_1}} \cdots \frac{N_q(m_d; n_d)}{q^{n_d}}.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $m_d \leq \cdots \leq m_1$.
Sei $F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1, \ldots, z_d)$ die Anzahl aller teilerfremden, normierten Polyome p_j mit den positiven Graden n_j über $\mathbb{F}_q$, wobei jeweils das j-te Polynom m_j-glatt ist für $1 \leq j \leq d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1, \ldots, z_d) \\
&= \prod_{k=1}^{m_d} \left(\frac{1 - (z_1 \cdots z_d)^k}{\left(1 - z_1^k\right) \cdots \left(1 - z_d^k\right)} \right)^{I_k} \prod_{k=m_d+1}^{m_{d-1}} \left(\frac{1 - (z_1 \cdots z_{d-1})^k}{\left(1 - z_1^k\right) \cdots \left(1 - z_{d-1}^k\right)} \right)^{I_k} \cdots \prod_{k=m_2+1}^{m_1} \left(\frac{1 - z_1^k}{1 - z_1^k} \right)^{I_k} \\
&= \prod_{k=1}^{m_d} \left(1 - (z_1 \cdots z_d)^k\right)^{I_k} \prod_{k=m_d+1}^{m_{d-1}} \left(1 - (z_1 \cdots z_{d-1})^k\right)^{I_k} \cdots \prod_{k=m_2+1}^{m_1} \left(1 - z_1^k\right)^{I_k} S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d).
\end{aligned}$$

Somit sind die Bedingungen für den Satz 3.1.6 gegeben und die Anzahl der teilerfremden Polynome p_j die m_j-glatt sind, ist asymptotisch gegeben durch

$$\begin{aligned}
&[z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}] F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1, \ldots, z_d) S_{m_1}(z_1) \cdots S_{m_d}(z_d) \\
&\sim\ f\left(\frac{1}{q}, \ldots, \frac{1}{q}\right) N_q(m_1; n_1) \cdots N_q(m_d; n_d) \\
&=\ \left(1 - \frac{1}{q^{d-1}}\right) N_q(m_1; n_1) \cdots N_q(m_d; n_d),
\end{aligned}$$

für $m_j, n_j, n \to \infty$ mit $n_j^\delta \leq m_j \leq n_j^{1-\delta}$ und $n^\epsilon \leq n_j \leq n^{\frac{1}{\epsilon}}$ für $1 \leq j \leq d$. Dividiert man diese Anzahl durch die Anzahl aller normierten Polynome f_j mit den Graden n_j für $1 \leq j \leq d$, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. □

3.3 Paarweise teilerfremde Polynome über $\mathbb{F}_q$

Satz 3.3.1. *Seien $p_1, \ldots, p_d$ beliebige normierte Polynome über $\mathbb{F}_q$ mit den positiven Graden $n_1, \ldots, n_d$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass $p_1, \ldots, p_d$ paarweise teilerfremd sind, gleich*

$$\prod_{k \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{q^k}\right)^{d-1} \left(1 + \frac{d-1}{q^k}\right) \right)^{I_k}.$$

Beweis. Zählt man das Auftreten eines fest gewählten, irreduziblen Faktor vom Grad k ab, so darf dieser in höchstens einem Polynom vorkommen

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{z_j^k}{1-z_j^k} + 1 \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{d} z_i^k \prod_{\substack{1\le j\le d\\ i\neq j}}(1-z_j^k) + \prod_{j=1}^{d}(1-z_j^k)}{(1-z_1^k)\cdots(1-z_d^k)}.$$

Bildet man nun das Produkt über alle möglichen irreduziblen Faktoren, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\prod_{k\geq 1}\left(\frac{z_j^k}{1-z_j^k}+1\right)^{I_k} \\
= &\prod_{k\geq 1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{d} z_i^k \prod_{\substack{1\le j\le d\\ i\neq j}}(1-z_j^k) + \prod_{j=1}^{d}(1-z_j^k)}{(1-z_1^k)\cdots(1-z_d^k)}\right)^{I_k} \\
= &\frac{\prod_{k\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{d} z_i^k \prod_{\substack{1\le j\le d\\ i\neq j}}(1-z_j^k) + \prod_{j=1}^{d}(1-z_j^k)\right)^{I_k}}{(1-qz_1)\cdots(1-qz_d)}.
\end{aligned}$$

Definiert man $P(y_1,\ldots,y_d) = \sum_{i=1}^{d} y_i \prod_{\substack{1\le j\le d\\ i\neq j}}(1-y_j) + \prod_{j=1}^{d}(1-y_j)$ so folgt aus dem Lemma 3.1.5, dass $f(z_1,\ldots,z_d) = \prod_{k\geq 1}\left(P(z_1^k,\ldots,z_d^k)\right)^{I_k}$ in $\mathrm{PZ}_{\frac{1}{q}+\eta,d}(\mathbf{0})$ für ein hinreichend kleines $\eta > 0$ analytisch ist.
Laut dem Satz 3.1.4 ist die Anzahl aller paarweise teilerfremden Polynome gegeben durch

$$\begin{aligned}
&[z_1^{n_1}\cdots z_d^{n_d}]\frac{f(z_1,\ldots,z_d)}{(1-qz_1)\cdots(1-qz_d)} \\
\sim\ & q^{n_1+\cdots+n_d} f\left(\frac{1}{q},\ldots,\frac{1}{q}\right) \\
=\ & q^{n_1+\cdots+n_d}\prod_{k\geq 1}\left(\frac{d}{q^k}\left(1-\frac{1}{q^k}\right)^{d-1} + \left(1-\frac{1}{q^k}\right)^{d}\right)^{I_k} \\
=\ & q^{n_1+\cdots+n_d}\prod_{k\geq 1}\left(\left(1-\frac{1}{q^k}\right)^{d-1}\left(1+\frac{d-1}{q^k}\right)\right)^{I_k}, \text{ für } \mathbf{n}\to\infty.
\end{aligned}$$

Dividiert man diese Anzahl durch die Gesamtanzahl aller Polynome mit den Graden $n_1,\ldots,n_d$, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. □

Satz 3.3.2. *Seien $\delta,\epsilon > 0$ gegeben und seien $p_1,\ldots,p_d$ d beliebige normierte Polynome über $\mathbb{F}_q$ mit den positiven Graden $n_1,\ldots,n_d$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die f_j m_j-glatt für $1\leq j\leq d$ und paarweise teilerfremd sind, gleichmäßig für $m_j,n_j,n\to\infty$ mit $n_j^\delta \leq m_j \leq n^{1-\delta}$ und $n^\epsilon \leq n_j \leq n^{\frac{1}{\epsilon}}$ für $1\leq j\leq d$ gegeben durch*

$$\prod_{k\geq 1}\left(\left(1-\frac{1}{q^k}\right)^{d-1}\left(1+\frac{d-1}{q^k}\right)\right)^{I_k}\frac{N_q(m_1,n_1)}{q^{n_1}}\cdots\frac{N_q(m_d,n_d)}{q^{n_d}}.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $m_d \leq \cdots \leq m_1$.
Sei $F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)$ die erzeugende Funktion für die Anzahl aller paarweise teilerfremden normierten Polynome p_j mit den Graden n_j über $\mathbb{F}_q$, wobei jeweils das j-te Polynom m_j-glatt ist für $(1 \leq j \leq d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d) \\
&= \prod_{k=1}^{m_d}\left(\frac{P(z_1^k,\ldots,z_d^k)}{(1-z_1^k)\cdots(1-z_d^k)}\right)^{I_k}\prod_{k=m_d+1}^{m_{d-1}}\left(\frac{P(z_1^k,\ldots,z_{d-1}^k)}{(1-z_1^k)\cdots(1-z_{d-1}^k)}\right)^{I_k}\cdots\prod_{k=m_2+1}^{m_1}\left(\frac{P(z_1^k)}{1-z_1^k}\right)^{I_k} \\
&= \prod_{k=1}^{m_d}\left(P(z_1^k,\ldots,z_d^k)\right)^{I_k}\prod_{k=m_d+1}^{m_{d-1}}\left(P(z_1^k,\ldots,z_{d-1}^k)\right)^{I_k}\cdots\prod_{k=m_2+1}^{m_1}\left(P(z_1^k)\right)^{I_k}S_{m_1}(z_1)\cdots S_{m_d}(z_d),
\end{aligned}$$

wobei $P(y_1,\ldots,y_l) = \sum_{i=1}^{l} y_i \prod_{\substack{1\leq j\leq l \\ i\neq j}}(1-y_j)+\prod_{j=1}^{l}(1-y_j)$ sei. Somit sind die Bedingungen für den Satz 3.1.6 gegeben und die Anzahl der paarweise teilerfremden Polynome p_j die m_j-glatt sind, ist asymptotisch gegeben durch

$$\begin{aligned}
&[z_1^{n_1}\cdots z_d^{n_d}]F_{m_1,\ldots,m_d}(z_1,\ldots,z_d)S_{m_1}(z_1)\cdots S_{m_d}(z_d) \\
&\sim\ f\left(\frac{1}{q},\ldots,\frac{1}{q}\right)N_q(m_1;n_1)\cdots N_q(m_d;n_d) \\
&=\ \prod_{k\geq 1}\left(\left(1-\frac{1}{q^k}\right)^{d-1}\left(1+\frac{d-1}{q^k}\right)\right)^{I_k}N_q(m_1;n_1)\cdots N_q(m_d;n_d),
\end{aligned}$$

für $m_j, n_j, n \to \infty$ mit $n_j^{\delta} \leq m_j \leq n_j^{1-\delta}$ und $n^{\epsilon} \leq n_j \leq n^{\frac{1}{\epsilon}}$ für $1 \leq j \leq d$. Dividiert man diese Anzahl durch die Anzahl aller normierten Polynome p_j mit den Graden n_j $(1 \leq j \leq d)$ so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. $\square$

Kapitel 4

H-admissible Funktionen

4.1 Der univariate Fall

Die Sattelpunktmethode ist zwar ein mächtiges und flexibles Werkzeug, hat aber den großen Nachteil, dass sie oft sehr mühsam anzuwenden ist. In vielen Situationen ist es möglich allgemeine Sätze anzuwenden, die auf der Methode aufgebaut sind und asymptotische Abschätzungen liefern, die zwar nicht die schärfst möglichen sind, die aber den großen Vorteil haben, dass man die Sattelpunktmethode nicht Schritt für Schritt durchführen muss. Es ist nicht immer leicht diese Definitionen zu überprüfen, aber es ist fast immer leichter das zu machen, als die Sattelpunktmethode komplett durchzurechnen.

Sei $\mathcal{R}$ das Intervall (R_0, R) und $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, für ein fest gewähltes $R_0 > 0$. Weiters seien

$$a(r) = r\frac{y'(r)}{y(r)}$$

und

$$b(r) = ra'(r) = r\frac{y'(r)}{y(r)} + r^2\frac{y''(r)}{y(r)} - r^2\left(\frac{y'(r)}{y(r)}\right)^2,$$

die erste und zweite logarithmische Ableitung von $y(z)$.

Hayman definierte in [26]:

Definition 4.1.1. Eine Funktion

$$y(z) = \sum_{n\geq 0} y_n z^n$$

mit reellen Koeffizienten y_n heißt admissible im Sinne von Hayman (oder H-admissible) in $\mathcal{C}$, wenn sie analytisch in $\mathcal{C}$ und positiv in $\mathcal{R}$ (für ein fest gewähltes $R_0 > 0$) ist und folgende Eigenschaften hat

(1) $b(r) \to \infty$, für $r \to R$.

(2) Es existiert eine Funktion $\delta : r \mapsto \delta(r), \mathcal{R} \to (0, \pi)$, sodass gilt:

$$y(re^{i\vartheta}) \sim y(r)e^{i\vartheta a(r) - \frac{\vartheta^2}{2} b(r)}, \text{ für } r \to R,$$

gleichmäßig in $|\vartheta| \leq \delta(r)$,

(3) $y(re^{i\vartheta}) = o\left(\frac{y(r)}{\sqrt{b(r)}}\right)$, für $r \to R$ gleichmäßig in $\delta(r) \leq |\vartheta| \leq \pi$.

Für H-admissible Funktionen bewies Hayman [26] folgenden Satz über das asymptotische Verhalten der Koeffizienten durch die Anwendung der Sattelpunktmethode.

Satz 4.1.2. *Sei $y(z) = \sum_{n\geq 0} y_n z^n$ H-admissible in $|z| < R$. Dann gilt*

$$y_n = \frac{y(r)}{r^n \sqrt{2\pi b(r)}} \left(e^{-\frac{(a(r)-n)^2}{b(r)}} + o(1) \right), \text{ für } n \to \infty,$$

gleichmäßig in n.

Korollar 4.1.3. *Die Funktion $a(r)$ ist positiv und streng monoton wachsend für hinreichend großes r und es gilt*

$$b(r) = o\left(a(r)^2\right), \text{ für } r \to R$$

Wählt man $r = \rho_n$ so, dass ρ_n die Lösung der Gleichung $a(\rho_n) = n$ ist, dann erhält man ein einfacheres Ergebnis. (Die Eindeutigkeit von r_n folgt aus einem Ergebnis von Hayman [26], wo gezeigt wurde, dass $a(r)$ streng monoton wachsend im Intervall $R_1 < r < R$ mit $R_1 > R_0$ ist.)

Korollar 4.1.4. *Sei $y(z) = \sum_{n\geq 0} y_n z^n$ H-admissible in $|z| < R$. Dann gilt*

$$y_n \sim \frac{y(\rho_n)}{\rho_n^n \sqrt{2\pi b(\rho_n)}}, \text{ für } n \to \infty,$$

wobei ρ_n für hinreichend große n eindeutig definiert ist.

Hayman bewies unter anderem folgenden Satz.

Satz 4.1.5. *Sei $P(z) = \sum_{m\in M} b_m z^m$ ein Polynom in z mit reellen Koeffizienten, wobei $b_m \neq 0$, $\forall m \in M$ gelte und*

$$y(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = e^{P(z)}$$

sei.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. $\forall\vartheta \in [-\pi,\pi] \setminus 0$ *gilt* $\left|y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right| < y(r)$, *für* $r \to \infty$

2. *y(z) ist* H*-admissible in* $\mathbb{C}$.

Hayman zeigte folgende Abgeschlossenheitsbedingungen für H-admissible Funktionen:

Satz 4.1.6. 1. *Wenn* $y(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$ *ist, dann ist es* $\mathrm{e}^{y(z)}$ *ebenso.*

2. *Sind* $y_1(z)$ *und* $y_2(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$*, dann ist es auch das Produkt* $y_1(z) \cdot y_2(z)$.

3. *Ist* $y(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$ *und ist* $p(z)$ *ein Polynom mit reellen Koeffizienten, für das* $p(R) > 0$ *für* $R < \infty$ *und für* $R = \infty$ *gilt, dass dessen Leitkoeffizient positiv ist, dann ist auch* $y(z) \cdot p(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$.

4. *Sei* $y(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$ *und* $f(z)$ *eine analytische Funktion in diesem Gebiet. Ist* $f(r)$ *reell für reelle* r *und existiert eine Konstante* $\delta > 0$*, sodass gilt*

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \mathcal{O}\left(y(r)^{1-\delta}\right), \text{ für } r \to R,$$

   dann ist $y(z) + f(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$.

5. *Ist* $y(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$ *und* $p(z)$ *ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann ist* $y(z) + p(z)$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$*. Hat* $p(z)$ *einen positiven Leitkoeffizient, dann ist auch* $p(y(z))$ H*-admissible in* $\mathcal{C}$.

In der Literatur findet man einige Erweiterungen der Ideen von Hayman. Harris und Schoenfeld haben zum Beispiel in [25] den Begriff der HS-Admissibilität eingeführt, die wesentlich stärkere Voraussetzungen an die Funktionen setzt. Der Vorteil ist, das man eine vollständige asymptotische Entwicklung, und nicht nur den Hauptterm, erhält. Der Nachteil ist der Verlust der Abgeschlossenheitsbedingungen. Es gilt aber folgendes. Wenn $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ ist, dann ist $\mathrm{e}^{y(z)}$ HS-admissible in $\mathcal{C}$. Es gibt zahlreiche Anwendungen für H-admissible und HS-admissible Funktionen. Für Beispiele, siehe [2, 3, 5, 12, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42].

Der Satz 4.1.2 kann so interpretiert werden, dass $y_n r^n$ einer H-admissiblen Funktion asymptotisch einen zentralen Grenzwertsatz für $r \to \infty$ erfüllt. Mutafchief hat das in [37] verallgemeinert.

Weitere Untersuchungen über Grenzwertsätze für Koeffizienten von Potenzreihen findet man in [4, 6, 20, 21, 22].

Es ist natürlich eine logische Folgerung, das Konzept der H-Admissibilität für den multivariaten Fall zu verallgemeinern.

Bender und Richmond präsentierten zwei Definitionen in [7, 8] und nannten diese BR-Admissibilität beziehungsweise BR-Superadmissibilität. Ein Vorteil der BR-Admissibilität und der allgemeineren BR-Superadmissibilität sind die weitreichenden Anwendungsmöglichkeiten. In [8] gibt es eine umfangreiche Beispielsammlung dazu. Man verliert aber einige der Abgeschlossenheitsbedingungen des univariaten Falles. Weiters sind die Abgeschlossenheitsbedingungen, die die BR-admissiblen beziehungsweise BR-superadmissiblen Funktionen erfüllen, nicht gut geeignet für eine automatische Verarbeitung durch einen Computer.

Das Ziel dieses Kapitels der Dissertation ist es nun, die H-Admissibilität für den multivariaten Fall so zu verallgemeinern, dass die Abgeschlossenheitsbedingungen des univariaten Falles so weit wie möglich erhalten bleiben. Die Abgeschlossenheitsbedingungen sind deswegen so wichtig, weil sie die Möglichkeit bieten, Klassen von H-admissible Funktionen zu konstruieren, indem man Funktionen durch die Anwendung von algebraischen Gesetzen aus Basisklassen bildet, von denen man weiß, dass sie H-admissible sind. Andererseits, ist es möglich, zu versuchen, eine gegebene Funktion in H-admissible „Atome“ zu zerlegen, und diese Zerlegung für einen Admissibilitäts-Test heranzuziehen, der automatisch von einem Computer erledigt werden kann.
Für den univariaten Fall wurde das zum ersten Mal von Salvy in [46] behandelt und in MAPLE implementiert.
Der zweite Versuch in dieser Richtung wurde von Klausner, Drmota und Gittenberger in [16, 28] für bivariate Funktionen realisiert. Bei ihnen sind den Koeffizienten die kombinatorischen Zufallsvariablen X_n zugeordnet, die durch

$$P[X_n = m] = \frac{y_{nm}}{y_n},$$

mit $y_n = \sum_m y_{nm}$, definiert sind. Sie gaben Bedingungen an, die hinreichend dafür sind, dass für die, den Koeffizienten y_{nm} der erzeugenden Funktion

$$y(z, u) = \sum_{n,m \geq 0} y_{nm} z^n u^m$$

zugeordneten, Zufallsvariablen X_n als Grenzverteilung eine Gaußsche Normalverteilung besitzen. Analog zum univariaten Fall gaben sie eine Reihe von Abgeschlossenheitsbedingungen an und implementierten ihren Ergebnisse in MAPLE.

Es wird nun eine Verallgemeinerung für den multivariaten Fall angegeben, bei der versucht wird, so nahe wie möglich an der Definition von Hayman zu bleiben. Das ermöglicht es, multivariate Verallgemeinerungen mit Hilfe seiner Hilfssätze zu beweisen. Ein großer Teil der Beweise kann auf den multivariaten Fall angepasst werden, um die Abgeschlossenheitsbedingungen zu zeigen. Des Weiteren werden diejenigen multivariaten Polynome $P(\mathbf{z})$ charakterisiert, die H-admissible sind, und eine Basisklasse der H-admissiblen Funktionen darstellen.

4.2 Der multivariate Fall

Sei $R = \infty$. Dann gilt für eine univariate H-admissible Funktion $y(r)$ für ein geeignetes $\delta(r)$ mit $\Delta(r) = [-\delta(r), \delta(r)]$ für $\vartheta \in \Delta(r)$

$$\log y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right) \sim \log y(r) + \mathrm{i}a(r)\vartheta - \frac{1}{2}b(r)\vartheta^2, \text{ für } r \to \infty.$$

Somit hat der Term $\frac{1}{2}b(r)\vartheta^2$ für $\vartheta \in \Delta(r)$ einen großen Einfluss.

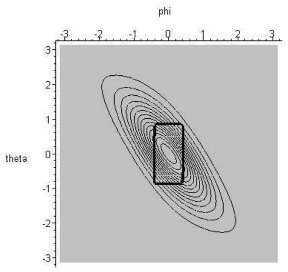
Für eine multivariate H-admissible Funktion $y(\mathbf{r})$ soll nun wie im univariaten Fall, für ein geeignetes $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$, für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$

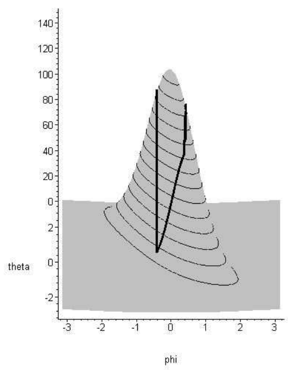
$$\log y\left(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}\right) \sim \log y(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\mathbf{a}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$$

gelten.
Es stellt sich nun die Frage, wie man $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ am besten wählt. Es ist naheliegend, im multivariaten Fall einen Quader zu verwenden. Wählt man allerdings einen achsenparallelen Quader, so kommt man schnell in Schwierigkeiten. Will man zum Beispiel

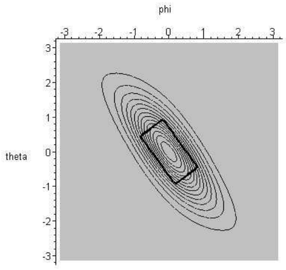
$$\max_{\boldsymbol{\vartheta} \in \partial\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})} \left|y\left(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right|$$

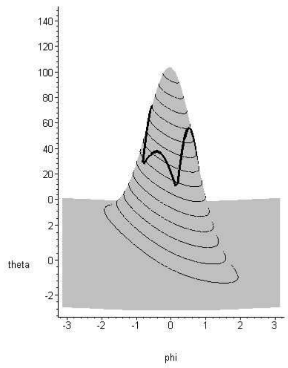
abschätzen, so ist das im Allgemeinen nicht einfach, wie die zwei nachfolgenden Diagramme (für eine Funktion $|y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})|$) demonstrieren.





Sucht man wie im univariaten Fall ein geeignetes $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$, sodass der Term $\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t$ für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ einen großen Einfluss hat, so bietet sich als geeignetes $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ ein Quader an, der parallel zu den Richtungen der Eigenvektoren von $B(\mathbf{r})$ liegt, da man damit sehr leicht rechnen kann, wie man bei den zwei nachfolgenden Diagrammen (für eine Funktion $|y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})|$) sofort sehen kann.





Sei $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches ∞ als Randpunkt und keinen Punkt mit $\|\mathbf{r}\|_{max} \leq R_0$, für ein fest gewähltes R_0, enthalte. Weiters bezeichne $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ die Menge $\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d \middle| \exists \mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}, (|z_1|, \ldots, |z_d|) = \mathbf{r}\right\}$.

Für eine Funktion $y(\mathbf{z})$ mit $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ bezeichne $\mathbf{a}(\mathbf{z}) = \left(a_j(\mathbf{z})\right)_{1 \leq j \leq d}$ den Vektor der ersten logarithmischen (partiellen) Ableitung von $y(\mathbf{z})$, das heißt

$$a_j(\mathbf{z}) = \frac{z_j y_{z_j}(\mathbf{z})}{y(\mathbf{z})}$$

und $B(\mathbf{z}) = (B_{jk}(\mathbf{z}))_{1 \leq j,k \leq d}$ die Matrix der zweiten logarithmischen (partiellen) Ableitung von $y(\mathbf{z})$, das heißt

$$B_{jk}(\mathbf{z}) = \frac{z_j z_k y_{z_j z_k}(\mathbf{z}) + \delta_{jk} z_j y_{z_j}(\mathbf{z})}{y(\mathbf{z})} - \frac{z_j z_k y_{z_j}(\mathbf{z}) y_{z_k}(\mathbf{z})}{y(\mathbf{z})^2},$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-δ sei, dass durch

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

definiert ist.

Somit kann man eine Verallgemeinerung der Definition von Hayman (für den Fall $R = \infty$) folgendermaßen definieren.

Definition 4.2.1. Eine Funktion

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

mit reellen Koeffizienten $y_{\mathbf{n}}$ heißt admissible im Sinne von Hayman (oder H-admissible) in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, wenn sie analytisch in $\mathbb{C}^d$ und positiv in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (für ein geeignet gewähltes $R_0 > 0$) ist und folgende Eigenschaften hat:

(I) $B(\mathbf{r})$ ist positiv definit mit den Eigenwerten $\lambda_1(\mathbf{r}), \dots, \lambda_d(\mathbf{r})$ und erfüllt für $1 \leq j \leq d$:

$$\lambda_j(\mathbf{r}) \to \infty, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

(II) Sei $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{r})$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von $B(\mathbf{r})$. Dann existieren Funktionen $\delta_j : \mathbf{r} \mapsto \delta_j(\mathbf{r}), \boldsymbol{\mathcal{R}} \to (0, \pi)$ für $1 \leq j \leq d$, sodass gilt:

$$y\left(\mathbf{r}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}\right) \sim y(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{a}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{\boldsymbol{\vartheta} B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t}{2}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),$$

gleichmäßig für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$, wobei $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) = \left\{\sum_{j=1}^d \mu_j \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) : |\mu_j| \leq \delta_j(\mathbf{r}), 1 \leq j \leq d\right\}$ sei. Das bedeutet, die asymptotische Formel gilt gleichmäßig innerhalb eines von den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{r})$ aufgespannten Quaders, dessen Größe von den Werten $\delta_1(\mathbf{r}), \dots, \delta_d(\mathbf{r})$ bestimmt wird.

(III) $y(\mathbf{r}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}) = o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\det B(\mathbf{r})}}\right)$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$), gleichmäßig für $\boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi, \pi]^d \setminus \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$.

(IV) Für $1 \leq j \leq d$ gilt $B_{jj}(\mathbf{r}) = o\left(a_j(\mathbf{r})^2\right)$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$).

Bemerkung 4.2.2. Die Bedingung (IV) in der Definition ist das multivariate Analogon zum Korollar 4.1.3. Wenn man die Bedingung (IV) in der Definition weglässt, kann man ein schwächeres Analogon zum Korollar 4.1.3 beweisen, nämlich $\|B(\mathbf{r})\| = o\left(\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|^2\right)$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$(in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$), wobei auf der linken Seite die Spektralnorm und auf der rechten Seite die Euklidische Norm verwendet wird. Es stellt sich leider heraus, dass diese Bedingung zu schwach ist.

Bemerkung 4.2.3. Die Bedingung (II) in der Definition kann nur dann erfüllt sein, wenn $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) \to \mathbf{0}$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) gilt.

Da B eine positiv definite, symmetrische Matrix ist, gibt es eine Orthogonalmatrix A und eine reguläre Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, wobei die Zeilen der Matrix A die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ von B darstellen, sodass

$$B = A^t D A.$$

gilt.
In dieser Dissertation werden diese Matrizen des öfteren verwendet.

Satz 4.2.4. *Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Dann gilt für alle $\boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi, \pi]^d \setminus \mathbf{0}$*

$$|y(\mathbf{r}e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})| < y(\mathbf{r}), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Beweis. Ann.: $\exists \boldsymbol{\vartheta}_0 \in [-\pi,\pi]^d \backslash \mathbf{0}$ und eine Folge $(\mathbf{r}_k)_{k\geq 0}$ in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{r}_k = \boldsymbol{\infty}$, sodass

$$|y(\mathbf{r}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}_0})| \geq y(\mathbf{r}_k), \text{ für } k \to \infty$$

gilt. Da laut Bemerkung 4.2.3 $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) \to \mathbf{0}$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) gilt, folgt die Existenz eines $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in [-\pi,\pi]^d \backslash \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}_k)$ für $k \geq k_0$ erfüllt ist. Somit folgt aus der Bedingung (III) in der Definition

$$y(\mathbf{r}_k) \leq \left|y(\mathbf{r}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}_0})\right| = o\left(\frac{y(\mathbf{r}_k)}{\sqrt{\det B(\mathbf{r}_k)}}\right), \text{ für } k \to \infty.$$

Da $y(\mathbf{r}_k) > 0$ für $k \to \infty$ gilt, kann man hier durch $y(\mathbf{r}_k)$ dividieren und erhält

$$1 = o\left(\frac{1}{\sqrt{\det B(\mathbf{r}_k)}}\right), \text{ für } k \to \infty.$$

Da laut Voraussetzung $\det B(\mathbf{r}_k) \to \infty$, für $k \to \infty$ gilt, erhält man einen Widerspruch. □

Lemma 4.2.5. *Sei $y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ admissible Funktion. Dann gilt für $1 \leq j \leq d$*

$$\delta_j(\mathbf{r})^2 \lambda_j(\mathbf{r}) \to \infty, \textit{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \textit{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Beweis. Da am Rand von $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ die Bedingungen (II) und (III) gelten, folgt speziell für $\boldsymbol{\vartheta} = \delta_j \mathbf{v}_j$ für $1 \leq j \leq d$

$$\begin{aligned}
\frac{|y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_j \mathbf{v}_j})|}{y(\mathbf{r})} &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}(\delta_j \mathbf{v}_j) B(\mathbf{r}) (\delta_j \mathbf{v}_j)^t\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_j \delta_j^2\right) \\
&= o\left(\frac{1}{\sqrt{(\det B(\mathbf{r}))}}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).
\end{aligned}$$

Das bedeutet, für $1 \leq j \leq d$ gilt $\lambda_j \delta_j^2 \to \infty$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$). □

Analog zum univariaten Fall gilt folgender Satz.

Satz 4.2.6. *Sei $y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Dann gilt für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$)*

$$y_{\mathbf{n}} = \frac{y(\mathbf{r})}{\mathbf{r}^{\mathbf{n}} (2\pi)^{d/2} \sqrt{\det B(\mathbf{r})}} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}) B(\mathbf{r})^{-1} (\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{n})^t\right) + o(1)\right),$$

für $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$, gleichmäßig in $\mathbf{n}$.

Beweis. Sei $y_{\mathbf{n}}\mathbf{r}^{\mathbf{n}} = I_1 + I_2$, mit

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})}\!\cdots\!\int \frac{y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})}{e^{i\mathbf{n}\boldsymbol{\vartheta}^t}} d\boldsymbol{\vartheta}$$

und

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d\setminus\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})}\!\cdots\!\int \frac{y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})}{e^{i\mathbf{n}\boldsymbol{\vartheta}^t}} d\boldsymbol{\vartheta}$$

Aus der Bedingung (III) der Definition gilt gleichmäßig für $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$

$$I_2 = o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\det B(\mathbf{r})}}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Andererseits erhält man mit Hilfe der Bedingung (II) und der Substitution $\mathbf{z} = \boldsymbol{\vartheta}\sqrt{\frac{\det B(\mathbf{r})}{2}}$ gleichmäßig für $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$

$$\begin{aligned} I_1 &\sim \frac{y(\mathbf{r})}{(2\pi)^d} \int\limits_{\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})}\!\cdots\!\int \exp\left(i(\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{n})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t\right) d\boldsymbol{\vartheta} \\ &= \frac{y(\mathbf{r})}{\left(\pi\sqrt{2\det B(\mathbf{r})}\right)^d} \int\limits_{\sqrt{\frac{\det B(\mathbf{r})}{2}}\cdot\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})}\!\cdots\!\int \exp\left(i\mathbf{c}\mathbf{z}^t - \frac{\mathbf{z}B(\mathbf{r})\mathbf{z}^t}{\det B(\mathbf{r})}\right) d\mathbf{z}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{n})\sqrt{\frac{2}{\det B(\mathbf{r})}}$ gesetzt wurde.
Es gilt $\lambda_j\delta_j^2 \to \infty$ nach Lemma 4.2.5. Somit folgt $\sqrt{\lambda_j}\delta_j \to \infty$ und damit auch $\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_d}\delta_j = \sqrt{\det B(\mathbf{r})}\delta_j \to \infty,$ für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$). Somit kann man die Integrationsgrenzen ausdehnen und erhält

$$I_1 \sim \frac{y(\mathbf{r})}{\left(\pi\sqrt{2\det B(\mathbf{r})}\right)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\!\cdots\!\int \exp\left(i\mathbf{c}\mathbf{z}^t - \frac{\mathbf{z}B(\mathbf{r})\mathbf{z}^t}{\det B(\mathbf{r})}\right) d\mathbf{z},$$

Substituiert man jetzt $\mathbf{z} = \mathbf{w}A$, so erhält man

$$I_1 \sim \frac{y(\mathbf{r})}{\left(\pi\sqrt{2\det B(\mathbf{r})}\right)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\!\cdots\!\int \exp\left(i\mathbf{c}A^t\mathbf{w}^t - \frac{1}{\det B(\mathbf{r})}\sum_{j=1}^d \lambda_j w_j^2\right) d\mathbf{w}.$$

Für $1 \le j \le d$ gilt nun

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(i(\mathbf{c}A^t)_j w_j - \frac{\lambda_j w_j^2}{\det B(\mathbf{r})}\right) dw_j = \sqrt{\frac{\pi\det B(\mathbf{r})}{\lambda_j}} \exp\left(\frac{(\mathbf{c}A^t)_j^2\det B(\mathbf{r})}{4\lambda_j}\right)$$

und damit folgt

$$I_1 \sim \frac{y(\mathbf{r})}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det B(\mathbf{r})}} \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^d \frac{\det B(\mathbf{r})(\mathbf{c}A^t)_k^2}{\lambda_k}\right).$$

Mit

$$(\mathbf{c}A^t)_k^2 = \frac{2}{\det B(\mathbf{r})}\left(\sum_{j=1}^{d}(a_j(\mathbf{r})-n_j)A_{kj}\right)^2$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{d}\frac{\det B(\mathbf{r})(\mathbf{c}A^t)_k^2}{\lambda_k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sum_{j=1}^{d}(a_j(\mathbf{r})-n_j)A_{kj}\right)^2\\
&= \frac{(\mathbf{a}(\mathbf{r})-\mathbf{n})A^tD^{-1}A(\mathbf{a}(\mathbf{r})-\mathbf{n})^t}{2}\\
&= \frac{(\mathbf{a}(\mathbf{r})-\mathbf{n})B(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{a}(\mathbf{r})-\mathbf{n})^t}{2}.
\end{aligned}$$

□

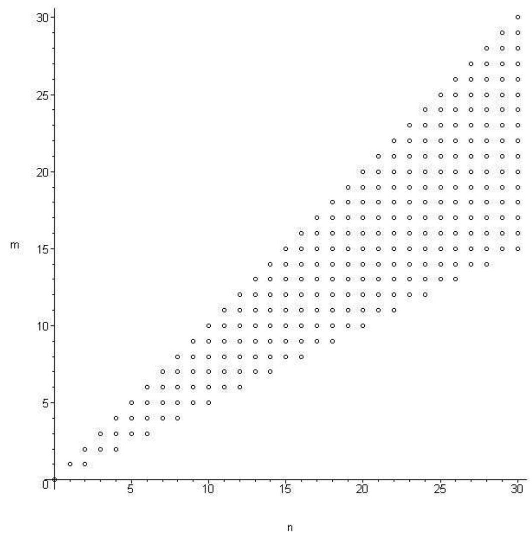
Korollar 4.2.7. *Sei $y(\mathbf{z})$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Gilt $\mathbf{n}\to\infty$ so, dass $\boldsymbol{\rho}_\mathbf{n}\to\infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) für die Lösung von $\mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}_\mathbf{n})=\mathbf{n}$ folgt, so erhält man für $\mathbf{n}\to\infty$*

$$y_\mathbf{n}\sim\frac{y(\boldsymbol{\rho}_\mathbf{n})}{\boldsymbol{\rho}_\mathbf{n}^\mathbf{n}(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det B(\boldsymbol{\rho}_\mathbf{n})}}.$$

Bemerkung 4.2.8. Im Gegensatz zum univariaten Fall hat die Gleichung $\mathbf{a}(\mathbf{r})=\mathbf{n}$ nicht notwendigerweise immer eine Lösung. Laut der Folgerung 4.4.6 ist die Funktion

$$\mathrm{e}^{z^2u+zu} = 1+(z^2u+zu)+\frac{(z^2u+zu)^2}{2}+\frac{(z^2u+zu)^3}{6}+\cdots=\sum_{n,m\in\mathbb{N}}y_{nm}z^nu^m,$$

in $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma$ für $\sigma>1$ (aus Bedingung 4.4.1) H-admissible. Zeichnet man in ein Koordinatensystem die Punkte (n,m) ein, für die $[z^nu^m]\mathrm{e}^{z^2u+zu}>0$ gilt, so erhält man:



Man sieht in diesem Fall sofort, dass die Gleichung $\mathbf{a}(\mathbf{r})=(n,m)$ nur innerhalb des Konus $\lceil\frac{n}{2}\rceil\le m\le n$ eine Lösung haben kann, da außerhalb $y_{nm}=0$ gelten muss.

4.3 Eigenschaften von H-admissiblen Funktionen und deren Ableitungen

Lemma 4.3.1. *H-admissible Funktionen erfüllen*

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}e^{\mathbf{h}}) \sim \mathbf{a}(\mathbf{r}), \textit{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \textit{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),$$

gleichmäßig für $|h_j| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{a_j(\mathbf{r})}\right)$.

Beweis. Sei o.B.d.A. $d = 2$. Da B positiv definit ist, folgt aus der Bedingung (IV) der Definition 4.2.1

$$B_{11}B_{22} - B_{12}^2 \geq 0, \text{ und somit } |B_{12}| \leq \sqrt{B_{11}B_{22}} = o(a_1(\mathbf{r})a_2(\mathbf{r})).$$

Da für jede positiv definite Matrix jeder 2×2 - Minor positiv ist, ist es keine Einschränkung, nur den Fall $d = 2$ zu betrachten.
Definiert man

$$\varphi_1(x_1, x_2) := a_1\left(e^{x_1}, e^{x_2}\right) \text{ und } \varphi_2(x_1, x_2) := a_2\left(e^{x_1}, e^{x_2}\right),$$

so gelten offensichtlich folgende Bedingungen für $x_1, x_2 \to \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}a_1(e^{\mathbf{x}}) = B_{11}(e^{\mathbf{x}}) = o\left(a_1(e^{\mathbf{x}})^2\right) = o\left(\varphi_1(\mathbf{x})^2\right)\\
\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_2}a_2(e^{\mathbf{x}}) = B_{22}(e^{\mathbf{x}}) = o\left(a_2(e^{\mathbf{x}})^2\right) = o\left(\varphi_2(\mathbf{x})^2\right)\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1(\mathbf{x}) = B_{12}(e^{\mathbf{x}}) = o\left(a_1(e^{\mathbf{x}})a_2(e^{\mathbf{x}})\right) = o\left(\varphi_1(\mathbf{x})\varphi_2(\mathbf{x})\right).
\end{aligned}$$

Sei $|x_1' - x_1''| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varphi_1(x_1', x_2')}\right)$ und $|x_2' - x_2''| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varphi_2(x_1', x_2')}\right)$, wobei o.B.d.A. $x_1'' > x_1'$ und $x_2'' > x_2'$ gelte.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi_2(x_1', x_2')} - \frac{1}{\varphi_2(x_1', x_2'')} &= \int_{x_2'}^{x_2''} \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1(x_1', x)}{\varphi_1(x_1', x)^2} \mathrm{d}x\\
&\leq |x_2' - x_2''| \cdot \max_{x_2' \leq x \leq x_2''} \frac{o\left(\varphi_2(x_1', x)^2\right)}{\varphi_2(x_1', x)^2}\\
&= o\left(\frac{1}{\varphi_2(x_1', x_2')}\right), \text{ für } x_1', x_2' \to \infty,
\end{aligned}$$

woraus sofort $\varphi_2(x_1', x_2') \sim \varphi_2(x_1', x_2'')$ für $x_1', x_2' \to \infty$ folgt.

Sei x_0 der Punkt, bei dem das Maximum $\max_{x_2' \le x \le x_2''} \frac{\varphi_1(x_1'',x)\varphi_2(x_1',x)}{\varphi_1(x_1',x)\varphi_2(x_1'',x)}$ angenommen werde. Berechnet man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2'')} - \frac{1}{\varphi_1(x_1'',x_2'')} &= \int_{x_1'}^{x_1''} \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(x,x_2'')}{\varphi_1(x,x_2'')^2}\mathrm{d}x \\
&\le |x_1' - x_1''| \cdot \max_{x_1' \le x \le x_1''} \frac{o\left(\varphi_1(x,x_2'')^2\right)}{\varphi_1(x,x_2'')^2} \\
&= o\left(\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2')}\right), \text{ für } x_1', x_2' \to \infty
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2')} - \frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2'')} &= \int_{x_2'}^{x_2''} \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1(x_1',x)}{\varphi_1(x_1',x)^2}\mathrm{d}x \\
&\le |x_2' - x_2''| \cdot \frac{o\left(\varphi_1(x_1',x_0)\varphi_2(x_1',x_0)\right)}{\varphi_1(x_1',x_0)^2} \\
&= o\left(\frac{1}{\varphi_2(x_1',x_2')} \cdot \frac{\varphi_2(x_1',x_0)}{\varphi_1(x_1',x_0)}\right) \\
&= o\left(\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_0)} \cdot \frac{\varphi_2(x_1',x_0)}{\varphi_2(x_1',x_2')}\right) \\
&= o\left(\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2')}\right), \text{ für } x_1', x_2' \to \infty
\end{aligned}$$

und addiert beide Gleichungen so erhält man

$$\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2')} - \frac{1}{\varphi_1(x_1'',x_2'')} = o\left(\frac{1}{\varphi_1(x_1',x_2')}\right), \text{ für } x_1', x_2' \to \infty,$$

Das bedeutet, es gilt

$$\varphi_1(x_1',x_2') \sim \varphi_1(x_1'',x_2''), \text{ für } x_1', x_2' \to \infty.$$

Analog erhält man

$$\varphi_2(x_1',x_2') \sim \varphi_2(x_1'',x_2''), \text{ für } x_1', x_2' \to \infty.$$

Setzt man nun $\mathbf{r} = \mathrm{e}^{\mathbf{x}'}$ und $\mathbf{h} = \mathbf{x}'' - \mathbf{x}'$, so erhält man das gewünschte Ergebnis. □

Lemma 4.3.2. *Sei $y(\mathbf{z})$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Dann gilt*

$$\frac{y(\mathbf{r})}{\mathbf{r}^{\mathbf{n}}} \to \infty, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Weiters gilt für alle $\epsilon > 0$

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\| = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{\epsilon}\right) \text{ und } \|B(\mathbf{r})\| = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{\epsilon}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Beweis. Die erste Behauptung ist eine einfache Folgerung aus dem Satz 4.2.6.
Für die zweite Behauptung sei angenommen, dass ein $\bar{\mathbf{R}}$ existiert, sodass für alle $\mathbf{r} \geq \bar{\mathbf{R}}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$)

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|_{\max} \geq y(\mathbf{r})^{\epsilon}$$

gilt. Für ein beliebiges $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ bei dem jede Komponenten positiv ist und für das $\mathbf{R}+t\mathbf{h} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ für alle $t \geq 0$ ist, folgt

$$\sum_{j=1}^{d} a_j(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{y_j(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})}{y(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})}(\bar{R}_j + th_j) \geq y(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})^{\epsilon} \cdot K,$$

und somit

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{y_j(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})h_j\left(\frac{\bar{R}_j}{h_j}+t\right)}{y(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})^{1+\epsilon}} \geq K.$$

Sei nun k so, dass

$$\max_{1\leq j\leq d}\left(\frac{\bar{R}_j}{h_j}+t\right) = \frac{\bar{R}_k}{h_k}+t$$

sei. Dann folgt

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{y_j(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})h_j}{y(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})^{1+\epsilon}} \geq \frac{K}{\frac{\bar{R}_k}{h_k}+t}.$$

Setzt man $g(t) = y(\bar{\mathbf{R}}+t\mathbf{h})$, so erhält man

$$\frac{g'(t)}{g(t)^{1+\epsilon}} \geq \frac{K}{\frac{\bar{R}_k}{h_k}+t}$$

und daher

$$\int_0^{\rho} \frac{g'(t)}{g(t)^{1+\epsilon}}\mathrm{d}t \geq K\left(\log\left(\frac{\bar{R}_k}{h_k}+\rho\right) - \log\frac{\bar{R}_k}{h_k}\right) = K\log\frac{\bar{R}_k+\rho h_k}{\bar{R}_k}.$$

Dieser Ausdruck ist für $\rho \to \infty$ unbeschränkt. Berechnet man andererseits das Integral, so folgt

$$\int_0^{\rho} \frac{g'(t)}{g(t)^{1+\epsilon}}\mathrm{d}t = \frac{y(\bar{\mathbf{R}})^{-\epsilon} - y(\bar{\mathbf{R}}+\rho\mathbf{h})^{-\epsilon}}{\epsilon},$$

wobei der Ausdruck beschränkt ist und man somit einen Widerspruch erhält.
Die dritte Behauptung folgt nun aus aus der Bedingung (IV) der Definition 4.2.1. □

Korollar 4.3.3. *Sei $y(\mathbf{z})$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$*

$$\det B(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{\epsilon}\right), \ \textit{für } \mathbf{r} \to \infty \ (\textit{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ die Spektralnorm. Dann ist $\|B(\mathbf{r})\|$ der größte Eigenwert von $B(\mathbf{r})$ und es gilt $\det B(\mathbf{r}) \leq \|B(\mathbf{r})\|^d$. Mit Hilfe des Lemmas 4.3.2 erhält man nun die Behauptung. $\square$

Lemma 4.3.4. *Sei $K \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann erfüllt eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion $y(\mathbf{z})$*

$$y\left(r_1 + \frac{Kr_1}{a_1(\mathbf{r})}, \ldots, r_d + \frac{Kr_d}{a_d(\mathbf{r})}\right) \sim \mathrm{e}^{Kd} y(\mathbf{r}), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Beweis. Sei $\mathbf{h}$ gegeben. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz für $0 < \vartheta < 1$, wenn man $h_j = \frac{Kr_j}{a_j(\mathbf{r})}$ substituiert

$$\begin{aligned}
\log(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - \log(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{d} \frac{y_j(\mathbf{r} + \vartheta\mathbf{h})}{y(\mathbf{r} + \vartheta\mathbf{h})} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{h_j}{r_j + \vartheta h_j} a_j(\mathbf{r} + \vartheta\mathbf{h}) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{\frac{Kr_j}{a_j(\mathbf{r})}}{r_j + \vartheta\frac{Kr_j}{a_j(\mathbf{r})}} a_j(\mathbf{r} + \vartheta\mathbf{h}) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \frac{K}{1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{a_j(\mathbf{r})}} \cdot \frac{a_j(\mathbf{r} + \vartheta\mathbf{h})}{a_j(\mathbf{r})} \\
&\sim \sum_{j=1}^{d} \frac{K}{1} \cdot 1 \\
&= Kd,
\end{aligned}$$

wobei $a_j(\mathbf{r} + \vartheta\mathbf{h}) \sim a_j(\mathbf{r})$ aus dem Lemma 4.3.1 folgt. $\square$

Satz 4.3.5. *Sei $y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Weiters sei $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}A^t$ und $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r})A^t$ der Vektor der logarithmischen Ableitung von $y(\mathbf{z})$ bezüglich der Eigenbasis von $B(\mathbf{r})$. Dann gilt für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$)*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n},\ \text{für die gilt} \\ \forall j: \tilde{n}_j \leq \tilde{a}_j(\mathbf{r}) + \omega_j \sqrt{\lambda_j(\mathbf{r})}}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} \sim \frac{y(\mathbf{r})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^{\omega_1} \cdots \int_{-\infty}^{\omega_d} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} t_j^2\right) \mathrm{d}\mathbf{t}.$$

Beweis. Seien $N_j := \lfloor \tilde{a}_j(\mathbf{r}) \rfloor$,

$$\underline{N}_j := \left\lfloor \tilde{a}_j(\mathbf{r}) + \underline{\omega}_j \sqrt{2 \det B(\mathbf{r})} \right\rfloor \text{ und } \overline{N}_j := \left\lfloor \tilde{a}_j(\mathbf{r}) + \overline{\omega}_j \sqrt{2 \det B(\mathbf{r})} \right\rfloor$$

für beliebige $\underline{\omega}_j < 0 < \overline{\omega}_j$ definiert. Sei weiters $N_j + 2 \le n_j \le \overline{N}_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{n_1}^{n_1+1} \cdots \int_{n_d}^{n_d+1} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\le \exp\left(-\frac{(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \\
&\le \int_{n_1-1}^{n_1} \cdots \int_{n_d-1}^{n_d} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{N_1+2}^{\overline{N}_1+1} \cdots \int_{N_d+2}^{\overline{N}_d+1} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\le \sum_{N_1+2}^{\overline{N}_1+1} \cdots \sum_{N_d+2}^{\overline{N}_d+1} \exp\left(-\frac{(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\le \int_{N_1+1}^{\overline{N}_1} \cdots \int_{N_d+1}^{\overline{N}_d} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Substituiert man jetzt $x_j = \tilde{a}_j(\mathbf{r}) + t_j\sqrt{\lambda_j(\mathbf{r})}$, $\mathrm{d}\mathbf{x} = \sqrt{\det B(\mathbf{r})}\mathrm{d}\mathbf{t}$, so wird das Integral zu

$$\sqrt{\det B(\mathbf{r})} \int_{\underline{t}_1}^{\overline{t}_1} \cdots \int_{\underline{t}_d}^{\overline{t}_d} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right) \mathrm{d}\mathbf{t},$$

mit $\underline{t}_j \to 0$ und $\overline{t}_j \to \omega_j$.
Setzt man nun $\tilde{\mathbf{N}} := \left\{\tilde{\mathbf{n}} \in \mathbb{N}^d : \underline{\mathbf{N}} \le \tilde{\mathbf{n}} \le \overline{\mathbf{N}}\right\}$ und wendet man den Satz 4.2.6 an so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{n}\in\tilde{\mathbf{N}}} y_{\mathbf{n}}\mathbf{r}^{\mathbf{n}} &\sim \frac{y(\mathbf{r})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det B(\mathbf{r})}} \sum_{\mathbf{n}\in\tilde{\mathbf{N}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{a})B(\mathbf{r})^{-1}(\mathbf{n}-\mathbf{a})^t}{2}\right) \\
&= \frac{y(\mathbf{r})}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det B(\mathbf{r})}} \sum_{\tilde{\mathbf{n}}=\underline{\mathbf{N}}}^{\overline{\mathbf{N}}} \exp\left(-\frac{(\tilde{\mathbf{n}}-\tilde{\mathbf{a}})D(\mathbf{r})^{-1}(\tilde{\mathbf{n}}-\tilde{\mathbf{a}})^t}{2}\right) \\
&\sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\underline{\omega}_1}^{\overline{\omega}_1} \cdots \int_{\underline{\omega}_d}^{\overline{\omega}_d} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right) \mathrm{d}\mathbf{t},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Überlegungen von oben angewendet werden. Für die restliche Summe gilt $\sum_{\exists j: n_j < \underline{N}_j} y_{\mathbf{n}}\mathbf{r}^{\mathbf{n}} < \epsilon y(\mathbf{r})$, wenn alle $\underline{\omega}_j$ klein genug sind. □

Satz 4.3.6. *Sei* $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ *fest gewählt. Dann gilt*

$$\frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}} y(\mathbf{z}) \quad \sim \quad y(\mathbf{r}) \left(\frac{a_1(\mathbf{r})}{r_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{a_d(\mathbf{r})}{r_d} \right)^{k_d}, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

Beweis. Sei $\bar{R}_j = r_j \left(1 + \frac{1}{a_j(\mathbf{r})}\right)$ und $|z_j| < \bar{R}_j$ für $1 \leq j \leq d$. Mit Hilfe des Lemmas 4.3.4 erhält man

$$|y(\mathbf{z})| = \left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} \right| \leq \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} y_{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{R}}^{\mathbf{n}} = y(\bar{\mathbf{R}}) = \mathcal{O}(y(\mathbf{r})).$$

Sei $\mathbf{h} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{r} = \left(\frac{r_1}{a_1(\mathbf{r})}, \ldots, \frac{r_d}{a_d(\mathbf{r})} \right)$. Dann gilt

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\mathbf{k}!} \frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}} y(\mathbf{r}) (\mathbf{z} - \mathbf{r})^{\mathbf{k}}$$

und somit erhält man mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung

$$\left| \frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}} y(\mathbf{z}) \right| \quad \leq \quad \frac{\mathbf{k}!}{\mathbf{h}^{\mathbf{k}}} y(\bar{\mathbf{R}}) = \mathcal{O} \left(y(\mathbf{r}) \left(\frac{a_1(\mathbf{r})}{r_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{a_d(\mathbf{r})}{r_d} \right)^{k_d} \right).$$

Seien

$$\mathbf{M}_1 := \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d : |a_j(\mathbf{r}) - n_j| \leq \omega \sqrt{B_{jj}(\mathbf{r})}, \text{ für } 1 \leq j \leq d \right\}$$

und

$$\mathbf{M}_2 := \mathbb{N}^d \setminus \mathbf{M}_1.$$

Dann gilt

$$\mathbf{r}^{\mathbf{k}} \frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{z}^{\mathbf{k}}} y(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} (\mathbf{n})_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}} = \underbrace{\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{M}_1} (\mathbf{n})_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}}}_{\sum_1} + \underbrace{\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{M}_2} (\mathbf{n})_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{r}^{\mathbf{n}}}_{\sum_2}.$$

Nun gilt im Summationsbereich $(\mathbf{n})_{\mathbf{k}} \sim \mathbf{a}(\mathbf{r})^{\mathbf{k}}$. Sei nun $\tilde{\mathbf{n}}$ so wie im Satz 4.3.5 definiert, $s_j = n_j - a_j(\mathbf{r})$ und $\tilde{s}_j = \tilde{n}_j + \tilde{a}_j(\mathbf{r})$. Da A orthogonal ist, gilt

$$\|\tilde{\mathbf{s}}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 = \omega^2 \sum_{j=1}^{d} B_{jj}.$$

Der Summationsbereich überdeckt die Menge $\left\{ \mathbf{n} : |\tilde{a}_j(\mathbf{r}) - \tilde{n}_j| \leq \omega \sqrt{\lambda_j(\mathbf{r})}, 1 \leq j \leq d \right\}$. Somit erhält man mit Hilfe des Satzes 4.3.5 $\sum_1 \sim C(\omega) y(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r})^{\mathbf{k}}$ mit

$$\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{[-\omega,\omega]^d} \cdots \int \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} t_j^2 \right) \mathrm{d}\mathbf{t} < C(\omega) < 1.$$

Andererseits gilt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left|\sum\nolimits_2\right| &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}_2} (\mathbf{n})_\mathbf{k} y_\mathbf{n} \mathbf{r}^\mathbf{n} \\
&\leq \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}_2} \mathbf{n}^\mathbf{k} y_\mathbf{n} \mathbf{r}^\mathbf{n} \\
&\leq \left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}_2} \mathbf{n}^{2\mathbf{k}} y_\mathbf{n} \mathbf{r}^\mathbf{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}_2} y_\mathbf{n} \mathbf{r}^\mathbf{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathcal{O}\left(\left(\mathbf{r}^{2\mathbf{k}} \frac{\partial^{2\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{z}^{2\mathbf{k}}} y(\mathbf{r}) \cdot \int\cdots\int_{(\mathbb{R}^+)^d\setminus[0,\omega]^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d t_j^2\right) \mathrm{d}\mathbf{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Daher folgt, dass

$$\mathbf{r}^{2\mathbf{k}} \frac{\partial^{2\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{z}^{2\mathbf{k}}} y(\mathbf{r}) = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r})^{2\mathbf{k}}\right)$$

gilt und für hinreichend großes ω

$$\left|\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - y(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r})^\mathbf{k}\right| < \epsilon y(\mathbf{r})\mathbf{a}(\mathbf{r})^\mathbf{k}$$

erfüllt ist, was den Beweis komplettiert. □

Lemma 4.3.7. *Seien $\eta > 0$ und $C > 0$ Konstanten, sodass für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d$ mit $|z_j - r_j| < 2\eta r_j$, für $1 \leq j \leq d$ die Matrix B $|\mathbf{h}B(\mathbf{z})\mathbf{h}^t| \leq C\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t$ für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ erfülle und $y(\mathbf{z})$ dort regulär und ungleich 0 sei. Dann erhält man die Entwicklung*

$$\log y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) = \log y(\mathbf{r}) + i\mathbf{a}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t + \varepsilon(\mathbf{r},\boldsymbol{\vartheta})$$

mit

$$|\varepsilon(\mathbf{r},\boldsymbol{\vartheta})| \leq \frac{C\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|}{2\eta}.$$

Beweis. Sei $|t| \leq 2\eta$ für ein $\mathbf{h}$ mit $\|\mathbf{h}\| = 1$. Setzt man

$$\begin{aligned}
g''(t) &:= -\mathbf{h}B(\mathbf{r}e^{it\mathbf{h}})\mathbf{h}^t = \sum_{n\geq 0} c_n t^n \\
&= c_0 + \sum_{n\geq 1} c_n t^n \\
&= -\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t + \sum_{n\geq 1} c_n t^n,
\end{aligned}$$

so folgt durch ein- bzw. zweimaliges Integrieren

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \mathbf{a}(\mathbf{r})(i\mathbf{h})^t \\
g(0) &= \log y(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Somit ist die Taylorentwicklung von $g(t)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} \\ &= \log y(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\mathbf{a}(\mathbf{r})(t\mathbf{h})^t - \frac{1}{2}(t\mathbf{h})B(\mathbf{r})(t\mathbf{h})^t + \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} \\ &= \log y\left(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbf{h}}\right) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cauchyschen Abschätzung erhält man für die Koeffizienten c_n

$$|c_n| \leq \frac{\max_{|t|=\eta} |g''(t)|}{\eta^n} = \frac{\max_{|t|=\eta} |\mathbf{h}B(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathbf{h}})\mathbf{h}^t|}{\eta^n} \leq \frac{C\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t}{\eta^n}.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} \right| &\leq \sum_{n\geq 1} |c_n| \cdot \frac{|t|^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \frac{C\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t}{\eta^n} \cdot \frac{|t|^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &\leq \frac{C\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t |t|^3}{\eta} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{C(t\mathbf{h})B(\mathbf{r})(t\mathbf{h})^t \cdot |t|}{2\eta} \end{aligned}$$

Setzt man nun $t\mathbf{h} = \boldsymbol{\vartheta}$, so erhält man die gewünschte Darstellung

$$\log y\left(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}\right) = \log y(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\mathbf{a}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t + \varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta})$$

mit

$$|\varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta})| \leq \frac{C\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|}{2\eta}.$$

□

Lemma 4.3.8. *Eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion $y(\mathbf{z})$ erfüllt*

$$y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}) = y(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\tilde{B}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t + \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r}) \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|^3 \cdot \|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|^3\right)$$

gleichmäßig für $|\vartheta_j| \leq \frac{1}{a_j(\mathbf{r})}$, für $1 \leq j \leq d$, wobei

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \nabla y(\mathrm{e}^{s_1}, \ldots, \mathrm{e}^{s_d})\big|_{s_1=\log r_1, \ldots, s_d=\log r_d}$$

und

$$\tilde{B}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial^2 y(\mathrm{e}^{s_1}, \ldots, \mathrm{e}^{s_d})}{\partial s_j \partial s_k} \bigg|_{s_1=\log r_1, \ldots, s_d=\log r_d} \right)_{j,k=1}^d$$

sei.

Beweis. Es gilt $\tilde{B}(\mathbf{z}) = \left(y_{z_j z_k}(\mathbf{z}) z_j z_k + \delta_{jk} y_{z_j}(\mathbf{z}) z_j\right)_{j,k=1}^d$. Nach Satz 4.3.6 gilt $y_{z_j z_k}(\mathbf{z}) \sim y(\mathbf{r}) a_j(\mathbf{r}) a_k(\mathbf{r})$, woraus $\|\tilde{B}(\mathbf{r})\| = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|^2\right)$ folgt. Setzt man $\eta_j := \frac{1}{a_j(\mathbf{r})}$ für $1 \le j \le d$ und

$$\begin{aligned}
\eta &:= \min_{1\le j\le d} \{\eta_1, \ldots, \eta_d\} \\
&= \min_{1\le j\le d} \left\{\frac{1}{a_1(\mathbf{r})}, \ldots, \frac{1}{a_d(\mathbf{r})}\right\} \\
&= \frac{1}{\max\limits_{1\le j\le d}\{a_1(\mathbf{r}), \ldots, a_d(\mathbf{r})\}} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|_{\max}}
\end{aligned}$$

und beachtet, dass nach Lemma 4.3.1 $\mathbf{a}(r_1(1+2\eta_1), \ldots, r_d(1+2\eta_d)) \sim \mathbf{a}(\mathbf{r})$ und nach Lemma 4.3.4 $y(r_1(1+2\eta_1), \ldots, r_d(1+2\eta_d)) \sim \mathrm{e}^{2d} y(\mathbf{r})$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\tilde{B}_{jk}(r_1(1+2\eta_1), \ldots, r_d(1+2\eta_d)) \\
&\quad\sim y(r_1(1+2\eta_1), \ldots, r_d(1+2\eta_d)) a_j(r_1(1+2\eta_1), \ldots, r_d(1+2\eta_d)) a_k(r_1(1+2\eta_1), \ldots, r_d(1+2\eta_d)) \\
&\quad\sim \mathrm{e}^{2d} y(\mathbf{r}) a_j(\mathbf{r}) a_k(\mathbf{r}) \\
&\quad\sim \mathrm{e}^{2d} \tilde{B}_{jk}(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Die Einträge von $\tilde{B}(\mathbf{z})$ sind analytische Funktionen. Somit hat man

$$\tilde{B}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} B_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} y_{\mathbf{n}} \cdot (n_i n_j)_{i,j=1}^d \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

wobei alle $B_{\mathbf{n}}$ positiv semidefinite Matrizen sind. Daraus folgt

$$\max_{|z_j|=r_j, j=1,\ldots,d} |\mathbf{h}\tilde{B}(\mathbf{z})\mathbf{h}^t| \le \mathbf{h}\tilde{B}(\mathbf{r})\mathbf{h}^t.$$

Damit folgt für $|z_j - r_j| \le 2\eta r_j$, für $1 \le j \le d$, dass

$$|\mathbf{h}\tilde{B}(\mathbf{z})\mathbf{h}^t| \le \mathbf{h}\tilde{B}(\mathbf{r} + 2\eta\mathbf{r})\mathbf{h}^t \le C\mathbf{h}\tilde{B}(\mathbf{r})\mathbf{h}^t$$

mit der Konstante $C = \mathrm{e}^{2d}$ gilt. Folglich kann man das Lemma 4.3.7 anwenden und erhält

$$y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}) = y(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\tilde{B}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t + \varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta})$$

mit

$$\begin{aligned}
|\varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta})| &\le \frac{C\boldsymbol{\vartheta}\tilde{B}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|}{2\eta} \\
&\le \frac{C\|\tilde{B}(\mathbf{r})\| \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|^3}{2\eta} \\
&= \mathcal{O}\left(\|\tilde{B}(\mathbf{r})\| \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|^3 \cdot \|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|\right) \\
&= \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r}) \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|^3 \cdot \|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|^3\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),
\end{aligned}$$

was das Lemma beweist. $\square$

Lemma 4.3.9. *Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und $\|\boldsymbol{\vartheta}\|_{\max} \geq y(\mathbf{r})^{-\frac{2}{5}-\epsilon}$, für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Dann gilt*

$$|y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}| \leq y(\mathbf{r}) - y(\mathbf{r})^{\frac{1}{7}}.$$

Beweis. Der Beweis von diesem Lemma ist analog zum univariaten Fall. Sei $|\vartheta_j| > y(\mathbf{r})^{-\frac{2}{5}}$ für ein $j \in \{1, \ldots, d\}$. Setzt man $k_j := \lfloor a_j(\mathbf{r}) \rfloor$ und $\boldsymbol{\ell} = (k_1 + 1, k_2 + 1, \ldots, k_\ell + 1, k_{\ell+1}, k_{\ell+2}, \ldots, k_d)$ und definiert $\upsilon_\ell(\mathbf{z}) := y_{\boldsymbol{\ell}} \mathbf{z}^{\boldsymbol{\ell}}$ und $\alpha_\ell := |\upsilon_\ell(\mathbf{z})| = |y_{\boldsymbol{\ell}}| \mathbf{r}^{\boldsymbol{\ell}}$, so erhält man auf die gleiche Weise wie in [26, Lemma 6]

$$|\upsilon_{\ell-1}(\mathbf{z}) + \upsilon_\ell(\mathbf{z})| \leq \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell - \frac{1}{10} \cdot \frac{y(\mathbf{r})^{\frac{1}{5}}}{\sqrt{(2\pi)^d \det B(\mathbf{r})}}.$$

Aus dem Korollar 4.3.3 folgt

$$|\upsilon_{\ell-1}(\mathbf{z}) + \upsilon_\ell(\mathbf{z})| \leq \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell - y(\mathbf{r})^{\frac{1}{6}}.$$

Sei $\tilde{y}(\mathbf{z}) = y(\mathbf{z}) - \upsilon_{\ell-1}(\mathbf{z}) - \upsilon_\ell(\mathbf{z})$. Dann erfüllt auch $\tilde{y}(\mathbf{z})$ die Bedingungen (II) und (III) in der Definition 4.2.1. Folglich gilt $\tilde{y}(\mathbf{z}) < \tilde{y}(\mathbf{r})$ für $\mathbf{z} \notin \mathbb{R}^d$. Das heißt, man erhält

$$\begin{aligned}
|y(\mathbf{z})| &\leq |\tilde{y}(\mathbf{z})| + |\upsilon_{\ell-1} + \upsilon_\ell| \\
&\leq \tilde{y}(\mathbf{r}) + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell - y(\mathbf{r})^{\frac{1}{6}} \\
&= y(\mathbf{r}) + \upsilon_{\ell-1}(\mathbf{r}) + \upsilon_\ell(\mathbf{r}) + (\alpha_{\ell-1} - \upsilon_{\ell-1}(\mathbf{r})) + (\alpha_\ell - \upsilon_\ell(\mathbf{r})) - y(\mathbf{r})^{\frac{1}{6}} \\
&\leq y(\mathbf{r}) - y(\mathbf{r})^{\frac{1}{7}}.
\end{aligned}$$

□

4.4 Eine Klasse von H-admissiblen Funktionen

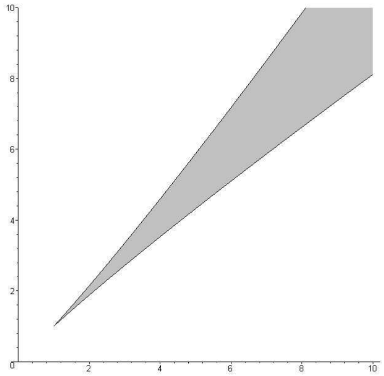
Bemerkung 4.4.1. Sei in diesem Abschnitt $1 < \sigma \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma := \left\{ \mathbf{r} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^d : (r_{\min})^\sigma > r_{\max} \right\}$$

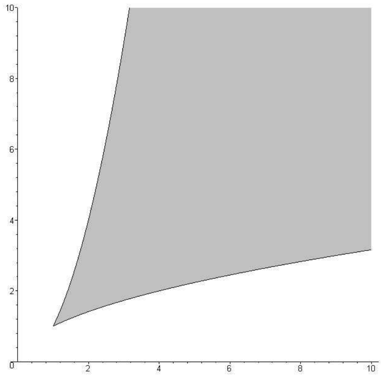
und

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d \middle| \exists \mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma, (|z_1|, \ldots, |z_d|) = \mathbf{r} \right\},$$

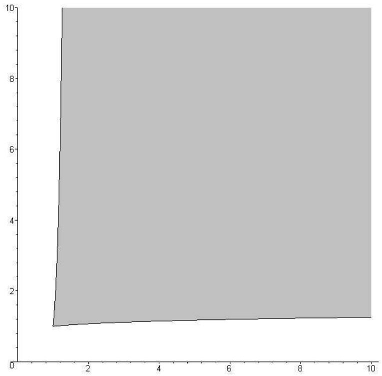
wobei $r_{\min} = \min_{1 \leq j \leq d} r_j$ und $r_{\max} = \max_{1 \leq j \leq d} r_j$ bezeichne.
Die folgenden Diagramme veranschaulichen die Menge $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$ für 2 Variablen mit $\sigma = 1.1$, 2 und 10.



$\sigma = 1.1$

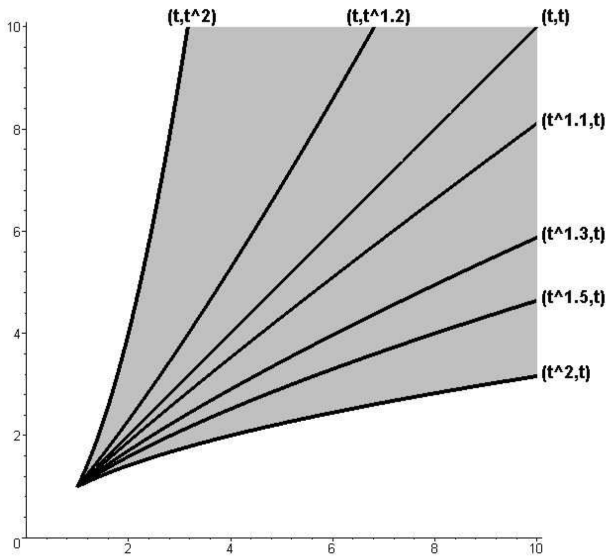


$\sigma = 2$



$\sigma = 10$

Definiert man die Menge $\mathbf{E}_\sigma := \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d : e_j \in [1, \sigma),\ \text{für } 1 \leq j \leq d, \exists i : e_i = 1\}$, so gilt $\mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$ genau dann, wenn es ein $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$ und ein $t \in \mathbb{R}^+$ mit $t \geq 1$ gibt, sodass $\mathbf{r} = t^{\mathbf{e}}$ gilt. Das folgende Diagramm zeigt grau hinterlegt den Bereich $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$ für $\sigma = 2$ und veranschaulicht die vorstehende Aussage.



Offensichtlich gilt $t = r_{\min}$. Der Vorteil ist, dass in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$ folgende Grenzwertaussagen äquivalent sind

- $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$)
- $r_{\min} \to \infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$)
- $t \to \infty,$ mit $\mathbf{r} = t^{\mathbf{e}},\ \forall \mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$.

Lemma 4.4.2. *Seien $P(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}} \mathbf{r}^{\mathbf{p}}$ und $Q(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{q}} \mathbf{r}^{\mathbf{q}}$ Polynome in $\mathbf{r}$, für die*

$$\frac{P(\mathbf{r})}{Q(\mathbf{r})} \to \infty, \ \textit{für } r_{\min} \to \infty \ (\textit{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)$$

gilt, so existiert ein $e > 0$, sodass gilt

$$\frac{P(\mathbf{r})}{Q(\mathbf{r})} > r_{\min}^e, \ \textit{für } r_{\min} \to \infty \ (\textit{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).$$

Beweis. Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{P(\mathbf{r})}{Q(\mathbf{r})} \to \infty, \ \text{für } r_{\min} \to \infty \ (\text{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).$$

Sei $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$. Betrachtet man $\mathbf{r} = t^{\mathbf{e}}$, so existieren positive Zahlen $c_P(\mathbf{e}), c_Q(\mathbf{e}), e_P(\mathbf{e})$ und $e_Q(\mathbf{e})$, sodass gilt

$$\frac{P(t^{\mathbf{e}})}{Q(t^{\mathbf{e}})} = \frac{\sum_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}} t^{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^t}}{\sum_{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{q}} t^{\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}^t}} \sim \frac{c_P(\mathbf{e}) t^{e_P(\mathbf{e})}}{c_Q(\mathbf{e}) t^{e_Q(\mathbf{e})}} = \frac{c_P(\mathbf{e})}{c_Q(\mathbf{e})} \cdot t^{e_P(\mathbf{e}) - e_Q(\mathbf{e})} \to \infty, \ \text{für } t \to \infty.$$

Das bedeutet, es gilt $e_P(\mathbf{e}) > e_Q(\mathbf{e})$. Wählt man $e := \min_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma} \frac{e_P(\mathbf{e}) - e_Q(\mathbf{e})}{2}$, so gilt für alle $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$

$$\frac{P(t^{\mathbf{e}})}{Q(t^{\mathbf{e}})} > r_{\min}^e, \ \text{für } r_{\min} \to \infty \ (\text{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma),$$

und man erhält damit die Aussage des Lemmas. □

Folgerung 4.4.3. *Sei $P(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}} \mathbf{r}^{\mathbf{p}}$ ein Polynom, für das*

$$P(\mathbf{r}) \to \infty, \ \textit{für } r_{\min} \to \infty \ (\textit{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)$$

gilt. Dann folgt

$$P(\mathbf{r}) > r_{\min}^{\frac{1}{2}}, \ \textit{für } r_{\min} \to \infty \ (\textit{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).$$

Lemma 4.4.4. *Sei $Q(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{q}} \mathbf{r}^{\mathbf{q}} \not\equiv 0$ ein reelles Polynom ohne konstanten Term. Dann gibt es 3 Möglichkeiten:*

$$\lim_{r_{\min} \to \infty \ (\textit{in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)} Q(\mathbf{r}) \begin{cases} = +\infty \\ = -\infty \\ \nexists \end{cases}$$

Beweis. Sei $\mathbf{r} = t^{\mathbf{e}}$ mit $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Dann gibt es nur zwei Fälle:

1. $Q(t^{\mathbf{e}}) \sim c \cdot t^k$, für $t \to \infty$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k \geq 1$. Somit gibt es die beiden folgenden Möglichkeiten für $t \to \infty$

$$c > 0 \Rightarrow Q(t^{\mathbf{e}}) \to +\infty$$
$$c < 0 \Rightarrow Q(t^{\mathbf{e}}) \to -\infty.$$

2. $Q(t^{\mathbf{e}}) \equiv 0$. Da aber laut Voraussetzung $Q(\mathbf{r}) \not\equiv 0$ ist, gibt es ein $\tilde{\mathbf{e}} \in \mathbf{E}_\sigma$, sodass $Q(t^{\tilde{\mathbf{e}}}) \not\equiv 0$ folgt. Für dieses $\tilde{\mathbf{e}}$ erhält man wie im ersten Fall $Q(t^{\tilde{\mathbf{e}}}) \to \pm\infty$, für $t \to \infty$. Somit existiert der Grenzwert $\lim_{r_{\min}\to\infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)} Q(\mathbf{r})$ in diesem Fall nicht.

$\square$

Satz 4.4.5. *Sei $P(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in M} b_{\mathbf{m}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ ein Polynom in $\mathbf{z}$ mit reellen Koeffizienten, wobei $b_{\mathbf{m}} \neq 0,\ \forall \mathbf{m} \in M$ gelte,*

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \mathrm{e}^{P(\mathbf{z})}$$

sei, und σ eine beliebige, fest gewählte, reelle Zahl größer 1 darstelle.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\forall \boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi,\pi]^d \setminus \mathbf{0}$ *gilt:* $\left|y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})\right| < y(\mathbf{r})$, *für $r_{\min} \to \infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$)*

(ii) $\forall \boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi,\pi]^d \setminus \mathbf{0}$ *gilt:* $y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}) = o\left(y(\mathbf{r})\right)$, *für $r_{\min} \to \infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$)*

(iii) $\forall \boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi,\pi]^d \setminus \mathbf{0}$ *gilt:* $y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}) = o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\det(B(\mathbf{r}))}}\right)$, *für $r_{\min} \to \infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$).*

(iv) $y(\mathbf{z})$ *ist H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma$.*

Beweis. Sei L_j die höchste im Polynom $P(\mathbf{z})$ auftretende Potenz von z_j, für $1 \leq j \leq d$ und $L = \max_{1\leq j\leq d} L_j$.

(i)$\Rightarrow$(ii): Laut Voraussetzung gilt für alle $\boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi,\pi]^d \setminus \mathbf{0}$

$$\frac{\left|y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})\right|}{y(\mathbf{r})} \quad = \quad \frac{\left|\mathrm{e}^{P(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})}\right|}{\mathrm{e}^{P(\mathbf{r})}} = \mathrm{e}^{\Re(P(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}))-P(\mathbf{r})} < 1, \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)$$

und somit

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}) \quad &:= \quad \Re(P(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})) - P(\mathbf{r}) \\ &= \quad \Re\left(\sum_{\mathbf{m}\in M} b_{\mathbf{m}}\mathbf{r}^{\mathbf{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{m}\boldsymbol{\vartheta}^t}\right) - P(\mathbf{r}) \\ &= \quad \sum_{\mathbf{m}\in M} b_{\mathbf{m}}\mathbf{r}^{\mathbf{m}} \qquad \underbrace{\left(\cos\left(\mathbf{m}\boldsymbol{\vartheta}^t\right) - 1\right)}_{\text{konstant, für fest gewähltes } \boldsymbol{\vartheta}} \\ &< \quad \log(1) = 0, \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma). \end{aligned}$$

Da $Q(\mathbf{r})$ ein reelles Polynom ohne konstanten Term mit $Q(\mathbf{r}) \not\equiv 0$ ist, erhält man mit Hilfe des Lemmas 4.4.4 $\lim_{r_{\min}\to\infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)} Q(\mathbf{r}) = -\infty$.
(ii)$\Rightarrow$(iii): Aus der Folgerung 4.4.3 erhält man

$$Q(\mathbf{r}) = \Re(P(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})) - P(\mathbf{r}) < -r_{\min}^{\frac{1}{2}}, \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)$$

und mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\log(\det(B(\mathbf{r}))) &= \log(\lambda_1(\mathbf{r})\cdots\lambda_d(\mathbf{r}) \\
&\leq \log\left(B_{11}(\mathbf{r})\cdots B_{dd}(\mathbf{r})\right) \\
&< \log\left(r_{\max}^{dL+1}\cdots r_{\max}^{dL+1}\right) \\
&= \log\left(r_{\max}^{d(dL+1)}\right) \\
&< \log\left(r_{\min}^{\sigma d(dL+1)}\right) \\
&= \sigma d\,(dL+1)\log r_{\min},\ \text{für } r_{\min}\to\infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma)
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\left|y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})\right|}{y(\mathbf{r})}\sqrt{\det(B(\mathbf{r}))}\right) &= \Re(P(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}))-P(\mathbf{r})+\frac{1}{2}\log(\det(B(\mathbf{r})) \\
&< -r_{\min}^{\frac{1}{2}}+\sigma d\,(dL+1)\log r_{\min}\to-\infty,\ \text{für } r_{\min}\to\infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma),
\end{aligned}$$

was die Aussage beweist.

(iii)$\Rightarrow$(i): Trivialerweise erfüllt.

$\Big($(i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Big)\Rightarrow$(iv): Es ist zu zeigen, dass die Bedingungen (I)$-$(IV) der Definition 4.2.1 erfüllt sind.

Seien o.B.d.A. $\lambda_1\leq\ldots\leq\lambda_d$ die Eigenwerte von B.

ad (I): Da $\forall\boldsymbol{\vartheta}\in[-\pi,\pi]^d\setminus\mathbf{0}$ gilt: $\left|y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})\right|<y(\mathbf{r})$, für $r_{\min}\to\infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$), folgt dass die Funktion $\left|y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})\right|$ für hinreichend großes $r_{\min}$ in $\boldsymbol{\vartheta}=\mathbf{0}$ ein lokales Maximum hat, und $B(\mathbf{r})$ somit positiv definit sein muss.
Sei $Q(\mathbf{r}):=\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t=\sum_{\mathbf{q}\in M}\beta_{\mathbf{q}}\mathbf{r}^{\mathbf{q}}$ mit einem beliebigen, aber fest gewählten $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d$ mit $\|\mathbf{h}\|=1$. Dann ist $Q(\mathbf{r})$ ein Polynom.
Sei $\mathbf{e}\in\mathbf{E}_\sigma$ und $\mathbf{r}=t^{\mathbf{e}}$. Somit gilt wie im Beweis zum Lemma 4.4.4, dass die einzig möglichen Grenzwerte von $Q(t^{\mathbf{e}})$ $\pm\infty$ und 0, für $t\to\infty$ sind. Aus der positiven Definitheit von $B(t^{\mathbf{e}})$ für $t\to\infty$ folgt, dass der Grenzwert $-\infty$ ausscheidet und $Q(t^{\mathbf{e}})\not\equiv 0$ ist.
Wäre der Grenzwert 0, dann würde

$$Q(t^{\mathbf{e}})=\sum_{\mathbf{q}\in M}\beta_{\mathbf{q}}t^{\mathbf{e}\cdot\mathbf{q}^t}\to 0 \text{ für } t\to\infty$$

gelten, was aber nur dann geht, wenn $Q(t^{\mathbf{e}})\equiv 0$ ist, womit man einen Widerspruch erhält. Somit gilt für alle $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d$ mit $\|\mathbf{h}\|=1$ und für alle $\mathbf{e}\in\mathbf{E}_\sigma$: $\mathbf{h}B(t^{\mathbf{e}})\mathbf{h}^t\to\infty$ für $t\to\infty$. Daraus folgt, für jeden Eigenwert $\lambda_j(t^{\mathbf{e}})$ von $B(t^{\mathbf{e}})$ gilt $\lambda_j(t^{\mathbf{e}})\to\infty$ für $t\to\infty$

für $1 \leq j \leq d$.

ad (II): Betrachtet man die zu $B(\mathbf{r})$ inverse Matrix $B^{-1}(\mathbf{r})$, so hat diese die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_d} \leq \cdots \leq \frac{1}{\lambda_1}$ und die Summe der Eigenwerte ist gleich der Spur von $B^{-1}(\mathbf{r})$, die mit Hilfe der Kofaktoren von $B(\mathbf{r})$ berechnen werden kann. Somit gilt

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_d} = \mathrm{Sp}(B^{-1}(\mathbf{r})) = \frac{\hat{B}_{11}(\mathbf{r}) + \cdots + \hat{B}_{dd}(\mathbf{r})}{\det(B(\mathbf{r}))} \to 0 \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).$$

Daraus folgt:

$$\lambda_1 \geq \frac{\det(B(\mathbf{r}))}{\hat{B}_{11}(\mathbf{r}) + \cdots + \hat{B}_{dd}(\mathbf{r})} \to \infty \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).$$

Da sowohl die Determinante als auch die Summe der Kofaktoren Polynome in $\mathbf{r}$ sind, kann man das Lemma 4.4.2 anwenden und erhält:

$$\lambda_1 \geq r_{\min}^e, \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma),$$

für ein geeignetes e.

Sei $\eta = r_{\min}^{-\frac{e}{3}}$ und $\delta_j := \lambda_j^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}$ mit $\epsilon < \min\left\{\frac{e}{6\sigma d(Ld+1)}, \frac{1}{3}\right\}$ für $1 \leq j \leq d$ gewählt. Dann gilt für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) = \left\{\sum_{j=1}^{d} \mu_j \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) : |\mu_j| \leq \delta_j(\mathbf{r}), 1 \leq j \leq d\right\}$

$$\|\boldsymbol{\vartheta}\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1^{-1+\epsilon} + \cdots + \lambda_d^{-1+\epsilon}} \leq \sqrt{d}\lambda_1^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} \leq \sqrt{d} r_{\min}^{e\left(-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right)} < r_{\min}^{-\frac{e}{3}} = \eta,$$

für ein hinreichend großes $r_{\min}$, da $e\left(-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right) < -\frac{e}{3}$ für $\epsilon < \frac{1}{3}$ gilt, wobei $\mathbf{v}_j(\mathbf{r})$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_j(\mathbf{r})$ von $B(\mathbf{r})$ für $1 \leq j \leq d$ sind.

Sei $Q(\mathbf{z}) := \mathbf{h}B(\mathbf{z})\mathbf{h}^t = \sum_{\mathbf{q}\in M} \beta_{\mathbf{q}} \mathbf{z}^{\mathbf{q}}$. Dann ist $Q(\mathbf{z})$ ein Polynom. Sei weiters $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$. Dann gilt

$$Q(t^{\mathbf{e}}) = \sum_{\mathbf{q}\in M} \beta_{\mathbf{q}} t^{\mathbf{e}\cdot\mathbf{q}^t} = t^L \cdot \sum_{\mathbf{q}\in T} \beta_{\mathbf{q}} + o(t^L),$$

wobei $L := \max_{\mathbf{q}\in M} e_1 q_1 + \cdots e_d q_d$ und T eine Teilmenge von M sei.
Das heißt

$$Q(t^{\mathbf{e}}) \sim \tilde{c}(\mathbf{e}) \cdot t^L, \text{ für } t \to \infty.$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} Q(t^{e_1} + 2\eta t^{e_d}, \ldots, t^{e_d} + 2\eta t^{e_d}) &= Q\left(t^{\mathbf{e}}(1+2\eta)\right) \\ &\sim \bar{c}(\mathbf{e}) \cdot t^L \\ &= c(\mathbf{e}) \cdot \left(\tilde{c}(\mathbf{e}) \cdot t^L\right), \text{ für } t \to \infty, \end{aligned}$$

mit $c(\mathbf{e}) := \frac{\bar{c}(\mathbf{e})}{\tilde{c}(\mathbf{e})}$.
Bildet man

$$C := \max_{\mathbf{e}\in\mathbf{E}_\sigma} c(\mathbf{e}),$$

so gilt damit für alle $\mathbf{e} \in \mathbf{E}_\sigma$

$$Q\left(t^{\mathbf{e}}(1+2\eta)\right) \leq C \cdot Q(t^{\mathbf{e}}),\ \text{für } t \to \infty,$$

und somit

$$Q(\mathbf{r}(1+2\eta)) \leq C \cdot Q(\mathbf{r}),\ \text{für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).$$

Nun sind die Bedingungen für das Lemma 4.3.7 erfüllt und es gilt

$$|\varepsilon(\mathbf{r},\boldsymbol{\vartheta})| \;\leq\; \frac{C\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|}{2\eta}$$

und damit für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\vartheta}\in\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})} |\varepsilon(\mathbf{r},\boldsymbol{\vartheta})| &= \max_{\boldsymbol{\vartheta}\in\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})} \frac{\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t \cdot \|\boldsymbol{\vartheta}\|}{2\eta} \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{(\lambda_1^\epsilon + \cdots + \lambda_d^\epsilon)\cdot \lambda_1^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}}{\eta}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{\lambda_d^\epsilon \cdot \lambda_1^{-\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}}{\eta}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{(\det(B(\mathbf{r})))^\epsilon \cdot \lambda_1^{-\frac{1}{2}}}{\eta}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{\left(r_{\max}^{d(Ld+1)}\right)^\epsilon \cdot r_{\min}^{-\frac{e}{2}}}{r_{\min}^{-\frac{e}{3}}}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(r_{\min}^{\sigma d(Ld+1)\epsilon} \cdot r_{\min}^{-\frac{e}{2}} \cdot r_{\min}^{\frac{e}{3}}\right) \to 0 \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma),
\end{aligned}$$

da $\epsilon < \frac{e}{6\sigma d(Ld+1)}$ gewählt wurde.

ad (III): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det\left(B(\mathbf{r})\right)} &\leq (r_{\max})^{\frac{d(Ld+1)}{2}} \\
&< (r_{\min})^{\frac{\sigma d(Ld+1)}{2}} \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{2}\left(r_{\min}^e\right)^\epsilon\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_1^\epsilon\right),\ \text{für } r_{\min} \to \infty
\end{aligned}$$

und somit folgt am Rand von $\mathbf{\Delta}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\vartheta}\in\partial\mathbf{\Delta}(\mathbf{r})} \frac{\left|y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right|}{y(\mathbf{r})} &\sim \max_{\boldsymbol{\vartheta}\in\partial\mathbf{\Delta}(\mathbf{r})} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\delta_1(\mathbf{r})\mathbf{v}_1(\mathbf{r})\right)B(\mathbf{r})\left(\delta_1(\mathbf{r})\mathbf{v}_1(\mathbf{r})\right)^t\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\delta_1^2(\mathbf{r})\lambda_1(\mathbf{r})\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_1^{\epsilon}\right) \\
&< \frac{1}{\sqrt{\det\left(B(\mathbf{r})\right)}} \to 0, \text{ für } r_{\min} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma).
\end{aligned}$$

Nimmt man an, dass es außerhalb von $\mathbf{\Delta}(\mathbf{r})$ ein $\boldsymbol{\vartheta}_0$ mit $y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}_0}\right) \neq o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{det(B(\mathbf{r}))}}\right)$ gibt, so erhält man einen Widerspruch zur Voraussetzung.

ad (IV): Da $a_j(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{m}\in M} m_j b_{\mathbf{m}}\mathbf{r}^{\mathbf{m}}$ und $B_{jj}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{m}\in M} m_j^2 b_{\mathbf{m}}\mathbf{r}^{\mathbf{m}}$ gilt, ist die Bedingung offensichtlich erfüllt.

(iv)⇒(i): Das ist eine direkte Folgerung aus dem Satz 4.2.4. □

Folgerung 4.4.6. *Sei $P(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N b_{\mathbf{m}_i}\mathbf{z}^{\mathbf{m}_i}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, wobei $b_{\mathbf{m}_i} > 0$, für $1 \leq i \leq N$ gelte. Sei*

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = e^{P(\mathbf{z})}$$

wobei σ eine beliebige, fest gewählte, reelle Zahl größer 1 sei.

Dann ist $y(\mathbf{z}) = y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})$ genau dann H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$, wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1\boldsymbol{\vartheta}^t &\equiv 0 \mod (2\pi) \\
\mathbf{m}_2\boldsymbol{\vartheta}^t &\equiv 0 \mod (2\pi) \\
&\vdots \\
\mathbf{m}_N\boldsymbol{\vartheta}^t &\equiv 0 \mod (2\pi)
\end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $\boldsymbol{\vartheta} \equiv \mathbf{0} \mod (2\pi)$ besitzt.

Beweis. Da die Koeffizienten von $P(\mathbf{z})$ alle positiv sind, sind alle Koeffizienten von $y(\mathbf{z})$ größer oder gleich 0. Das heißt, für alle $\boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi, \pi]^d$ gilt

$$\left|y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right| \leq y(\mathbf{r}).$$

Laut dem vorhergehenden Satz ist es für die Admissibilität notwendig und hinreichend, dass es kein $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in [-\pi, \pi]^d \setminus \mathbf{0}$ gibt, für das $|y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}_0})| = y(\mathbf{r})$ gilt.
Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned}
\left|y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right| &= \exp\left(\Re\left(P\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\Re\left(\sum_{i=i}^{N} b_{\mathbf{m}_i}\mathbf{r}^{\mathbf{m}_i}e^{i\mathbf{m}_i\boldsymbol{\vartheta}^t}\right)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{i=i}^{N} b_{\mathbf{m}_i}\mathbf{r}^{\mathbf{m}_i}\cos\left(\mathbf{m}_i\boldsymbol{\vartheta}^t\right)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{i=i}^{N} b_{\mathbf{m}_i}\mathbf{r}^{\mathbf{m}_i}\right)\\
&= y(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

ist, also genau dann, wenn

$$\cos(\mathbf{m}_i\boldsymbol{\vartheta}^t) = 1,\ \text{für } 1 \le i \le N$$

oder äquivalent dazu

$$\mathbf{m}_i\boldsymbol{\vartheta}^t \equiv 0 \mod (2\pi),\ \text{für } 1 \le i \le N$$

gilt. □

4.5 Abgeschlossenheitsbedingungen

Satz 4.5.1. *Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Dann ist auch $e^{y(\mathbf{z})}$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{\mathcal{W}}(\mathbf{r}) = \left\{\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{\vartheta}\|_{\max} \le y(\mathbf{r})^{-\frac{2}{5}}\right\}$, $\boldsymbol{\mathcal{W}}_\epsilon(\mathbf{r}) = \left\{\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{\vartheta}\|_{\max} \le y(\mathbf{r})^{-\frac{2}{5}-\epsilon}\right\}$ für ein $\epsilon > 0$, $Y(\mathbf{z}) = e^{y(\mathbf{z})}$, $\bar{\mathbf{a}}$ der Vektor der ersten und $\bar{B}$ die Matrix der zweiten logarithmischen Ableitung von $e^{y(\mathbf{z})}$. Dann folgt für alle $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}(\mathbf{r})$ laut Lemma 4.3.8

$$\log Y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}) = \log Y(\mathbf{r}) + i\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}\bar{B}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t + \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{-\frac{1}{5}}\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|^3\right).$$

Somit gilt $y(\mathbf{r})^{-\frac{1}{5}}\|\mathbf{a}(\mathbf{r})\|^3 \to 0$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) nach Lemma 4.3.2, was die Bedingung (II) für alle $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}(\mathbf{r})$ garantiert. Speziell ist die Bedingung für den, in $\boldsymbol{\mathcal{W}}(\mathbf{r})$ eingeschriebenen Würfel $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$, der parallel zu den Richtungen der Eigenvektoren von $B(\mathbf{r})$ liegt, erfüllt. Für hinreichend großes $\mathbf{r}$ gilt $\boldsymbol{\mathcal{W}}_\epsilon(\mathbf{r}) \subseteq \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$. Mit Hilfe von $\bar{B}_{jk}(\mathbf{r}) \sim y(\mathbf{r})a_j(\mathbf{r})a_k(\mathbf{r})$ und dem Lemma 4.3.9 erhält man für $\boldsymbol{\vartheta} \notin \boldsymbol{\mathcal{W}}_\epsilon$

$$|Y(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}| \le Y(\mathbf{r})\exp\left(-y(\mathbf{r})^{\frac{1}{7}}\right) \le Y(\mathbf{r})\exp\left(-\left(\det\bar{B}(\mathbf{r})\right)^{\frac{1}{7d}}\right).$$

Daraus folgt Bedingung (III).

Beachtet man, dass $\bar{B}(\mathbf{r}) = y(\mathbf{r}) \cdot (B(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(\mathbf{r})^t \mathbf{a}(\mathbf{r}))$ gilt und $\mathbf{a}^t\mathbf{a}$ eine positiv semidefinite Matrix vom Rang 1 mit den Eigenwerten 0 und $\|\mathbf{a}\|^2$ ist, so folgt, dass der kleinste Eigenwert $\lambda_{\min}(\bar{B}(\mathbf{r}))$ von $\bar{B}(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\bar{B}(\mathbf{r})) &= \min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h}\bar{B}(\mathbf{r})\mathbf{h}^t \\
&\geq y(\mathbf{r}) \left(\min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t + \min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h} \left(\mathbf{a}(\mathbf{r})^t\mathbf{a}(\mathbf{r})\right) \mathbf{h}^t \right) \\
&\geq y(\mathbf{r}) \left(\min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^d:\|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t \right) \\
&= y(\mathbf{r})\lambda_{\min}(B(\mathbf{r})) \to \infty, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}
\end{aligned}$$

erfüllt, und somit (I) gilt. Es gilt für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$)

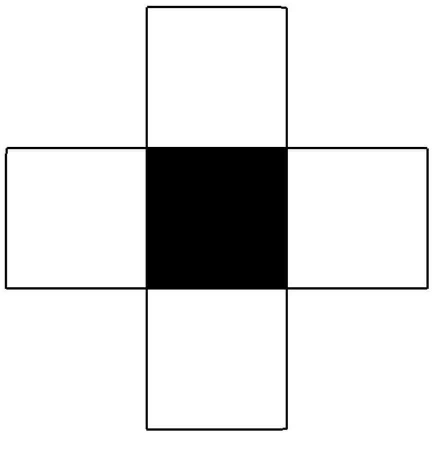
$$\bar{B}_{jj}(\mathbf{r}) = y(\mathbf{r}) \cdot \left(B_{jj}(\mathbf{r}) + a_j^2(\mathbf{r})\right) \sim y(\mathbf{r}) \cdot a_j(\mathbf{r})^2 = o\left(y(\mathbf{r})^2 \cdot a_j(\mathbf{r})^2\right) = o\left(\bar{a}_j(\mathbf{r})^2\right),$$

womit auch (IV) gezeigt ist. □

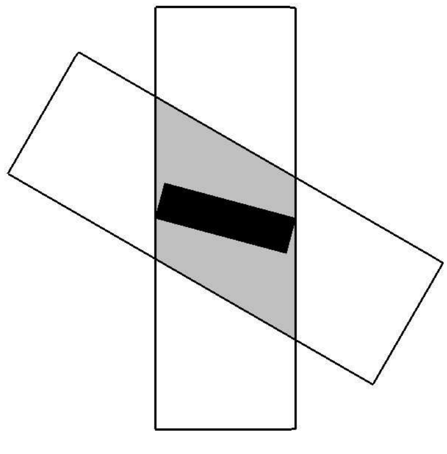
Satz 4.5.2. *Seien $y_1(\mathbf{z})$ und $y_2(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und C eine Konstante, für die* $\det(B_1(\mathbf{r})+B_2(\mathbf{r})) \leq C \min\{\det B_1(\mathbf{r}), \det B_2(\mathbf{r})\}$ *gelte. Seien weiters die Eigenrichtungen von $B_1(\mathbf{r})$ und $B_2(\mathbf{r})$ gleich. Dann ist auch $y(\mathbf{z}) = y_1(\mathbf{z}) \cdot y_2(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.*

Beweis. Die logarithmischen Ableitungen von $y(\mathbf{z})$ sind $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{r})$ und $B(\mathbf{r}) = B_1(\mathbf{r}) + B_2(\mathbf{r})$. Daraus folgen direkt die Bedingungen (I) und (IV).

Die folgenden Bilder skizzieren den den Unterschied zwischen den beiden Fällen, wo die Eigenrichtungen gleich beziehungsweise unterschiedlich sind. Seien dazu $\boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r})$ beziehungsweise $\boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})$ die Bereiche in denen für $y_1(\mathbf{z})$ beziehungsweise $y_2(\mathbf{z})$ die Bedingungen (II) und (III) erfüllt sind.



gleiche Eigenrichtungen



unterschiedliche Eigenrichtungen

Sind nun die Eigenrichtungen von $B_1(\mathbf{r})$ und $B_2(\mathbf{r})$ gleich, so hat auch $B(\mathbf{r})$ die selben Eigenrichtungen und man kann für $y(\mathbf{z})$ $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r}) \cap \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})$ wählen, womit die Bedingung (II) gilt.
Sei $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r})$ und $\boldsymbol{\vartheta} \notin \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right| &= \left|y_1\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) \cdot y_2\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right)\right| \\
&= o\left(y_1(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\vartheta} B_1(\mathbf{r}) \boldsymbol{\vartheta}^t}{2}\right) \cdot \frac{y_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\det B_2(\mathbf{r})}}\right) \\
&= o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\det B_2(\mathbf{r})}}\right) \\
&= o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\min\{\det B_1(\mathbf{r}), \det B_2(\mathbf{r})\}}}\right) \\
&= o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\det(B_1(\mathbf{r}) + B_2(\mathbf{r}))}}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).
\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis liefert der Fall $\boldsymbol{\vartheta} \notin \boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r})$ und $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})$.
Für $\boldsymbol{\vartheta} \notin \boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r})$ und $\boldsymbol{\vartheta} \notin \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})$ ist der Fall trivial. Somit gilt auch die Bedingung (III). $\square$

Bemerkung 4.5.3. Sind im vorhergehenden Satz die Eigenrichtungen unterschiedlich, dann sieht man im rechten Bild, dass es keinen Quader $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ (im Bild schwarz dargestellt) gibt, sodass $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r}) \cap \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})$ gilt. Somit ist der Bereich $(\boldsymbol{\Delta}_1(\mathbf{r}) \cap \boldsymbol{\Delta}_2(\mathbf{r})) \setminus \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ (im Bild grau dargestellt) nicht leer. Somit gilt in diesem Bereich die Bedingung (III) im Allgemeinen nicht.
Die Potenzen von H-admissiblen Funktionen sind immer H-admissible, da in diesem Fall die die Bedingungen des Satzes sicher erfüllt sind.

Satz 4.5.4. *Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und $p(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{p} \in M} b_{\mathbf{p}} \mathbf{z}^{\mathbf{p}}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, für das für alle $b_{\mathbf{p}} \in M$ mit $b_{\mathbf{p}} < 0$ folgt, dass es ein $\mathbf{m} \in M$ gibt, für dass $b_{\mathbf{m}} > 0$ ist, mit $\mathbf{p} \lneqq \mathbf{m}$. Dann ist $y(\mathbf{z}) \cdot p(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.*

Beweis. Seien $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$ und $\bar{B}(\mathbf{z})$ für $y(\mathbf{z}) \cdot p(\mathbf{z})$, $\mathbf{a}(\mathbf{z})$ und $B(\mathbf{z})$ für $y(\mathbf{z})$ und $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$ und $\tilde{B}(\mathbf{z})$ für $p(\mathbf{z})$ die Vektoren der ersten und die Matrizen der zweiten logarithmischen Ableitungen. Dann gilt

$$\tilde{a}_j(\mathbf{r}) = r_j \frac{p_{r_j}(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})},$$

sowie

$$\tilde{B}_{jj}(\mathbf{r}) = r_j \frac{p_{r_j}(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})} + r_j^2 \left(\frac{p_{r_j r_j}(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})} - \frac{p_{r_j}(\mathbf{r})^2}{p(\mathbf{r})^2}\right)$$

und für $j \neq k$

$$\tilde{B}_{jk}(\mathbf{r}) = r_j r_k \left(\frac{p_{r_j r_k}(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})} - \frac{p_{r_j}(\mathbf{r}) p_{r_k}(\mathbf{r})}{p(\mathbf{r})^2} \right).$$

Die Bedingungen die an das Polynom $p(\mathbf{z})$ gestellt werden, garantieren, dass $\frac{p(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})}{p(\mathbf{r})}$ für $\boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi, \pi]^d$, $\tilde{a}_j(\mathbf{r})$ und $\tilde{B}_{jk}(\mathbf{r})$ für $1 \leq j, k \leq d$ für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) beschränkt bleiben. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(\bar{B}(\mathbf{r})) &= \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{h}\|=1} \mathbf{h}\bar{B}(\mathbf{r})\mathbf{h}^t \\
&= \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{h}\|=1} \left(\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t + \mathbf{h}\tilde{B}(\mathbf{r})\mathbf{h}^t \right) \\
&= \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{h}\|=1} \left(\mathbf{h}B(\mathbf{r})\mathbf{h}^t + \mathcal{O}(1) \right) \\
&= \lambda_{\min}(B(\mathbf{r})) + \mathcal{O}(1) \to \infty, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty},
\end{aligned}$$

woraus die Bedingung (I) folgt.
Sei $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ der Quader aus der Definition, für den $y(\mathbf{z})$ die Bedingungen (II) und (III) erfülle. Da $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) \to \mathbf{0}$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) nach Bemerkung 4.2.3 gilt, folgt dass

$$\frac{\left| p\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) \right|}{p(\mathbf{r})} \sim 1, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),$$

gleichmäßig für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ gilt.
Damit folgt

$$y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) \cdot p\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) \sim y(\mathbf{r}) \exp\left(i\mathbf{a}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}B(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t \right) \cdot p(\mathbf{r}), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),$$

gleichmäßig für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$.
Für $\boldsymbol{\vartheta} \notin \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$ bleibt der Ausdruck $\frac{p(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}})}{p(\mathbf{r})}$ beschränkt,

$$\frac{\left| y\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) p\left(\mathbf{r}e^{i\boldsymbol{\vartheta}}\right) \right|}{y(\mathbf{r})\, p(\mathbf{r})} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\det B(\mathbf{r})}} \right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}})$$

Für die Gültigkeit der Bedingungen (II) und (III) ist nun nur mehr zu zeigen, das die beiden vorangegangenen asymptotischen Relationen ihre Gültigkeit behalten, wenn man $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ durch $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r})$ und $B(\mathbf{r})$ durch $\bar{B}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}) + \tilde{B}(\mathbf{r})$ ersetzt. Das ist aber trivialerweise erfüllt, da alle Einträge von $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r})$ und $\tilde{B}(\mathbf{r})$ endlich sind. Aus dem selben Argument folgt die Gültigkeit der Bedingung (IV). $\square$

Satz 4.5.5. *Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und $f(\mathbf{z})$ eine analytische Funktion in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Sei weiters $f(\mathbf{r})$ reell, für alle $\mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ und es existiere ein $\delta > 0$, sodass*

$$\max_{|z_j|=r_j, 1 \leq j \leq d} |f(\mathbf{z})| = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1-\delta} \right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}})$$

gilt. Dann ist $y(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Beweis. Seien $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$ und $\bar{B}(\mathbf{z})$ für $y(\mathbf{z})+f(\mathbf{z})$, $\mathbf{a}(\mathbf{z})$ und $B(\mathbf{z})$ für $y(\mathbf{z})$ und $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$ und $\tilde{B}(\mathbf{z})$ für $f(\mathbf{z})$ die Vektoren der ersten und die Matrizen der zweiten logarithmischen Ableitungen. Sei in diesem Beweis $1 \le j,k \le d$ mit $j \ne k$.

Sei $|z_j - r_j| \le \frac{r_j}{a_j(\mathbf{r})}$. Dann erhält man mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung und des Lemmas 4.3.2

$$\begin{aligned}
|f_j(\mathbf{r})| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z_j - r_j| = \frac{r_j}{a_j(\mathbf{r})}} \frac{f(r_1, \ldots, r_{j-1}, z_j, r_{j+1}, \ldots, r_d)}{z_j^2} \mathrm{d}z_j \right| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{a_j(\mathbf{r})}{r_j} \cdot \ y(\mathbf{r})^{1-\delta} \right) \\
&= \frac{1}{r_j} \cdot \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1-\frac{\delta}{2}} \right),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
|f_{jj}(\mathbf{r})| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z_j - r_j| = \frac{r_j}{a_j(\mathbf{r})}} \frac{f(r_1, \ldots, r_{j-1}, z_j, r_{j+1}, \ldots, r_d)}{z_j^3} \mathrm{d}z_j \right| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{a_j(\mathbf{r})^2}{r_j^2} \cdot y(\mathbf{r})^{1-\delta} \right) \\
&= \frac{1}{r_j^2} \cdot \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1-\frac{\delta}{2}} \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&|f_{jk}(\mathbf{r})| \\
&= \left| \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{|z_j - r_j| = \frac{r_j}{a_j(\mathbf{r})}} \int_{|z_k - r_k| = \frac{r_k}{a_k(\mathbf{r})}} \frac{f(r_1, \ldots, r_{j-1}, z_j, r_{j+1}, \ldots, r_{k-1}, z_k, r_{k+1}, \ldots, r_d)}{z_j^2 z_k^2} \mathrm{d}z_j \mathrm{d}z_k \right| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{a_j(\mathbf{r})}{r_j} \cdot \frac{a_k(\mathbf{r})}{r_k} \cdot y(\mathbf{r})^{1-\delta} \right) \\
&= \frac{1}{r_j} \cdot \frac{1}{r_k} \cdot \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1-\frac{\delta}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Aus Satz 4.3.6 und Lemma 4.3.2 folgt

$$y_j(\mathbf{r}) \sim \frac{a_j(\mathbf{r})}{r_j} \cdot y(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_j} \cdot \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1+\frac{\delta}{4}} \right),$$

sowie

$$y_{jj}(\mathbf{r}) \sim \frac{a_j(\mathbf{r})^2}{r_j^2} \cdot y(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_{jj}} \cdot \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1+\frac{\delta}{4}} \right)$$

und

$$y_{jk}(\mathbf{r}) \sim \frac{a_j(\mathbf{r})}{r_j} \cdot \frac{a_k(\mathbf{r})}{r_k} \cdot y(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_j r_k} \cdot \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1+\frac{\delta}{4}} \right).$$

Seien im folgenden die Variablen der Funktionen immer $(\mathbf{r})$. Zur besseren Übersichtlichkeit werden sie weggelassen, dass heißt es sei $y = y(\mathbf{r}),\ \ldots$

Aus $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\tilde{B}(\mathbf{r}) = \bar{B}(\mathbf{r}) - B(\mathbf{r})$ und den eben gezeigten asymptotischen Relationen folgt nun

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_j &= r_j \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\ln(y+f) - \ln(y)\right) \\
&= \frac{r_j y f_j - r_j y_j f}{y(y+f)} \\
&= \frac{\mathcal{O}\left(y^{2-\frac{\delta}{2}}\right)}{\mathcal{O}\left(y^2\right)} \\
&= \mathcal{O}\left(y^{-\frac{\delta}{2}}\right),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{jj} &= r_j \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\ln(y+f) - \ln(y)\right)\right) \\
&= \frac{\circledast_1}{y^2(y+f)^2} \\
&= \frac{\mathcal{O}\left(y^{4-\frac{\delta}{2}}\right)}{\mathcal{O}\left(y^4\right)} \\
&= \mathcal{O}\left(y^{-\frac{\delta}{2}}\right)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\circledast_1 &= r_j^2(y^3 f_{jj} + y^2 f f_{jj} + 2y y_j^2 f + y_j^2 f^2 - y^2 y_{jj} f - 2y^2 y_j f_j - y^2 f_j^2 - y y_{jj} f^2) \\
&+ r_j(y^3 f_j + y^2 f f_j - y^2 y_j f - y y_j f^2) \\
&= \mathcal{O}\left(y^{4-\frac{\delta}{2}}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{jk} &= r_k \cdot \frac{\partial}{\partial r_k} \left(r_j \cdot \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\ln(y+f) - \ln(y)\right)\right) \\
&= \frac{\circledast_2}{y^2(y+f)^2} \\
&= \frac{\mathcal{O}\left(y^{4-\frac{\delta}{2}}\right)}{\mathcal{O}\left(y^4\right)} \\
&= \mathcal{O}\left(y^{-\frac{\delta}{2}}\right)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\circledast_2 &= r_j r_k(y^3 f_{jk} + y^2 f f_{jk} + 2y y_j y_k f + y_j y_k f^2 - y^2 y_{jk} f - y^2 y_k f_j - y^2 y_j f_k - y^2 f_j f_k - y y_{jk} f^2) \\
&= \mathcal{O}\left(y^{4-\frac{\delta}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\bar{a}_j(\mathbf{r}) = a_j(\mathbf{r}) + \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{-\frac{\delta}{2}}\right),$$

sowie

$$\bar{B}_{jj}(\mathbf{r}) = B_{jj}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{-\frac{\delta}{2}}\right)$$

und

$$\bar{B}_{jk}(\mathbf{r}) = B_{jk}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{-\frac{\delta}{2}}\right),$$

und die Bedingungen (I)-(IV) gelten offensichtlich. □

Satz 4.5.6. *Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\mathcal{C}$. Ist $p(\mathbf{z})$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so ist auch $y(\mathbf{z}) + p(\mathbf{z})$ H-admissible in $\mathcal{C}$. Ist $q(z)$ ein univariates Polynom mit reellen Koeffizienten und positiven Leitkoeffizienten, so ist auch $q(y(\mathbf{z}))$ H-admissible in $\mathcal{C}$.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt aus Satz 4.5.4 und der zweite ist eine direkte Konsequenz der Bemerkung 4.5.3. □

4.6 Beispiele für H-admissible Funktionen

In den folgenden Beispielen sei $z = re^{i\varphi}$, $u = se^{i\vartheta}$, und (h,k) ein Vektor mit $\|(h,k)\| = 1$. Zur Vereinfachung gelte $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r,s)$, $B = B(r,s)$, $\lambda_1 = \lambda_1(r,s)$, $\lambda_2 = \lambda_2(r,s)$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(r,s)$ und $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(r,s)$, wo es für die Übersichtlichkeit besser ist.

Im bivariaten Fall haben die auftretenden Matrizen für B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man

$$\det B = \alpha\gamma - \beta^2$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{\alpha + \gamma + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\gamma + 4\beta^2 + \gamma^2}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4}} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha\gamma}{2} + \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ &= \sqrt{\det B + \mathcal{D}} + \sqrt{\mathcal{D}}, \end{aligned}$$

wenn man $\mathcal{D} = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha\gamma}{2} + \beta^2 + \frac{\gamma^2}{4}$ setzt. Analog erhält man

$$\lambda_1 = \sqrt{\det B + \mathcal{D}} - \sqrt{\mathcal{D}} = \frac{\det B}{\lambda_2} = \frac{\det B}{\sqrt{\det B + \mathcal{D}} + \sqrt{\mathcal{D}}}.$$

4.6.1 Permutationen mit beschränkter Zyklenlänge

Permutationen mit einer Zyklenlänge von höchstens ℓ können durch die erzeugende Funktion

$$y(z,u) = \exp\left(u \sum_{i=1}^{\ell} \frac{z^i}{i}\right)$$

beschrieben werden. Da dieser Exponent ein Polynom ist, erhält man mit Hilfe der Folgerung 4.4.6 für $\ell \geq 2$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vartheta_1 + 1 \cdot \vartheta_2 &\equiv 0 \mod (2\pi) \\ 1 \cdot \vartheta_1 + 2 \cdot \vartheta_2 &\equiv 0 \mod (2\pi) \\ &\vdots \end{aligned}$$

und es gilt nach Umformung

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vartheta_1 \qquad\quad &\equiv 0 \mod (2\pi) \\ 1 \cdot \vartheta_2 &\equiv 0 \mod (2\pi) \\ &\vdots \end{aligned}$$

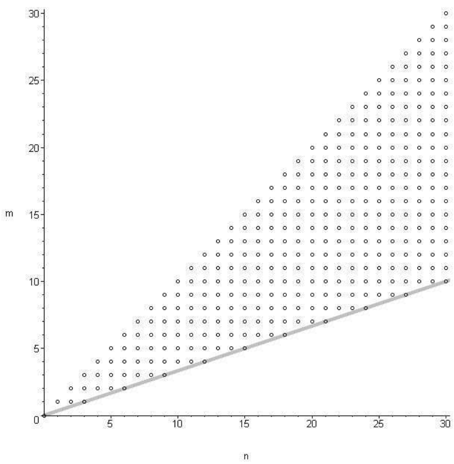
woraus folgt, dass $y(z,u)$ für $\ell \geq 2$ in $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma$ für $\sigma > 1$ (aus Bedingung 4.4.1) H-admissible ist.
Setzt man

$$\mathbf{a}(r,s) = s\left(\sum_{i=1}^{\ell} r^i, \sum_{i=1}^{\ell} \frac{r^i}{i}\right) = (n,m),$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} sr^\ell &\sim n \\ s\frac{r^\ell}{\ell} &\sim m \end{aligned}\right\} \Rightarrow sr^\ell \sim n \sim m\ell.$$

Das bedeutet, dass asymptotisch nur auf der Gerade $n = m\ell$ Lösungen für r und s existieren, die aber nicht eindeutig sind.
Das folgende Diagramm zeigt für $\ell = 3$ diese Gerade (grau hinterlegt) und die Punkte (n,m), für die $[z^n u^m]y(z,u) > 0$ gilt.



4.6.2 Partitionen einer Menge mit beschränkter Blockgröße

Sei $\mathcal{S}$ eine Menge geordneter d-Tupel von nichtnegativen ganzen Zahlen ohne $\mathbf{0}$ und seien $A_1, \ldots, A_d$ disjunkte Mengen der Größen $n_1, \ldots, n_d$. Definiert man $y_{\mathbf{n}}$ als die Anzahl der Partitionen π von $\bigcup_{j=1}^{d} A_j$, sodass für jeden Block $\mathcal{B} \in \pi$

$$(|\mathcal{B} \cap A_1|, \ldots, |\mathcal{B} \cap A_d|) \in \mathcal{S}$$

gilt, dann ist die erzeugende Funktion gegeben durch

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} = \exp\left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{S}} \frac{\mathbf{z}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!} \right).$$

Als spezielles Beispiel sei die Blockgröße mit 2 beschränkt. Dann gilt

$$y(\mathbf{z}) = \exp\left(z_1 + \cdots + z_d + \frac{(z_1 + \cdots + z_d)^2}{2} \right).$$

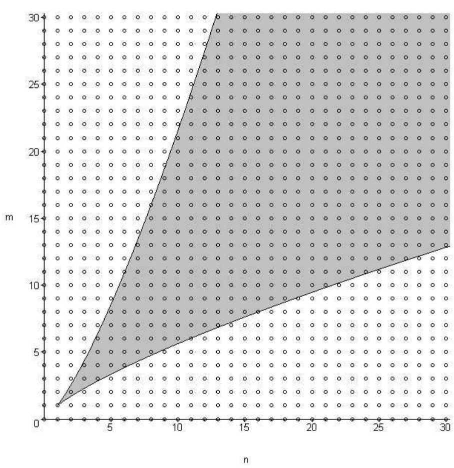
$y(\mathbf{z})$ erfüllt die Bedingungen der Folgerung 4.4.6 und ist somit in $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma$ für $\sigma > 1$ (aus Bedingung 4.4.1) H-admissible.
Sei $r_{\max} = r_{\min}^{\sigma}$. Dann folgt für die Gleichung

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) \sim \sum_{j=1}^{d} r_j \cdot (r_1, \ldots, r_d) = \mathbf{n}$$

$n_{min} \sim r_{\min} \cdot r_{\max} = r_{\min}^{\sigma+1}$ und $n_{\max} \sim r_{\max}^2 = r_{\min}^{2\sigma}$. Somit ist die Gleichung für die Menge

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}_\sigma := \left\{ \mathbf{n} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^d : (n_{\min})^{\frac{2\sigma}{\sigma+1}} > n_{\max} \right\}$$

asymptotisch lösbar.
Das folgende Diagramm zeigt (grau hinterlegt) $\boldsymbol{\mathcal{N}}_\sigma$ für den bivariaten Fall mit $\sigma = 2$ und die Punkte (n, m), für die $[z_1^n z_2^m] y(z_1, z_2) > 0$ gilt.



4.6.3 Stirlingzahlen 2. Art

Die erzeugende Funktion für die Stirlingzahlen 2. Art ist gegeben durch

$$y(z,u) = \exp\left(u\left(\mathrm{e}^z - 1\right)\right).$$

Die erste und zweite logarithmische Ableitung sind gegeben durch

$$\mathbf{a}(r,s) = s\left(r\mathrm{e}^r, \mathrm{e}^r - 1\right)$$

und

$$B(r,s) = s\begin{pmatrix} r^2\mathrm{e}^r + r\mathrm{e}^r & r\mathrm{e}^r \\ r\mathrm{e}^r & \mathrm{e}^r - 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante von B und für $\mathcal{D}$ erhält man

$$\det B = r\mathrm{e}^{2r}s^2 - r^2\mathrm{e}^r s^2 - r\mathrm{e}^r s^2 \sim r\mathrm{e}^{2r}s^2$$

und

$$\mathcal{D} = \frac{1}{4}\left(r^4\mathrm{e}^{2r} + 2r^3\mathrm{e}^{2r} + 3r^2\mathrm{e}^{2r} - 2r\mathrm{e}^{2r} + \mathrm{e}^{2r} + 2r^2\mathrm{e}^r + 2r\mathrm{e}^r - 2\mathrm{e}^r + 1\right)s^2 \sim \left(\frac{1}{2}r^2\mathrm{e}^r s\right)^2.$$

Daraus folgt

$$\lambda_2 \sim 2\sqrt{\mathcal{D}} \sim r^2\mathrm{e}^r s$$

und

$$\lambda_1 \sim \frac{\det B}{2\sqrt{\mathcal{D}}} \sim \frac{r\mathrm{e}^{2r}s^2}{r^2\mathrm{e}^r s} = \frac{\mathrm{e}^r s}{r}$$

Für $r, s \to \infty$ gilt $\lambda_1, \lambda_2 \to \infty$ und B ist positiv definit und somit ist die Bedingung (I) erfüllt. Die Bedingung (IV) ist offensichtlich auch erfüllt.
Sei $\mathbf{\Delta}(r,s) = \left\{\mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_1\mathbf{v}_2 : |\mu_j| \le \lambda_j^{-\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}}, j = 1,2\right\}$ für $\rho > 0$ ein Rechteck, das parallel zu den Richtungen der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ der Eigenwerte λ_j für $j = 1,2$ liege.
Es gilt nun

$$\begin{aligned}(h,k)B(r,s)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} &= s\left((hr+k)^2\mathrm{e}^r + h^2r\mathrm{e}^r - k^2\right) \\ &\sim s\left((hr+k)^2\mathrm{e}^r + h^2r\mathrm{e}^r\right).\end{aligned}$$

Da $(hr+k)^2$ und h^2 größer oder gleich 0 sind, folgt für alle $(\varphi,\vartheta) \in [-\pi,\pi]^2$ und damit speziell für alle $(\varphi,\vartheta) \in \mathbf{\Delta}(r,s)$

$$(h,k)B\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \le 1 \cdot (h,k)B(r,s)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Somit sind mit $C = 1$ und $\eta = \lambda_1^{-\frac{1}{4}+\rho}$ die Bedingungen für den Lemma 4.3.7 erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}
\varepsilon(r,s;\varphi,\vartheta) &\leq \frac{1\cdot\left(\lambda_1^\rho+\lambda_2^\rho\right)\lambda_1^{-\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}}}{2\lambda_1^{-\frac{1}{4}+\frac{\rho}{2}}} \\
&= \mathcal{O}\left(\left(\lambda_1^\rho+\lambda_2^\rho\right)\lambda_1^{-\frac{1}{4}}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\left(\left(\frac{\mathrm{e}^r s}{r}\right)^\rho+\left(r^2\mathrm{e}^r s\right)^\rho\right)\left(\frac{\mathrm{e}^r s}{r}\right)^{-\frac{1}{4}}\right)\to 0,\ \text{für } r,s\to\infty,
\end{aligned}$$

für hinreichend kleines ρ. Somit gilt Bedingung (II).
Für die Bedingung (III) ist zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\left|y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right|\frac{\sqrt{\det B}}{y(r,s)} \\
&= \exp\left(\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\Re\left(\log y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right)\right)\frac{\sqrt{\det B}}{y(r,s)} \\
&= \exp\left(\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\Re\left(\log y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right)-\log y(r,s)+\frac{1}{2}\log\left(\det B\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\left(\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}-(\varphi,\vartheta)B(\varphi,\vartheta)^t+\log\left(\det B\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\left(-\lambda_1^\rho+\log(\det B)\right)\right) \\
&= o\left(1\right),\ \text{für } r,s\to\infty\ (\text{in } \boldsymbol{\mathcal{R}})
\end{aligned}$$

gilt.
Für die Stirlingzahlen 2. Art gilt somit

$$-\lambda_1^\rho+\log(\det B)\ \sim\ -\left(\frac{\mathrm{e}^r s}{r}\right)^\rho+\log\left(r\mathrm{e}^{2r}s^2\right)\to-\infty,\ \text{für } r,s\to\boldsymbol{\infty}.$$

Außerhalb von $\boldsymbol{\Delta}(r,s)$ gilt

$$\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\left|y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})\right|>\max_{(\varphi,\vartheta)\notin\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\left|y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})\right|.$$

Somit ist die Bedingung (III) erfüllt, und es gilt in diesem Fall $\boldsymbol{\mathcal{R}}=\left(\mathbb{R}^+\right)^2$ und $\boldsymbol{\mathcal{C}}=\mathbb{C}^2$.
Setzt man

$$\mathbf{a}(r,s)=s\left(r\mathrm{e}^r,\mathrm{e}^r-1\right)=(n,m),$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} sr\mathrm{e}^r &= n \\ s\mathrm{e}^r &\sim m \end{aligned}\right\}\Rightarrow r\sim\frac{n}{m},s\sim\frac{m}{\mathrm{e}^{\frac{n}{m}}}.$$

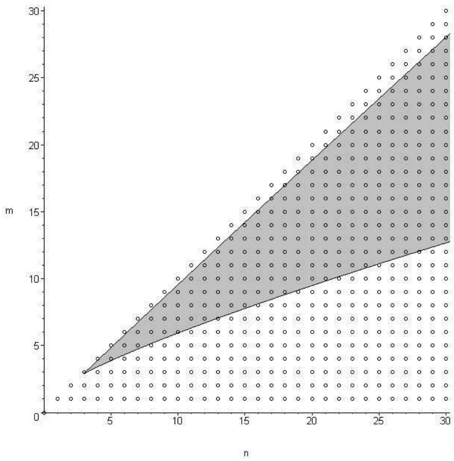
Für $m, n \to \infty$ mit

$$\left(\frac{n}{\mathcal{W}(n)}\right)^{1+\mu} \leq m \leq n^{1-\mu}$$

gilt somit $\mathbf{a}(r,s) \sim (n,m)$, für ein beliebig gewähltes, reelles $\mu > 0$. $\mathcal{W}(x)$ ist hier die Lambertsche $\mathcal{W}$-Funktion, die definiert ist als die Lösung der Gleichung

$$\mathcal{W}\mathrm{e}^{\mathcal{W}} = x.$$

Für sie gilt $\mathcal{W}(x) \sim \log x - \log\log x$ für $x \to \infty$. Das folgende Diagramm zeigt (grau hinterlegt) den Bereich $\left(\frac{n}{\mathcal{W}(n)}\right)^{1+\mu} \leq m \leq n^{1-\mu}$ für $\mu = 0.02$ und die Punkte (n,m), für die $[z^n u^m]y(z,u) > 0$ gilt.



4.6.4 Partitionen ohne Singleton Blöcke

Zählt man die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge die keine Singleton Blöcke hat, so ist die erzeugende Funktion gegeben durch

$$y(z,u) = \exp\left(u\left(\mathrm{e}^z - 1 - z\right) + z\right).$$

Die erste und zweite logarithmische Ableitung sind gegeben durch

$$\mathbf{a}(r,s) = \left(r\mathrm{e}^r s - rs + r, \mathrm{e}^r s - s - rs\right)$$

und

$$B(r,s) = \begin{pmatrix} r^2\mathrm{e}^r s + r\mathrm{e}^r s - rs + r & r\mathrm{e}^r s - rs \\ r\mathrm{e}^r s - rs & r\mathrm{e}^r s - s - rs \end{pmatrix}.$$

a_1, a_2, λ_1 und λ_2 sind hier asymptotisch gleich den Werten des vorhergehenden Beispiels, womit man hier dasselbe Ergebnis wie vorher erhält, nämlich

$$\left(\frac{n}{\mathcal{W}(n)}\right)^{1+\mu} \leq m \leq n^{1-\mu}$$

für ein beliebig gewähltes, reelles $\mu > 0$.

4.6.5 Partitionen gezählt nach den Singleton Blöcken

Zählt man die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge die m Singleton Blöcke hat, so ist die erzeugende Funktion gegeben durch

$$y(z,u) = \exp\left(uz + \mathrm{e}^z - 1 - z\right).$$

Die erste und zweite logarithmische Ableitung sind gegeben durch

$$\mathbf{a}(r,s) = (rs + r\mathrm{e}^r - r, rs)$$

und

$$B(r,s) = \begin{pmatrix} rs + r^2\mathrm{e}^r + r\mathrm{e}^r - r & rs \\ rs & rs \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante von B und für $\mathcal{D}$ erhält man

$$\det B \sim r^3\mathrm{e}^r s$$

und

$$\mathcal{D} \sim r^2\left(s^2 + \frac{1}{4}r^2\mathrm{e}^{2r}\right).$$

Daraus folgt

$$\lambda_2 \sim 2\sqrt{\mathcal{D}} \sim r\sqrt{4s^2 + r^2\mathrm{e}^{2r}} = r\sqrt{(2s)^2 + (r\mathrm{e}^r)^2}$$

und

$$\lambda_1 \sim \frac{\det B}{2\sqrt{\mathcal{D}}} \sim \frac{r^3\mathrm{e}^r s}{r\sqrt{4s^2 + r^2\mathrm{e}^{2r}}} = \frac{r^2\mathrm{e}^r s}{\sqrt{(2s)^2 + (r\mathrm{e}^r)^2}}.$$

Sei $\mathbf{\Delta}(r,s) = \{\mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_1\mathbf{v}_2 : |\mu_j| \leq \delta_j(r,s), j = 1,2\}$ ein Rechteck, das parallel zu den Richtungen der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ liege und durch $\delta_j(r,s)$ begrenzt sei, für $j = 1,2$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\mathbf{\Delta}(r,s)} \Re(\log y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})) - \log y(r,s) + \frac{1}{2}\log(\det B) \\
&= \frac{1}{2}\left(\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\mathbf{\Delta}(r,s)} -(\varphi,\vartheta)B(\varphi,\vartheta)^t + \log(\det B)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\lambda_1\delta_1(r,s)^2 + \log(\det B)\right) \\
&\sim \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{r^2\mathrm{e}^r s}{\sqrt{(2s)^2 + (r\mathrm{e}^r)^2}}\right)\delta_1(r,s)^2 + \log\left(r^2\mathrm{e}^r s\right)\right).
\end{aligned}$$

Man kann $\delta_1(r,s)$ und $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ nicht so wählen, dass dieser Ausdruck gegen $-\infty$ für $r,s \to \infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) strebt.
Damit ist die Funktion nicht H-admissible.

4.6.6 Überdeckung vollständiger paarer Graphen mit vollständigen paaren Graphen

Zählt man die Anzahl der Möglichkeiten den vollständigen paaren Graphen $K_{n,m}$ mit vollständigen paaren Graphen so zu überdecken, dass zumindest ein Knoten in jedem Teil des paaren Graphen ist, so ist die erzeugende Funktion nach [24, Beispiel 3.3.8.] gegeben durch

$$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^z-1)(\mathrm{e}^u-1)}.$$

Die erste und zweite logarithmische Ableitung sind gegeben durch

$$\mathbf{a}(r,s)=\left(r\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s-r\mathrm{e}^r, s\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s-s\mathrm{e}^s\right),$$

und

$$B(r,s)=\begin{pmatrix} r^2\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s+r\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s-r^2\mathrm{e}^r-r\mathrm{e}^r & rs\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s \\ rs\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s & s^2\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s+s\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s-s^2\mathrm{e}^s-s\mathrm{e}^s \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante von B und für $\mathcal{D}$ erhält man

$$\det B\sim\left(r^2s+rs^2\right)\mathrm{e}^{2r}\mathrm{e}^{2s}$$

und

$$\mathcal{D}\sim\left(\frac{1}{2}\left(r^2+s^2\right)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s\right)^2,$$

womit sich die Eigenwerte ergeben zu

$$\lambda_2\sim 2\sqrt{\mathcal{D}}\sim\left(r^2+s^2\right)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s$$

und

$$\lambda_1\sim\frac{\det B}{2\sqrt{\mathcal{D}}}\sim\frac{\left(r^2s+rs^2\right)\mathrm{e}^{2r}\mathrm{e}^{2s}}{\left(r^2+s^2\right)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s}=q(r,s)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s,$$

wobei $q(r,s)=\frac{r^2s+rs^2}{r^2+s^2}>0$ eine rationale Funktion ist.
Die Bedingungen (I) und (IV) sind wieder offensichtlich.
Sei $\mathbf{\Delta}(r,s)=\left\{\mu_1\mathbf{v}_1+\mu_1\mathbf{v}_2:|\mu_j|\leq\left(\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}}, j=1,2\right\}$ für $\rho>0$ das Quadrat, das parallel zu den Richtungen der Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ der Eigenwerte λ_j für $j=1,2$ liege.
Es gilt nun

$$(h,k)B(r,s)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\quad\sim\quad(hr+ks)^2\mathrm{e}^{r+s}+h^2r\mathrm{e}^{r+s}+k^2s\mathrm{e}^{r+s}$$

Da $(hr+ks)^2$, h^2 und k^2 größer oder gleich 0 sind, folgt für alle $(\varphi,\vartheta)\in[-\pi,\pi]^2$ und damit speziell für alle $(\varphi,\vartheta)\in\boldsymbol{\Delta}(r,s)$

$$(h,k)B\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} \;\leq\; 1\cdot(h,k)B(r,s)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}.$$

Somit sind mit $C=1$ und $\eta=(\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)^{-\frac{1}{4}+\frac{3\rho}{2}}$ die Bedingungen für den Lemma 4.3.7 erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(r,s;\varphi,\vartheta) &\leq \frac{1\cdot(\lambda_1+\lambda_2)\left((\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)^{-\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{\rho}{2}}}{2\,(\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)^{-\frac{1}{4}+\frac{3\rho}{2}}}\\
&= \mathcal{O}\left((\lambda_1+\lambda_2)\,(\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)^{-\frac{5}{4}}\right)\\
&= \mathcal{O}\left(\left((q(r,s)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)+\left(r^2+s^2\right)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s\right)(\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)^{-\frac{5}{4}}\right)\to 0,\ \text{für } r,s\to\infty,\end{aligned}$$

für hinreichend kleines ρ. Somit gilt Bedingung (II).
Nun folgt

$$\begin{aligned}&\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\Re\left(\log y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right)-\log y(r,s)+\frac{1}{2}\log(\det B)\\
&\sim\ \frac{1}{2}\left(-\lambda_1^\rho+\log(\det B)\right)\\
&\sim\ \frac{1}{2}\left((q(r,s)\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s)^\rho-\log\left(\left(r^2s+rs^2\right)\mathrm{e}^{2r}\mathrm{e}^{2s}\right)\right)\to 0,\ \text{für } r,s\to\infty\end{aligned}$$

Außerhalb von $\boldsymbol{\Delta}(r,s)$ gilt

$$\max_{(\varphi,\vartheta)\in\partial\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\left|y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})\right|>\max_{(\varphi,\vartheta)\notin\boldsymbol{\Delta}(r,s)}\left|y(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})\right|.$$

Somit ist die Bedingung (III) erfüllt, und es gilt in diesem Fall $\boldsymbol{\mathcal{R}}=\left(\mathbb{R}^+\right)^2$ und $\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^z-1)(\mathrm{e}^u-1)}$ ist in $\mathbb{C}^2$ H-admissible.
Setzt man

$$\mathbf{a}(r,s)=(r\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s-r\mathrm{e}^r,s\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s-s\mathrm{e}^s)=(n,m),$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned}r\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s &\sim n\\ s\mathrm{e}^r\mathrm{e}^s &\sim m\end{aligned}\right\}\Rightarrow r\sim s\cdot\frac{n}{m}.$$

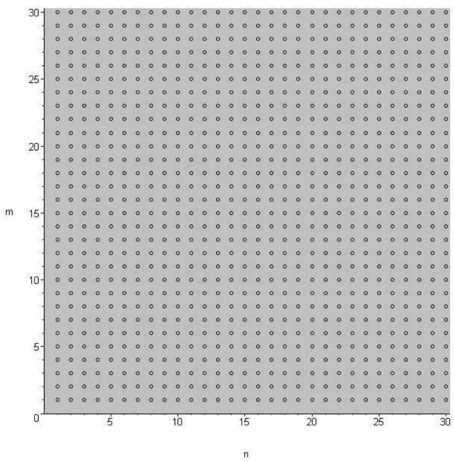
Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
s\mathrm{e}^{s\cdot\frac{n}{m}} r\mathrm{e}^{s} &\sim m \\
s\mathrm{e}^{s\left(\frac{n+m}{m}\right)} &\sim m \\
s\left(\frac{n+m}{m}\right)\mathrm{e}^{s\left(\frac{n+m}{m}\right)} &\sim m\left(\frac{n+m}{m}\right) = (n+m) \\
s\left(\frac{n+m}{m}\right) &\sim \mathcal{W}(n+m) \\
s &\sim \mathcal{W}(n+m)\left(\frac{m}{n+m}\right) \\
s &\sim \mathcal{W}(n+m)\left(1-\frac{n}{n+m}\right).
\end{aligned}$$

Analog liefert die erste Gleichung

$$r \sim \mathcal{W}(n+m)\left(1-\frac{m}{n+m}\right).$$

Somit gibt es keine Einschränkungen für $m, n \to \infty$.
Das folgende Diagramm zeigt (grau hinterlegt) den Bereich und die Punkte (n, m), für die $[z^n u^m]y(z,u) > 0$ gilt.



Kapitel 5

Zusammenfassung

Sei $\mathcal{R}$ das Intervall (R_0, R) und $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, für ein fest gewähltes $R_0 > 0$. Weiters seien $a(r)$ und $b(r)$ die erste und zweite logarithmische Ableitung von $y(z)$.

Hayman definierte in [26]:

Definition. Eine Funktion

$$y(z) = \sum_{n \geq 0} y_n z^n$$

mit reellen Koeffizienten y_n heißt admissible im Sinne von Hayman (oder H-admissible) in $\mathcal{C}$, wenn sie analytisch in $\mathcal{C}$ und positiv in $\mathcal{R}$ (für ein fest gewähltes $R_0 > 0$) ist und folgende Eigenschaften hat

(1) $b(r) \to \infty$, für $r \to R$.

(2) Es existiert eine Funktion $\delta : r \mapsto \delta(r), \mathcal{R} \to (0, \pi)$, sodass gilt:

$$y(re^{i\vartheta}) \sim y(r)e^{i\vartheta a(r) - \frac{\vartheta^2}{2} b(r)}, \text{ für } r \to R,$$

gleichmäßig in $|\vartheta| \leq \delta(r)$,

(3) $y(re^{i\vartheta}) = o\left(\frac{y(r)}{\sqrt{b(r)}}\right)$, für $r \to R$ gleichmäßig in $\delta(r) \leq |\vartheta| \leq \pi$.

Hayman zeigte folgenden Satz und folgendes Korollar

Satz. *Sei $y(z) = \sum_{n \geq 0} y_n z^n$ H-admissible in $|z| < R$. Dann gilt*

$$y_n = \frac{y(r)}{r^n \sqrt{2\pi b(r)}} \left(e^{-\frac{(a(r)-n)^2}{b(r)}} + o(1) \right), \text{ für } n \to \infty,$$

gleichmäßig in n.

Korollar. *Sei $y(z) = \sum_{n\geq 0} y_n z^n$ H-admissible in $|z| < R$. Dann gilt*

$$y_n \sim \frac{y(\rho_n)}{\rho_n^n \sqrt{2\pi b(\rho_n)}}, \text{ für } n \to \infty,$$

wobei ρ_n für hinreichend große n die eindeutig definierte Lösung der Gleichung $a(\rho_n) = n$ ist.

Für die univariaten in $\mathcal{C}$ H-admissiblen Funktionen lonnte Hayman folgende Abgeschlossenheitsbedingungen beweisen:

- Wenn $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ ist, dann ist es $\mathrm{e}^{y(z)}$ ebenso.
- Sind $y_1(z)$ und $y_2(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$, dann ist es auch das Produkt $y_1(z) \cdot y_2(z)$.
- Ist $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ und ist $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dessen Leitkoeffizient positiv ist, dann ist auch $y(z) \cdot p(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$.
- Sei $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ und $f(z)$ eine analytische Funktion in diesem Gebiet. Ist $f(r)$ reell für reelle r und existiert eine Konstante $\delta > 0$, sodass

  $$\max_{|z|=r} |f(z)| = \mathcal{O}\left(y(r)^{1-\delta}\right), \text{ für } r \to R,$$

  dann ist $y(z) + f(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$.
- Ist $y(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$ und $p(z)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann ist $y(z) + p(z)$ H-admissible in $\mathcal{C}$. Hat $p(z)$ einen positiven Leitkoeffizient, dann ist auch $p(y(z))$ H-admissible in $\mathcal{C}$.

Als eine Basisklasse gab er folgendes an:

Sei $P(z) = \sum_{m \in M} b_m z^m$ ein Polynom in z mit reellen Koeffizienten, wobei $b_m \neq 0$, $\forall m \in M$ gelte und

$$y(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \mathrm{e}^{P(z)}$$

sei.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\forall \vartheta \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ gilt: $\left|y\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)\right| < y(r)$, für $r \to \infty$.
- $y(z)$ ist H-admissible in $\mathbb{C}$.

Eine univariate Potenzreihe

$$y(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n z^n$$

ist in einem Intervall $(-R, R)$ für $R > 0$ oder nirgends analytisch.
Im Gegensatz dazu hat im multivariaten Fall der Bereich, in dem die Potenzreihe

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

analytisch ist, im Allgemeinen keine so einfache Gestalt. (Zum Beispiel ist $y(z, u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (zu)^n$ für $|zu| < 1$ analytisch.)
Deshalb wurden in dieser Dissertation nur Funktionen, die in ganz $\mathbb{C}^d$ analytisch sind, betrachtet, was dem univariaten Fall mit $R = \infty$ entspricht.

Im univariaten Fall liegt jede reelle Folge $(r_k)_{k \geq 0}$ mit $r_k \to \infty$ für $k \to \infty$ auf einer Geraden. Im multivariaten Fall können reelle Folgen $(\mathbf{r}_k)_{k \geq 0}$ mit $\mathbf{r}_k \to \boldsymbol{\infty}$ für $k \to \infty$ sehr unangenehme Eigenschaften haben. So können zum Beispiel einzelne Komponenten sehr groß (im Vergleich zu den anderen Komponenten) werden, wie das bivariate Beispiel $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^k}, k\right)_{k \geq 0}$ zeigt. Somit kommt man nicht umhin, bei der Definition der multivariaten H-Admissibilität das Gebiet $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, in dem $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ strebt, einzuschränken.

Sei $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, welches $\boldsymbol{\infty}$ als Randpunkt und keinen Punkt mit $\|\mathbf{r}\|_{max} \leq R_0$, für ein fest gewähltes R_0, enthalte. $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ bezeichne die Menge $\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d \middle| \exists \mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}, (|z_1|, \ldots, |z_d|) = \mathbf{r}\right\}$.

Weiters sei $\mathbf{a}(\mathbf{z}) = (a_j(\mathbf{z}))_{1 \leq j \leq d}$ mit $a_j(\mathbf{z}) = \frac{z_j y_{z_j}(\mathbf{z})}{y(\mathbf{z})}$ und $B(\mathbf{z}) = (B_{jk}(\mathbf{z}))_{1 \leq j,k \leq d}$ mit $B_{jk}(\mathbf{z}) = \frac{z_j z_k y_{z_j z_k}(\mathbf{z}) + \delta_{jk} z_j y_{z_j}(\mathbf{z})}{y(\mathbf{z})} - \frac{z_j z_k y_{z_j}(\mathbf{z}) y_{z_k}(\mathbf{z})}{y(\mathbf{z})^2}$ der Vektor der ersten und die Matrix der zweiten logarithmischen (partiellen) Ableitung von $y(\mathbf{z})$.

Mit diesen Bezeichnungen wurde in der Dissertation eine Verallgemeinerung der Definition von Hayman (für den Fall $R = \infty$) folgendermaßen angegeben

Definition. Eine Funktion

$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$$

mit reellen Koeffizienten $y_{\mathbf{n}}$ heißt admissible im Sinne von Hayman (oder H-admissible) in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, wenn sie analytisch in $\mathbb{C}^d$ und positiv in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ (für ein geeignet gewähltes $R_0 > 0$) ist und folgende Eigenschaften hat:

(I) $B(\mathbf{r})$ ist positiv definit mit den Eigenwerten $\lambda_1(\mathbf{r}), \dots, \lambda_d(\mathbf{r})$ und erfüllt für $1 \le j \le d$:

$$\lambda_j(\mathbf{r}) \to \infty, \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}).$$

(II) Sei $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{r})$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von $B(\mathbf{r})$. Dann existieren Funktionen $\delta_j : \mathbf{r} \mapsto \delta_j(\mathbf{r}), \boldsymbol{\mathcal{R}} \to (0, \pi)$ für $1 \le j \le d$, sodass gilt:

$$y\left(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}\right) \sim y(\mathbf{r}) \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{a}(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}^t - \frac{\boldsymbol{\vartheta} B(\mathbf{r}) \boldsymbol{\vartheta}^t}{2}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty} \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),$$

gleichmäßig für $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$, wobei $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r}) = \left\{\sum_{j=1}^d \mu_j \mathbf{v}_j(\mathbf{r}) : |\mu_j| \le \delta_j(\mathbf{r}), 1 \le j \le d\right\}$ sei. Das bedeutet, die asymptotische Formel gilt gleichmäßig innerhalb eines von den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}), \dots, \mathbf{v}_d(\mathbf{r})$ aufgespannten Quaders, dessen Größe von den Werten $\delta_1(\mathbf{r}), \dots, \delta_d(\mathbf{r})$ bestimmt wird.

(III) $y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}}) = o\left(\frac{y(\mathbf{r})}{\sqrt{\det B(\mathbf{r})}}\right)$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$), gleichmäßig für $\boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi, \pi]^d \setminus \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{r})$.

(IV) Für $1 \le j \le d$ gilt $B_{jj}(\mathbf{r}) = o\left(a_j(\mathbf{r})^2\right)$, für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$).

Folgender Satz und folgendes Korollar wurden gezeigt.

Satz. *Sei $y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \ge \mathbf{0}} y_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Dann gilt für $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$)*

$$y_{\mathbf{n}} = \frac{y(\mathbf{r})}{\mathbf{r}^{\mathbf{n}} (2\pi)^{d/2} \sqrt{\det B(\mathbf{r})}} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}) B(\mathbf{r})^{-1} (\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{n})^t\right) + o(1)\right),$$

für $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$, gleichmäßig in $\mathbf{n}$.

Korollar. *Sei $y(\mathbf{z})$ eine in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissible Funktion. Gilt $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$ so, dass $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} \to \boldsymbol{\infty}$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}$) für die Lösung von $\mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}) = \mathbf{n}$ folgt, so erhält man für $\mathbf{n} \to \boldsymbol{\infty}$*

$$y_{\mathbf{n}} \sim \frac{y(\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}})}{\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{n}} (2\pi)^{d/2} \sqrt{\det B(\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}})}}.$$

Im Gegensatz zum univariaten Fall ist die Gleichung $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}$ nicht immer lösbar.

Für die multivariaten in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ H-admissiblen Funktionen wurden in dieser Dissertation folgende Abgeschlossenheitsbedingungen bewiesen:

- Wenn $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ ist, dann ist es $\mathrm{e}^{y(\mathbf{z})}$ ebenso.
- Sind $y_1(\mathbf{z})$ und $y_2(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, dann ist es auch das Produkt $y_1(\mathbf{z}) \cdot y_2(\mathbf{z})$, wenn es eine Konstante C gibt, für die $\det(B_1(\mathbf{r}) + B_2(\mathbf{r})) \le C \min\{\det B_1(\mathbf{r}), \det B_2(\mathbf{r})\}$ gilt und die Eigenrichtungen von $B_1(\mathbf{r})$ und $B_2(\mathbf{r})$ gleich sind.

- Ist $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und ist $p(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{p}\in M} b_{\mathbf{p}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}}$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, für das für alle $b_{\mathbf{p}} \in M$ mit $b_{\mathbf{p}} < 0$ folgt, dass es ein $\mathbf{m} \in M$ gibt, für dass $b_{\mathbf{m}} > 0$ ist, mit $\mathbf{p} \lneqq \mathbf{m}$. Dann ist $y(\mathbf{z}) \cdot p(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.
- Sei $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und $f(\mathbf{z})$ eine analytische Funktion in diesem Gebiet. Ist $f(\mathbf{r})$ reell für alle $\mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ und existiert eine Konstante $\delta > 0$, sodass gilt
$$\max_{|z_j|=r_j, 1\le j\le d} |f(\mathbf{z})| = \mathcal{O}\left(y(\mathbf{r})^{1-\delta}\right), \text{ für } \mathbf{r} \to \infty \text{ (in } \boldsymbol{\mathcal{R}}),$$
dann ist $y(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.
- Ist $y(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ und $p(\mathbf{z})$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, $y(\mathbf{z})+p(\mathbf{z})$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Ist $q(z)$ ein univariates Polynom mit reellen Koeffizienten und positivem Leitkoeffizienten, so ist auch $q(y(\mathbf{z}))$ H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Sei $1 < \sigma \in \mathbb{R}$,
$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma := \left\{\mathbf{r} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^d : (r_{\min})^\sigma > r_{\max}\right\}$$
und
$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d \middle| \exists \mathbf{r} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma, (|z_1|, \dots, |z_d|) = \mathbf{r}\right\},$$
wobei $r_{\min} = \min_{1\le j\le d} r_j$ und $r_{\max} = \max_{1\le j\le d} r_j$ bezeichne.

Damit ergab sich folgende Basisklasse:

Sei $P(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{m}\in M} b_{\mathbf{m}}\mathbf{z}^{\mathbf{m}}$ ein Polynom in $\mathbf{z}$ mit reellen Koeffizienten, wobei $b_{\mathbf{m}} \neq 0$, $\forall \mathbf{m} \in M$ gelte,
$$y(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} a_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \mathrm{e}^{P(\mathbf{z})}$$
sei, und σ eine beliebige, fest gewählte, reelle Zahl größer 1 darstelle.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\forall \boldsymbol{\vartheta} \in [-\pi, \pi]^d \setminus \mathbf{0}$ gilt: $\left|y(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\vartheta}})\right| < y(\mathbf{r})$, für $\mathbf{r} \to \infty$ (in $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\sigma$)
- $y(\mathbf{z})$ ist H-admissible in $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\sigma$.

Man sieht, dass sich die Abgeschlossenheitsbedingungen des univariaten Falles gut verallgemeinern lassen. Die einzige, größere Einschränkung ergibt sich bei Multiplikation zweier

H-admissibler Funktionen. Auch die Basisklasse $\mathrm{e}^{P(\mathbf{z})}$ lässt sich wie erwartet verallgemeinern.

Vergleicht man die hier beschriebene multivariate H-Admissibilität mit der von Bender und Richmond in [8] angegebenen BR-Admissibilität beziehungsweise BR-Superadmissibilität, so kann man sagen, dass deren Definition speziell auf einige wichtige Beispieltypen ausgerichtet ist, während die hier definierte, das Hauptaugenmerk auf die Abgeschlossenheitsbedingungen legt und somit für eine etwaige Implementierung in MAPLE, oder einem anderen Programm, besser geeignet ist.

Notation

Seien $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$, $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_d)$ und $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ Zeilenvektoren, $t \in \mathbb{R}$ und $f,\ g$ Funktionen.

Dann wird zur Vereinfachung folgende Notation verwendet:

$\mathbf{0}$	$(0, \ldots, 0)$
$\mathbf{1}$	$(1, \ldots, 1)$
$\boldsymbol{\infty}$	$(\infty, \ldots, \infty)$
$\mathbf{v} \pm \mathbf{w}$	$(v_1 \pm w_1, \ldots, v_d \pm w_d)$
$t\mathbf{v}$	$(tv_1, \ldots, tv_d)$
$(\cdot)^t$	Transponierte von $(\cdot)$
$\mathbf{v}^{\mathbf{w}}$	$v_1^{w_1} \cdots v_d^{w_d}$
$\mathbf{v}\mathrm{e}^{\mathbf{w}}$	$(v_1\mathrm{e}^{w_1}, \ldots, v_d\mathrm{e}^{w_d})$
$\mathbf{v}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{w}}$	$\big(v_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_1}, \ldots, v_d\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_d}\big)$
$\mathrm{d}\mathbf{v}$	$\mathrm{d}v_1 \cdots \mathrm{d}v_d$
$\frac{\partial^{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{v}^{\mathbf{k}}}$	$\frac{\partial^{k_1}}{\partial v_1^{k_1}} \cdots \frac{\partial^{k_d}}{\partial v_d^{k_d}}$
$(\mathbf{v})_{\mathbf{k}}$	$(v_1)_{k_1} \cdots (v_d)_{k_d},$ mit $(v_j)_{k_j} = v_j(v_j - 1) \cdots (v_j - k_j + 1),$ für $1 \leq j \leq d$
$\mathbf{k}!$	$k_1! \cdots k_d!$
$t^{\mathbf{v}}$	$(t^{v_1}, \ldots, t^{v_d})$
$t^{\mathbf{v}}\mathrm{e}^{\mathbf{w}}$	$(t^{v_1}\mathrm{e}^{w_1}, \ldots, t^{v_d}\mathrm{e}^{w_d})$
$t^{\mathbf{v}}\mathrm{e}^{i\mathbf{w}}$	$(t^{v_1}\mathrm{e}^{iw_1}, \ldots, t^{v_d}\mathrm{e}^{iw_d})$
$\mathbf{v} \to \mathbf{w}$	$v_1 \to w_1, \ldots, v_d \to w_d$
$\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$	$v_1 \leq w_1, \ldots, v_d \leq w_d$
$\mathbf{v} < \mathbf{w}$	$v_1 < w_1, \ldots, v_d < w_d$
$\mathbf{v} \lneqq \mathbf{w}$	$\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$
$\mathbf{v} \geq \mathbf{w}$	$v_1 \geq w_1, \ldots, v_d \geq w_d$
$\mathbf{v} > \mathbf{w}$	$v_1 > w_1, \ldots, v_d > w_d$
$\mathbf{v} \gneqq \mathbf{w}$	$\mathbf{v} \geq \mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$

$f(\mathbf{v}) = \mathcal{O}\left(g(\mathbf{v})\right),\ \text{für } \mathbf{v} \to \mathbf{w}$	$\frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v})} \leq C,\ \text{für } \mathbf{v} \to \mathbf{w},\ \text{für eine Konstante } C > 0$
$f(\mathbf{v}) = o\left(g(\mathbf{v})\right),\ \text{für } \mathbf{v} \to \mathbf{w}$	$\frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v})} \to 0,\ \text{für } \mathbf{v} \to \mathbf{w}$
$f(\mathbf{v}) \sim g(\mathbf{v}),\ \text{für } \mathbf{v} \to \mathbf{w}$	$\frac{f(\mathbf{v})}{g(\mathbf{v})} \to 1,\ \text{für } \mathbf{v} \to \mathbf{w}$

Literaturverzeichnis

[1] ADLEMAN, L.: *A subexponential algorithm for the discrete logarithm problem with applications.* In: *Proc. 20th IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, Seiten 55–60. 1979.

[2] BÁEZ-DUARTE, L.: *Hardy-Ramanujan's asymptotic formula for partitions and the central limit theorem.* Adv. Math., 125:114–120, 1997.

[3] BELL, J. P., E. A. BENDER, P. J. CAMERON und L. B. RICHMOND: *Asymptotics for the probability of connectedness and the distribution of number of components.* Electron. J. Combin., 7, #R33, 2000.

[4] BENDER, E. A.: *Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration.* J. Combinatorial Theory Ser. A, 15:91–111, 1973.

[5] BENDER, E. A., P. J. CAMERON, A. M. ODLYZKO und B. L. RICHMOND: *Connectedness, classes, and cycle index.* Comb. Prob. Comput., 8:31–43, 1999.

[6] BENDER, E. A. und L. B. RICHMOND: *Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration. II. Multivariate generating functions.* J. Combin. Theory Ser. A, 34(3):255–265, 1983.

[7] BENDER, E. A. und L. B. RICHMOND: *A generalisation of Canfield's formula.* Journal Combin. Theory Ser. A 23, 41:50–60, 1986.

[8] BENDER, E. A. und L. B. RICHMOND: *Admissible functions and asymptotics for labelled structures by number of components.* Electron. J. Combin., 3, #R34, 1996.

[9] BLAKE, I. F., R. FUJI-HARA, R. C. MULLIN und S. A. VANSTONE: *Computing discrete logarithms in finite fields of characteristic two.* SIAM J. Alg. Disc. Math., 5:276–285, 1984.

[10] BLAKE, I. F., R. C. MULLIN und S. A. VANSTONE: *Computing logarithms in* GF(2^n). In: *Advances in Cryptology, Lecture Notes in Computer Science*, Band 196, Seiten 73–82. Springer Verlag, 1985.

[11] Blum, M. und S. Micali: *How to generate cryptographically strong sequencesof pseudorandom bits.* SIAM J. Comput., 13:850–864, 1984.

[12] Canfield, R., S. Corteel und P. Hitczenko: *Random partitions with non negative rth differences.* In: *LATIN 2002: Theoretical Informatics (Cancun)*, Band 2286 der Reihe *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Seiten 131–140. Springer, Berlin, 2002.

[13] Cazacu, C. A.: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher.* Birkhäuser Verlag Basel, 1975.

[14] De Bruijn, N. G.: *Asymptotic methods in analysis.* North-Holland Publishing Co.-Amsterdam, 1958.

[15] Diffie, W. und M. Hellman: *New directions in cryptography.* IEEE Trans. Inform. Theory, 22:644–654, 1976.

[16] Drmota, M., B. Gittenberger und T. Klausner: *Extended admissible functions and Gaussian limiting distributions.* Mathematics of Computation, 74:1953–1966, 2005.

[17] Drmota, M. und D. Panario: *A Rigorous Proof of the Waterloo Algorithm for the Discrete Logarithm Problem.* Des. Codes Cryptography, 26(1-3):229–241, 2002.

[18] ElGamal, T.: *A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms.* IEEE Trans. Inform. Theory, 31:469–472, 1985.

[19] Flajolet, P. und Sedgewick. R.: *Analytic Combinatorics.* in Vorbereitung.

[20] Flajolet, P. und M. Soria: *Gaussian limiting distributions for the number of components in combinatorial structures.* J. Combin. Theory Ser. A, 53(2):165–182, 1990.

[21] Flajolet, P. und M. Soria: *General combinatorial schemas: Gaussian limit distributions and exponential tails.* Discrete Math., 114(1-3):159–180, 1993.

[22] Gao, Zhicheng und L. B. Richmond: *Central and local limit theorems applied to asmptotic enumeration IV: multivariate generating functions.* J. Comput. Appl. Math, 41:177–186, 1992.

[23] Gittenberger, B. und J. Mandlburger: *Hayman admissibility in several variables.* in Vorbereitung.

[24] Goulden, I. P. und D. M. Jackson: *Combinatorial Enumeration.* John Wiley & Sons, Inc., New York, Dover Auflage, 2004.

[25] Harris, B. und L. Schoenfeld: *Asymptotic expansions for the coefficients of analytic functions.* Illinios J. Math., 12:264–277, 1968.

[26] Hayman, W. K.: *A generalisation of Stirling's formula.* J. Reine Angew. Math., 196:67–95, 1956.

[27] Holland, F. und R. Rochberg: *Bergman kernel asymptotics for generalized Fock spaces.* J. Anal. Math., 83:207–242, 2001.

[28] Klausner, T.: *Computer-Assisted Analytic Methods for Discrete Problems.* Dissertation, Technische Universität Wien, Mai 2004.

[29] Knopfmacher, J. und R. Warlimont: *Arithmetical semigroups related to trees and polyhedra. II. Maps on surfaces.* Math. Nachr., 235:59–81, 2002.

[30] Krattenthaler, C. und T. W. Müller: *Equations in finite semigroups: explicit enumeration and asymptotics of solution numbers.* J. Combin. Theory Ser. A, 105(2):291–334, 2004.

[31] Letac, G., D. Malouche und S. Maurer: *The real powers of the convolution of a negative binomial distribution and a Bernoulli distribution.* Proc. Amer. Math. Soc., 130(7):2107–2114 (electronic), 2002.

[32] Lidl, R. und H. Niederreiter: *Finite Fields (Encyclopedia of mathematics and its applications 20).* Cambridge Univ. Press, 2. Auflage, 1997.

[33] Lotfallah, W. B.: *Strong 0-1 laws in finite model theory.* J. Symbolic Logic, 65(4):1686–1704, 2000.

[34] Müller, T.: *Finite group actions and asymptotic expansions of* $\mathrm{e}^{P(x)}$. Combinatorica, 17(4):523–554, 1997.

[35] Mutafchief, L. R.: *Limiting distributions for the number of distinct component sizes in relational structures.* J. Combin. Theory Ser. A, 79:1–35, 1997.

[36] Mutafchiev, L. R.: *On the size of the Durfee square of a random integer partition.* J. Comput. Appl. Math., 142(1):173–184, 2002.

[37] Mutafchiev, L. R.: *The typical growth of the* $k-th$ *excess in a random integer partition.* Monatsh. Math., 136(4):313–325, 2002.

[38] Mutafchiev, L. R.: *Erratum to: "Limiting distributions for the number of distinct component sizes in relational structures" [J. Combin. Theory Ser. A* **79** *(1997), no. 1, 1–35.* J. Combin. Theory Ser. A, 102(2):447–449, 2003.

[39] MUTAFCHIEV, L. R.: *On the maximal multiplicity of parts in a random integer partition.* Ramanujan J., 9(3):305–316, 2005.

[40] ODLYZKO, A. M.: *Asymptotic enumeration methods.* In: GRAHAM, R. L., M. GROETSCHEL und L. LOVASZ (Herausgeber): *Handbook of Combinatorics*, Band 2, Seiten 1063–1229. Elsevier, 1995.

[41] ODLYZKO, A. M.: *Discrete logarithms in finite fields and their cryptographic significance.* In: *Advances in cryptology, Proc. EUROCRYPT 84, Lect. Notes Comput. Sci.*, Band 209, Seiten 224–314. Springer-Verlag, 1995.

[42] ODLYZKO, A. M. und L. B. RICHMOND: *Asymptotic expansions for the coefficients of analytic generating functions.* Aequationes Math., 28(1-2):50–63, 1985.

[43] RICHARDSON, D., B. SALVY und J. SHACKELL, J.AND VAN DER HOEVEN: *Asymptotic Expansions of exp-log Functions.* In: LAKSHMAN, Y. N. (Herausgeber): *ISSAC'96*, Seiten 309–313. ACM Press, 1996. Proceedings of the 1996 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. July 24–26, 1996. Zürich, Switzerland.

[44] SALVY, B.: *Fast computation of some asymptotic functional inverses.* J. Symbolic Comput., 17(3):227–236, 1994.

[45] SALVY, B. und J. SHACKELL: *Symbolic asymptotics: multiseries of inverse functions.* J. Symbolic Comput., 27(6):543–563, 1999.

[46] SALVY, BRUNO: *Examples of automatic asymptotic expansions.* SIGSAM Bulletin, 25(2):4–17, apr 1991.

[47] WESTERN, A. E. und J. C. P. MILLER: *Tables of indizes and primitive roots.* In: *Royal Society Mathematical Tables*, Band 9. Cambridge University Press, 1968.