# Mathematik für TCH Übung I

---

1. (a) Man gebe alle Elemente der $S_4$ an. Begründung?
   (b) Wie viele Elemente hat $S_n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$? Begründung?

2. (a) Sei $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ eine Permutation aus $S_5$. Man bestimme $g^{-1}$ und zeige, dass $g^{-1}$ unter den positiven Potenzen von $g$, d. h. unter den Elementen $g$, $g^2 = g \circ g$, $g^3 = g \circ (g \circ g), \ldots$ vorkommt.
   (b) Bezeichne $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ die ganzen Zahlen mit der Addition. Man bestimme alle positiven Vielfachen von 1, d. h. $1, 1 + 1, 1 + (1 + 1), \ldots$. Kommt das Inverse von 1 bezüglich $+$ unter diesen Elementen vor?

3. Man bestimme alle Untergruppen der $S_3$ mit 1, 2 bzw. 3 Elementen. Begründung?

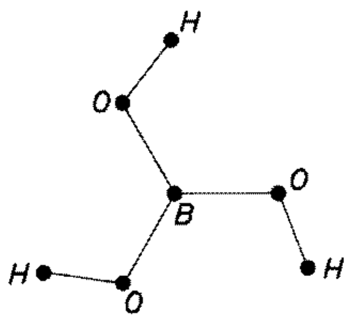
   *Hinweis:* Unter einer Untergruppe der $S_3$ versteht man eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq S_3$, sodass für alle $x, y$ aus M gilt: $x \circ y$ und $x^{-1}$ sind auch aus $M$.

4. Man zeige, dass es bei einer Drehspiegelung (d. h. bei einer Zusammensetzung einer Spiegelung und einer Drehung um den Winkel $\varphi$ mit Drehachse *senkrecht* zur Spiegelungsebene) nicht darauf ankommt, ob zuerst gespiegelt und dann gedreht bzw. zuerst gedreht und dann gespiegelt wird. Gilt das für eine *beliebige* Zusammensetzung einer Spiegelung und einer Drehung?

   *Anleitung:* Man wähle ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit $x$-, $y$-, $z$-Achse so, dass die Spiegelungsebene die $xy$-Ebene ist, und überlege jeweils, wie die Drehspiegelung auf die Einheitsvektoren in $x$-, $y$- und $z$-Richtung wirkt. Für die Anschlussfrage drehe man anstatt um die $z$-Achse z. B. um die $x$-Achse.

5. Man bestimme die Symmetriegruppe des Borsäuremoleküls.

   Abbildung 1:

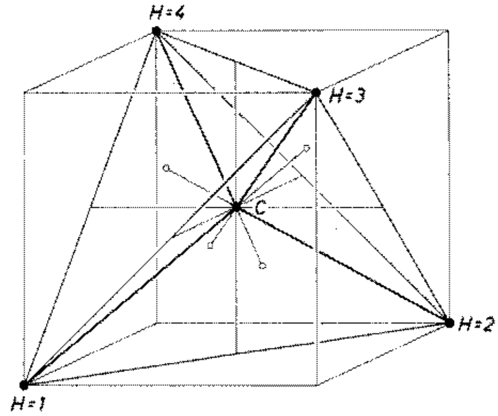



   *Hinweis:* Das Borsäuremolekül ist ein ebenes Molekül, welches als die in der Abbildung 1 wiedergegebene (ebene) Figur aufgefasst werden kann.

6. Man bestimme die Symmetriegruppe des Methanmoleküls.

   *Hinweis:* Wir fassen das Methanmolekül als ein regelmaßiges Tetraeder auf, in dessen vier Eckpunkten die H-Atome liegen und dessen Mittelpunkt das C-Atom ist (Abbildung 2).

Abbildung 2:




7. Unter den Symmetrieoperationen des Methan-Moleküls, das als Tetraeder aufgefasst wird (siehe Abbildung 2) bestimme man jeweils durch Angabe einer geometrischen Beschreibung (wie Spiegelebene und/oder Drehachse und Drehwinkel) aber auch als Permutation der vier H-Atome

   (a) alle Spiegelungen (es gibt 6),

   (b) zumindest eine Drehspiegelung.

8. Man gebe von den 24 Symmetrieoperationen des Methanmoleküls (siehe Abbildung 2 als Tetraeder mit den H-Atomen in den Eckpunkten und dem C-Atom im Mittelpunkt) je eine Drehung (nicht die identische Abbildung), eine Spiegelung und eine Drehspiegelung an.

   Jede der drei angegebenen Symmetrieoperationen ist sowohl geometrisch zu beschreiben (d.h. Angabe von Drehachse und Drehwinkel bei der Drehung, Spiegelungsebene bei der Spiegelung und Spiegelungsebene mit dazu orthogonaler Drehachse und Winkel bei der Drehspiegelung) als auch als Permutation der vier Wasserstoffatome. Weiters bestimme man mit Hilfe der Permutationsdarstellung das Produkt der angegebenen Spiegelung und der Drehspiegelung in der Symmetriegruppe.

9. Man bestimme all jene Symmetrieoperationen des Methan-Moleküls (das als Tetraeder mit den H-Atomen in den Ecken und dem C-Atom im Zentrum aufgefasst wird, siehe Abbildung 2), die als zusätzliche Bedingung das H-Atom mit Nummer 3 festhalten, d.h. nur die H-Atome mit den Nummern 1, 2 und 4 können untereinander permutiert werden. Diese Symmetrieoperationen sind sowohl geometrisch zu beschreiben (als Drehungen, Spiegelungen oder Drehspiegelungen jeweils mit den zugehorigen Identifikationsmerkmalen) als auch als Permutationen der Nummernmenge $\{1, 2, 3, 4\}$. Man begründe, warum die Menge dieser (die Nummer 3 fixierenden) Symmetrieoperationen eine Untergruppe der Gruppe aller Symmetrieoperationen des Methan-Moleküls darstellt.

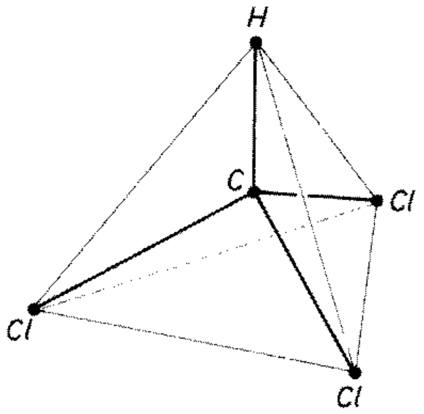
10. Man bestimme alle Symmetrieoperationen des Methanmoleküls (siehe Abbildung 2 als Tetraeder mit den H-Atomen in den Eckpunkten und dem C-Atom im Mittelpunkt), die Drehungen sind. Die jeweiligen Symmetrieoperationen sind sowohl geometrisch zu beschreiben (Angabe von Drehachse und Drehwinkel) als auch als Permutation der vier Wasserstoffatome. (Hinweis: Es gibt 12 Drehungen.)

    Weiters rechne man exemplarisch mit Hilfe der Permutationsdarstellung nach, dass die

Hintereinanderausführung zweier solcher Drehungen mit verschiedenen Drehachsen wieder eine Drehung ergibt.

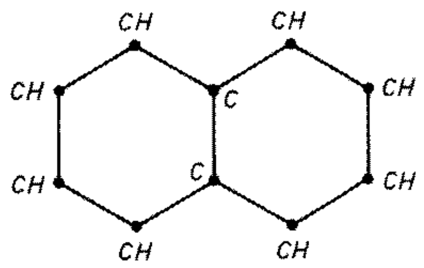
11. Man zeige, dass die Symmetriegruppe des Ammoniak-Moleküls und die Symmetriegruppe des Chloroform-Moleküls (Abbildung 3) isomorph (d. h. bis auf die Bezeichnung der Elemente gleich) sind.

Abbildung 3:




12. Man ermittle die Symmetriegruppe des Naphthalins (Abbildung 4); insbesondere gebe man alle Produkte von je zwei Symmetrieoperationen in Form einer Tabelle (Operationstafel der Symmetriegruppe) an.

Abbildung 4:




13. Man bestimme alle Symmetrieoperationen von 1,3,5-Trichlor-Benzol (Abbildung 5).

    Hinweis: Es gibt 6 Drehungen, 4 Spiegelungen und 2 Drehspiegelungen. Diese können am besten als Permutationen von 5 Punkten (z.B. den 3 Chlor-Atomen und 2 weiteren Punkten, die zentral in gleichem Abstand ober- und unterhalb der Molekülebene liegen) beschrieben werden.

14. Man bestimme alle Symmetrieoperationen des Wasser-Moleküls, wobei wir dieses als ebenes Molekul auffassen, bei dem die beiden O-H-Bindungen einen Winkel von 104,45° einschließen (Abbildung 6). Jede Symmetrieoperation ist geometrisch zu beschreiben durch Angabe von Drehachse und Drehwinkel bzw. Spiegelebene bzw. einer Kombination von beidem bei einer Drehspiegelung. Weiters gebe man die vollständige Operationstafel der Symmetriegruppe an.

Abbildung 5:

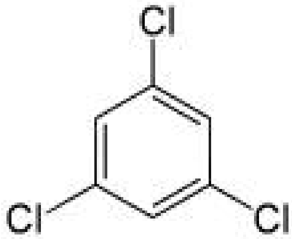
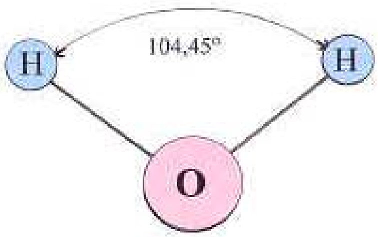



Abbildung 6:

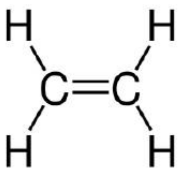



Hinweis: Wenn man die Symmetrieoperationen als Permutationen darstellen möchte, muss man zusätzlich zu den beiden H-Atomen noch zwei weitere Punkte im Raum betrachten, die unter Symmetrieoperationen entweder fix bleiben oder untereinander vertauscht werden.

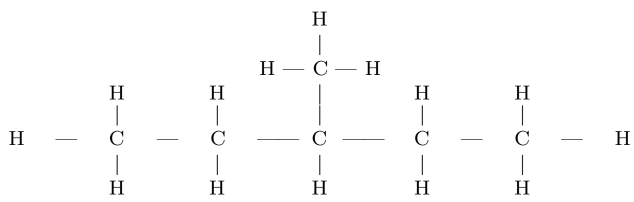
15. Man bestimme alle Symmetrieoperationen (es gibt 8) von Ethen und gebe die Operationstafel der Untergruppe aller darin enthaltenen Drehungen (es gibt 4) an. Jede Symmetrieoperation soll hier sowohl geometrisch beschrieben werden (z.B. bei Drehungen durch Angabe von Drehachse und Drehwinkel) als auch als Permutation einer geeigneten (endlichen) Punktmenge.

    Ethen ist dabei als ein ebenes Molekül mit der unten angegebenen Gestalt aufzufassen (Abbildung 7).

Abbildung 7:




16. Man bestimme alle Symmetrieoperationen von 3–Methylpentan und gebe die Operationstafel der Symmetriegruppe an. 3–Methylpentan ist dabei als ein ebenes Molekül mit der unten angegebenen Gestalt aufzufassen.

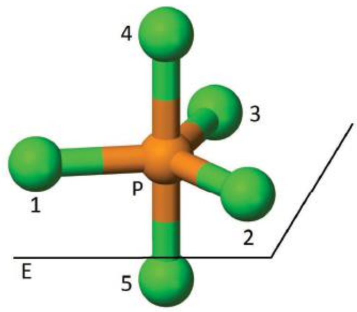


17. Man bestimme alle Symmetrieoperationen von Phosphorpentachlorid $PCl_5$ (siehe Abbildung 8 mit dem P-Atom im Zentrum und den Cl-Atomen nummeriert mit 1 – 5 an den Enden; die drei Cl-Atome 1, 2 und 3 in der horizontalen Ebene E bilden ein gleichseitiges Dreieck mit dem P-Atom als Mittelpunkt, die beiden weiteren Cl-Atome 4 und 5 liegen spiegelsymmetrisch zu E auf einer zu E senkrechten Geraden durch das P-Atom).

    Die einzelnen Symmetrieoperationen sind sowohl geometrisch zu beschreiben (Angabe von Drehachse und Drehwinkel bzw. Spiegelungsebene) als auch als Permutation der fünf Cl-Atome $1, \ldots, 5$.

    (Hinweis: Es gibt neben der identischen Abbildung 5 Drehungen, 4 Spiegelungen und 2 Drehspiegelungen des $PCl_5$-Moleküls.)

Abbildung 8:




18. Man zeige, dass das neutrale Element und zu jedem Element das inverse Element in einer Gruppe eindeutig bestimmt sind.

19. Sei $\langle G, \circ \rangle$ eine endliche Gruppe und $g \in G$. Man zeige, dass es eine positive ganze Zahl $n$ gibt mit $g^{-1} = g^n$.

    *Anleitung:* Man überlege zunächst, dass es Zahlen $m_1 \neq m_2$ gibt, sodass $g^{m_1} = g^{m_2}$, daraus folgere man die Existenz von $m$ mit $g^m = e$ ($e$ das neutrale Element von $G$), woraus sich dann $g^{-1} = g^{m-1}$ ergibt.

20. Sei $\mathbb{C} = \langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ mit $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Man zeige, dass $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ ein Körper ist unter der Voraussetzung, dass $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ ein Körper ist.

21. (a) $(-1 + \sqrt{2}i)^7 = ?$

    (b) $\frac{(1-2i)^3}{1+3i} = ?$

22. $\sqrt{(7 - 2i)^2} = ?$

23. Man bestimme alle Werte von $\sqrt[4]{-4}$ in Polar- und kartesischer Darstellung und zeichne die Werte in der Gauß'schen Zahlenebene ein.

24. (a) Man bestimme in den komplexen Zahlen alle dritten Wurzeln der Zahl $i$ und gebe die Resultate sowohl in Polar- als auch in kartesischer Darstellung an.

    (b) Man benütze die Darstellung $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ um folgende Identitäten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ zu beweisen:

$$\frac{1}{e^{ix}} = e^{i(-x)}, \qquad e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

    (Hinweis zu (b): Hier darf nur die Definition der Multiplikation und des Kehrwerts in den komplexen Zahlen verwendet werden, nicht aber die Eigenschaft $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ für komplexe Zahlen $a$ und $b$.)

25. Man bestimme (auf systematischem Weg) in den komplexen Zahlen alle vierten Wurzeln der Zahl $z = 4i$. Dabei gebe man alle Werte für $\sqrt[4]{z}$ in Polardarstellung (= trigonometrischer Darstellung) und kartesischer Darstellung an und zeichne sie in der Gauß'schen Zahlenebene ein.

26. Für eine endliche Menge $M$ bezeichne $|M|$ die Anzahl der Elemente von $M$. Seien $A$ und $B$ endliche Mengen. Man begründe die Formel

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

    Wie sieht die entsprechende Formel für drei Mengen $A, B, C$ aus:

$$|A \cup B \cup C| = ?$$

    *Hinweis:* Man verwende Mengendiagramme.

27. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig gewahlte Zahl aus $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ durch 3 oder durch 5 teilbar ist, wobei jede Zahl aus $\Omega$ mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird.

    *Anleitung:* Man betrachte die Ereignisse $A$: *Zahl ist durch* 3 *teilbar*, $B$: *Zahl ist durch* 5 *teilbar* und verwende das Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie.

28. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig gewahlte Zahl aus $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 500\}$ durch 5 oder durch 7 teilbar ist, wobei jede Zahl aus $\Omega$ mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird.

    *Anleitung:* Man betrachte die Ereignisse $A$: *Zahl ist durch* 5 *teilbar*, $B$: *Zahl ist durch* 7 *teilbar* und verwende das Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie.

29. Sei $P$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Ereignisfeld $F(\Omega)$ und $A \in F(\Omega)$. Man zeige mit Hilfe der Eigenschaften von $P$ aus der Vorlesung, dass für das komplementäre Ereignis $A' = \Omega - A$ von $A$ gilt

$$P(A') = 1 - P(A).$$

30. Ein Versuch habe 3 mögliche Ausgange $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, und bezeichne $A$ das Ereignis $\{\omega_1, \omega_2\}$ bzw. $B$ das Ereignis $\{\omega_2, \omega_3\}$. Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P$ sei bekannt, dass

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

    Wie groß ist $P(\{\omega_2\})$? Man berechne $P(A|B)$ und $P(B|A)$. Sind $A$ und $B$ unabhängig?

31. Ein Versuch habe 3 mögliche Ausgange $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, und bezeichne $A$ das Ereignis $\{\omega_1, \omega_2\}$ bzw. $B$ das Ereignis $\{\omega_2, \omega_3\}$. Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P$ sei bekannt, dass
$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}.$$
Wie groß ist $P(\{\omega_3\})$? Man berechne $P(A|B)$ und $P(B|A)$. Sind $A$ und $B$ unabhängig?

32. Eine Virusinfektion habe zu einem gewissen Zeitpunkt eine Prävalenz von 0,001, d.h. aktuell ist 0,1 % der Bevolkerung mit dem Virus infiziert. Die Infektion kann mit Hilfe eines Tests überprüft werden, wobei (i) die Sensitivität des Tests 98 % betrage, d.h. die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass eine infizierte Person positiv getestet wird, ist 0,98, und (ii) die Spezifität des Tests 99,9 % betrage, d.h. die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht infizierte Person negativ getestet wird, ist 0,999.

   (a) Eine Million zufällig aus der Bevölkerung ausgewählte Personen werden getestet. Man vervollständige folgende Tabelle der erwarteten Werte bei der Testung:

| | infiziert | nicht infiziert | Summe |
|---|---|---|---|
| Test positiv | | | |
| Test negativ | | | |
| Summe | | | 1.000.000 |

   Aus den Tabellenwerten ermittle man, welcher Anteil an Infizierten unter den positiv Getesteten erwartet werden kann. (Bemerkung: Mit dem Satz von Bayes kann man die (bedingte) Wahrscheinlichkeit berechnen, dass eine Person mit dem Virus infiziert ist, wenn sie positiv getestet wurde.)

   (b) Eintausend Infektions-Verdachtsfälle, von denen 20 % tatsachlich infiziert sind, werden getestet. Man führe die gleichen Berechnungen wie in (a) durch.

   (c) Wir setzen jetzt voraus, dass wir die Pravalenz nicht kennen, die Signifikanz und die Spezifität des Tests aber so ist, wie am Beginn angegeben. Man zeige, dass man dann aus der erwarteten Anzahl von positiv/negativ Getesteten, d.h. nur aus den Werten in der ganz rechten Spalte der Tabelle in (a), die Prävalenz berechnen kann (bei einer konkreten Testung kann man die Prävalenz damit aus diesen Zahlen schätzen).

   Hinweis: Sowohl bei der Auswahl getesten Personen in (a) als auch bei der Testung in (a) und (b) kann man Folgendes benützen: Wenn zu Beginn bzw. im Einzelfall das Ergebnis $A$ mit Wahrscheinlichkeit $p$ eintritt, dann ist bei $n$-maligem unabhängigen Durchführen $np$ oft das Ergebnis $A$ zu erwarten (d.h. dass man bei oftmaligem $n$-fachen Durchführen diesen Wert im Durchschnitt erhalten wird; siehe auch Erwartungswert, Kapitel 3 der Vorlesung).

33. Man führe die Polynomdivision $(x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 1) : (x^2 - 2)$ durch.

   *Anleitung:* Man verfahre in Analogie zu folgendem Beispiel:

$$\begin{array}{lllll}
\text{1.Schritt}: & (x^2 & -2x & -5) & : (x+1) = x \\
 & -(x^2 & +x) & & \\ \hline
 & & -3x & -5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{2.Schritt}: & (x^2 & -2x & -5) & : (x+1) = x - 3 \\
 & -(x^2 & +x) & & \\ \hline
 & & -3x & -5 & \\
 & & -(-3x & -3) & \\ \hline
 & & & -2 &
\end{array}$$

Man reduziert die höchste auftretende Potenz im Zählerpolynom (durch Multiplizieren des Nennerpolynoms mit einer entsprechenden Potenz von $x$ und anschließender Subtraktion) so lange, bis das verbleibende Polynom einen echt kleineren Grad als das Nennerpolynom hat. Da in diesem Fall das Restpolynom $-2$ nach dem zweiten Schritt echt kleineren Grad als $x+1$ hat, lautet das Ergebnis der Division

$$\frac{x^2-2x-5}{x+1} = x-3+\frac{-2}{x+1} \ .$$

34. Sei $\alpha$ eine komplexe Zahl und $p(x)$ ein Polynom. Man zeige: Ist $\alpha$ eine Nullstelle von $p(x)$, so bleibt bei der Polynomdivision $p(x) : (x-\alpha)$ der Rest 0. Gilt auch der Umkehrschluss?

35. Man berechne alle Nullstellen von $p(x)$ und schreibe $p(x)$ als Produkt von Linearfaktoren:
    (a) $p(x) = x^2 + 2x + 2$
    (b) $p(x) = x^3 - 2x - 4$
    (c) $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

36. Man berechne alle Nullstellen von $p(x)$ und schreibe $p(x)$ als Produkt von Linearfaktoren:
    (a) $p(x) = x^2 - 4x + 13$
    (b) $p(x) = x^3 - 2x + 4$
    (c) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

37. Ausschließlich mittels der Grenzwertmethode zerlege man die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+2)(x+5)}$$

in Partialbrüche.

38. Ausschließlich mittels der Grenzwertmethode zerlege man die Funktion

$$f(x) = \frac{-4x^2+17x-12}{x(x-2)(x+3)}$$

in Partialbrüche.

39. Man zerlege die Funktion

$$f(x) = \frac{x^5-4x^4+9x^3-10x^2+18x-4}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4}$$

in Partialbrüche. Kann dabei die Grenzwertmethode angewendet werden?

40. Man zerlege die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^5-8x^4+20x^3-44x^2+48x-37}{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}$$

in Partialbrüche. Kann dabei die Grenzwertmethode angewendet werden?

41. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ ?

42. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{\cos nx}{2})^n}$ ?

43. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{n})^n$ ?

44. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ?

45. Man beweise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} = -1$.

46. Man berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$.

47. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ konvergent bzw. absolut konvergent?

48. Man beweise die *Divergenz* von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nb}$ für $a, b > 0$.

49. Lässt man linear polarisiertes gelbes Natriumlicht bei 20 °C durch eine 10 cm lange Schicht einer Rohrzuckerlösung von der Konzentration $c$ g/cm$^3$ hindurchtreten, so wird die Polarisationsebene annähernd um den Winkel (in Grad) $\alpha = 66{,}5\,c$ gedreht. Genauere Messungen liefern den Wert $\alpha = 66{,}5\,c + 0{,}00870\,c^2$. Noch genauere Versuche zeigen $\alpha = 66{,}5\,c + 0{,}00870\,c^2 - 0{,}000253\,c^3$. Falls weitere, exaktere Messungen ergeben, dass auch die letztgenannte Formel nicht ganz befriedigend ist, welcher Ansatz zur Berechnung von $\alpha$ wäre denkbar?

    Man gebe die einzelnen Näherungen von $\alpha$ als Funktionen von $c$ graphisch wieder.

50. Man entwickle die Funktion $\frac{1}{1+2x^2}$ in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x$ konvergiert diese Reihe?

    *Hinweis:* Man substituiere $u := -2x^2$ und beachte die Summenformel für die geometrische Reihe.

51. (a) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und gebe an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert und $f(x)$ darstellt. (Hinweis: Man setze $x^2 = -u$ und führe auf eine geometrische Reihe zurück.)

    (b) Gleiche Aufgabenstellung wie bei (a) für die Funktion $F(x) = \arctan x$. (Hinweis: Man beachte $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.)

52. Die Potenzreihenentwicklung der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ an der Entwicklungsstelle 0 lautet

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots, \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots.$$

    Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)\cdot\cos(x)$ indem man das Cauchyprodukt der obigen Reihen bis inklusive der 7. Potenz von $x$ angebe. Des weiteren vergleiche man diese Entwicklung mit jener von $\sin(2x)$ (welche direkt aus der Darstellung von $\sin(x)$ zu erhalten ist!) und bestätige damit die Formel $\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

53. Mit Hilfe des Cauchy-Produktes entwickle man die Funktion $f(x) = e^x \cos x$ in eine Reihe (Angabe der Entwicklung bis einschließlich der 5. Potenz von $x$).

54. Man entwickle die Funktion $\tan x$ im Punkt $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe (Angabe der Entwicklung bis einschließlich der 5. Potenz von $x$).

    *Anleitung:* Man setze die bekannten Reihenentwicklungen für $\sin x$ und $\cos x$ in $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ein, mache einen unbestimmten Ansatz $\tan x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, multipliziere mit $\cos x$ (Cauchy-Produkt!) und bestimme sukzessive die unbestimmten Werte $c_0, c_1, \ldots$ durch Vergleich der Koeffizienten bei den einzelnen Potenzen von $x$.

55. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$.

56. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$.

57. Es soll die spezifische Wärme mit Hilfe der Debye'schen Formel bestimmt werden, wonach die Atomwärme $C_V$ eines einfachen festen Körpers gegeben ist durch

$$C_V = \frac{d}{dT}\left(9RT\left(\frac{T}{\theta}\right)^3\int_0^{\frac{\theta}{T}}\frac{x^3}{e^x-1}\,dx\right).$$

$T$ ist dabei die absolute Temperatur, $\theta$ die sogenannte charakteristische Temperatur und $R$ die Gaskonstante.

*Hinweis:* Man entwickle $\frac{x}{e^x-1}$ in eine Potenzreihe.

58. Man entwickle die Funktion $\ln(1-x)$ in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x$ konvergiert diese Potenzreihe?

*Anleitung:* Man verwende $(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$ (warum?) und entwickle zunächst die abgeleitete Funktion (geometrische Reihe!). Nach erfolgter Integration beachte man $\ln 1 = 0$.

59. Man entwickle die Funktion $\ln(1+x^2)$ in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x$ konvergiert diese Potenzreihe?

*Anleitung:* Man verwende $\big(\ln(1+x^2)\big)' = \frac{2x}{1+x^2}$ und entwickle zunächst die abgeleitete Funktion (geometrische Reihe!). Nach erfolgter Integration beachte man $\ln 1 = 0$.

60. Das Wechselwirkungspotential diatomarer Moleküle wird oftmals in guter Näherung beschrieben durch folgende, Morse-Potential genannte Funktion:

$$V(r) = D(1 - e^{-a(r-r_0)})^2$$

($D$ ist die Dissoziationsenergie, $r_0$ der Gleichgewichtsabstand im Molekül, $a$ ein positiver Parameter).

Man approximiere die Funktion $V(r)$ in der Nähe des Gleichgewichtsabstandes durch eine bis zur 5. Potenz von $r - r_0$ entwickelte Taylor-Reihe.

61. Bei einem Versuch wird ein Kondensator bei 18 °C in verschiedene Flüssigkeiten eingebettet und seine Kapazität $C$ gemessen. Dabei ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte, welche den (bekannten) Werten der relativen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_r$ der einzelnen Substanzen gegenübergestellt sind.

| Substanz | $\varepsilon_r$ | $C$ (in $10^{-8}$ F) |
|---|---|---|
| $C_6H_5CH_3$ | 2,3 | 45 |
| $CH_3COOC_2H_5$ | 6,1 | 89 |
| $CH_3COOH$ | 9,7 | 131 |
| $(CH_3)_2CO$ | 21,5 | 320 |
| $C_2H_5OH$ | 26,0 | 402 |
| $C_6H_5NO_2$ | 36,4 | 525 |
| HCOOH | 58,0 | 860 |

Welcher Zusammenhang besteht zwischen $C$ und $\varepsilon_r$, und wie groß ist die Kapazität des Kondensators annähernd im Vakuum ($\varepsilon_r = 1$)?

*Hinweis:* Die Kapazität $C$ eines Kondensators ist eine Funktion $f(\varepsilon_r)$ der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_r$.