Mathematik für TCH Übung II

1. Man berechne die Dichte des Wassers bei 37 °C, wenn folgende Wertepaare für Temperatur t (in °C) und Dichte ρ (in g/cm^3) bekannt sind:

t (°C)	ρ (g/cm^3)
20	0,99823
30	0,99567
40	0,99224
50	0,98807
60	0,98324
70	0,97781

   Hinweis: Man ermittle den gesuchten Funktionswert von ρ bei 37 °C näherungsweise mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel.

2. Der Dampfdruck p des Wassers ist eine Funktion der Temperatur t. Es wurden folgende Wertepaare für p (in technischen Atmosphären) und t (in Grad Celsius) gemessen:

t (°C)	p (at)
50	0,126
100	1,03
150	4,85
200	15,86
250	40,56
300	87,6

   Ist die Funktion $p(t)$ eine quadratische Polynomfunktion?

   Anleitung: Man überprüfe die Annahme, dass $p(t)$ eine quadratische Polynomfunktion ist, indem man $p(t)$ mit Hilfe der gegebenen Funktionswerte für $t = 100, 150, 200$ durch eine quadratische Polynomfunktion interpoliert und sodann die gemessenen Dampfdruckwerte für $t = 50, 250, 300$ mit den interpolierten Werten an diesen Stellen vergleicht.

3. Aus den Werten $\phi(1{,}40) = 0{,}9192$, $\phi(1{,}50) = 0{,}9332$ und $\phi(1{,}60) = 0{,}9452$ berechne man mit Hilfe einer Interpolation durch eine quadratische Polynomfunktion näherungsweise $\phi(1{,}57)$.

4. Man bestimme näherungsweise das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\ln x}\, dx$.

5. Zur Überprüfung eines elektrochemischen Präparates wurde in regelmäßigen Zeitabständen die Stromstärke i der übergehenden Ladungen gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

t (in min)	i (in A)
0	4,00
15	3,60
30	3,28
45	2,96
60	2,68
75	2,44
90	2,20
105	2,00
120	1,80
135	1,64
150	1,48

Wie groß ist die während der gesamten Versuchsdauer von 2,5 Stunden übergegangene Ladungsmenge?

Hinweis: Bezeichnen $i(t)$ die Stromstärke zur Zeit t und T die Versuchsdauer, so ist die gesamte übergegangene Ladungsmenge gleich $\int_0^T i(t)\,dt$.

6. In der Debye'schen Theorie zur Berechnung der spezifischen Wärme fester Körper treten im Rahmen der sogenannten Debye'schen Formel Integrale der Form

$$I(u) = \int_0^u \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

mit $u \in (0, \infty)$ auf. Man berechne $I(1{,}5)$ näherungsweise mittels zweier verschiedener Verfahren der numerischen Integration, wobei man jeweils 0,25 und 0,125 als Schrittweiten wähle, und vergleiche die so erhaltenen Näherungswerte miteinander sowie mit dem tatsächlichen Wert $I(1{,}5) = 0{,}615495$.

7. Nach Born und Mayer lässt sich die potentielle Energie E zweier einwertiger Ionen, die im gebundenen Zustand als Molekül eine stabilere Konfiguration bilden als im isolierten Zustand, ausdrücken durch die Formel

$$E = -\frac{q^2}{r} + b\,e^{-r/R},$$

wobei r der Ionenabstand, q die Elementarladung und b sowie R zwei für die betreffenden Ionen charakteristische positive Konstanten sind.

Man berechne den „stabilen Abstand“ der Ionen im Molekül für die numerischen Werte $q = 2$, $b = 6$ und $R = 2$. Der stabile Abstand $r^\star$ ist jener Wert von r, bei dem die Potentialfunktion $E(r)$ ihr (einziges) relatives Minimum annimmt.

8. Gesucht ist eine in der Nähe von $x_0 = 0{,}9$ gelegene Nullstelle der Polynomfunktion $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$.

9. Gesucht ist die zwischen 0 und 1 liegende Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 3x^2$.

10. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens (mindestens 2 Schritte) berechne man den Wert der Lösung $y(x)$ an der Stelle $x = 0{,}2$.

11. Die Menge der Vibrationen eines N-atomigen Moleküls, dessen Atome unabhängig voneinander schwingen, ist dadurch angebbar, dass man für jedes einzelne Atom dessen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage beschreibt und diese Informationen zu einem Vektor zusammenfasst. Man zeige, dass man auf diese Weise aus den Schwingungszuständen des Moleküls einen Vektorraum konstruieren kann, dessen Dimension $3N$ ist.

12. Im Vektorraum der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen ist durch $(f, g) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ ein inneres Produkt definiert. Man suche eine Funktion $\neq 0$, welche zu $\cos(\pi t)$ orthogonal ist.

13. Im Anschauungsraum vorgegeben sei ein fester Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Man zeige, dass jeder beliebige Vektor $\vec{x}$ in eine Summe $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ zerlegt werden kann, sodass $\vec{y}$ parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{z}$ orthogonal zu $\vec{a}$ ist. Wie können die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ durch $\vec{x}$ und $\vec{a}$ ausgedrückt werden?

14. In einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gleichförmig rotierenden Bezugssystem (etwa der Erde) befinde sich in einem Punkt P ein „Massenpunkt“ M mit der Masse m. Für einen festen Punkt O auf der Rotationsachse bezeichne $\vec{r}$ den Vektor von O nach P. Falls der Massenpunkt M relativ zum rotierenden System in Ruhe ist, wirkt auf ihn nur die

Zentrifugalkraft $\vec{k}_1 = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$. Bewegt sich der Massenpunkt M aber relativ zum rotierenden System mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{c}$, so wirkt auf ihn außer der Zentrifugalkraft $\vec{k}_1$ noch die Corioliskraft $\vec{k}_2 = 2m(\vec{c} \times \vec{\omega})$.

Man zeige, dass $\vec{k}_1$ nicht von der Wahl des Punktes O auf der Rotationsachse abhängt, und veranschauliche durch Skizzen die Richtungen der beiden Kräfte $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$.

15. Ein Massenpunkt M mit der Masse m (in g) rotiere um eine durch den Ursprung des rechtwinkeligen Koordinatensystems gehende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (1,1,1)$, die Dimension von $\|\vec{\omega}\|$ sei s^{-1}, und die Bahnkurve von M enthalte den Punkt $(1,0,0)$. Man bestimme den Betrag $\|\vec{k}\|$ der auf M wirkenden Zentrifugalkraft $\vec{k}$ und den Betrag $\|\vec{v}\|$ der Umlaufgeschwindigkeit $\vec{v}$ von M.

    Hinweis: Siehe Aufgabe 14, und $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

16.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

17. Die Anzahl der unabhängigen Teilreaktionen einer chemischen Reaktion, die m Substanzen betrifft, kann aus den Konzentrationen dieser m Substanzen zu $p+1$ verschiedenen Zeitpunkten $0, t_1, t_2, ..., t_p$ berechnet werden ($p \geq m$). Dazu bildet man die $m \times p$ Matrix $C = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = c_i(t_k) - c_i(0)$, wobei $c_i(t)$ die Konzentration der i-ten Substanz zum Zeitpunkt t bedeutet. Der Rang von C gibt dann die Anzahl der unabhängigen Teilreaktionen an.

    Man bestimme die Anzahl der unabhängigen Teilreaktionen unter der Annahme, dass folgende Werte von Konzentrationen gemessen wurden:

t	0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
$c_1(t)$	4,0	2,8	1,9	1,3	1,0	0,7
$c_2(t)$	3,5	2,9	2,7	2,6	2,4	2,2
$c_3(t)$	0	0,3	0,8	1,2	2,3	4,1
$c_4(t)$	0	1,5	2,1	2,4	1,8	0,5

18. Zu den Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
bilde man alle Produkte $A_i A_j$ $(i,j = 1,2,3)$, welche definiert sind.

19. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$
Ist A nicht-singulär? Man berechne A^{-1}, soferne dies möglich ist.

20. Für die Reaktion
$$x_1\mathrm{KI} + x_2\mathrm{MnO_2} + x_3\mathrm{H_2SO_4} \longrightarrow x_4\mathrm{I_2} + x_5\mathrm{MnSO_4} + x_6\mathrm{K_2SO_4} + x_7\mathrm{H_2O}$$
bestimme man die stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_7$, indem man für jedes Element die Bilanzgleichung aufstelle und das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren löse.

21. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2\,x_5 & = & 1 \\
x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\
x_1 & & & + & x_3 & + & 3\,x_4 & + & 5\,x_5 & = & 2 \\
-x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0
\end{array}$$

22. Man untersuche die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme und berechne gegebenenfalls alle ihre Lösungen:

(a) $$\begin{array}{rcrcr} 2\,x_1 & - & 4\,x_2 & = & 1 \\ 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & = & 3 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcr} 4\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 0 \\ 7\,x_1 & - & 5\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} 6\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & 1 \\ -9\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 2 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcr} 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & = & 24 \\ 15\,x_1 & + & 20\,x_2 & = & 30 \end{array}$$

23. In einem elektrischen Feld besteht zwischen der Feldstärke $\mathcal{E}$ und der elektrischen Verschiebung $\mathcal{D}$ ein „linearer Zusammenhang“ $\mathcal{D} = \varepsilon\,\mathcal{E}$. Im anisotropen Medium (z. B. in einem Kristall) ist ε eine symmetrische Matrix.

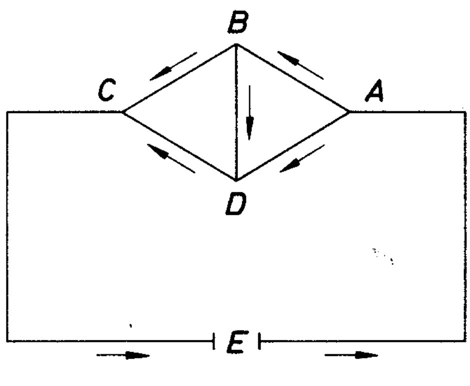
Man bestimme die Feldstärke $\mathcal{E}$, wenn bekannt ist, dass

$$\varepsilon = 10^{-12}\begin{pmatrix} 12 & 11 & 14 \\ 11 & 13 & 15 \\ 14 & 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{D} = 10^{-11}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(Die Zahlenangaben beziehen sich auf das MKSA-System; ε in As/Vm, $\mathcal{D}$ in As/m^2.)

24. Abbildung 1 zeigt eine Wheatstone'sche Brücke, der aus einer Stromquelle von der elektromotorischen Kraft E ein galvanischer Strom zugeführt wird. Die Widerstände in AB, BC, CD, DA, BD seien r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, und der Widerstand von C zurück zur Stromquelle sei r, die entsprechenden Stromstärken seien i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, und die Stromstärke in EA sei i. Die elektromotorische Kraft E sowie sämtliche Widerstände seien bekannt.

Abbildung 1:



Man berechne i_5.

Anleitung: Gemäß den Kirchhoff'schen Gesetzen gilt:

$$\begin{aligned} -i_1 - i_4 + i &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_5 &= 0 \\ i_2 + i_3 - i &= 0 \\ r_1 i_1 - r_4 i_4 + r_5 i_5 &= 0 \\ r_2 i_2 - r_3 i_3 - r_5 i_5 &= 0 \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 + r i &= E \end{aligned}$$

25. Ein Unternehmen benötigt zur Weiterverarbeitung drei Mineralien M_1, M_2 und M_3. Diese Mineralien werden von dem Unternehmen selbst in einem Separationsprozess aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 gewonnen. Die Ausbeute hinsichtlich der drei Mineralien ist für die beiden Rohstoffe verschieden, und zwar kann man aus 1 t Rohstoff R_1 0,03 t von M_1, 0,125 t von M_2 und 0,4 t von M_3 gewinnen, wohingegen man aus 1 t Rohstoff R_2 0,6 t von M_1, 0,25 t von M_2 und 0,05 t von M_3 erhält.

    In einem Monat werden mindestens 30 t von Mineral M_1, mindestens 25 t M_2 und mindestens 20 t M_3 für die weitere Produktion benötigt. Welche Mengen an Rohstoffen R_1 und R_2 sollte das Unternehmen kaufen, wenn 1 t R_1 250 EUR und 1 t R_2 200 EUR kostet und die Ausgaben möglichst gering sein sollen?

26. Benzin mit 1,0 % Bleigehalt soll durch Mischen von vier Benzinsorten A, B, C, D möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei haben die Sorten A, B, C, D einen Bleigehalt von 1,0 , 0,7 , 2,0 bzw. 0,3 % , und ihre Kosten pro Liter betragen 0,55 , 1,00 , 0,40 bzw. 0,65 EUR.

27. Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ drei Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$ und $\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Die Matrix A einer Lineartransformation $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sei

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Wie lautet die Matrix der Lineartransformation f bezüglich $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?

28. Durch welche Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich erhält man sämtliche Symmetrieoperationen des (in Abbildung 2 veranschaulichten) H_2O–Moleküls? Man zeige, dass die gefundenen Abbildungen Lineartransformationen sind und gebe bezüglich einer passend gewählten Orthonormalbasis die ihnen entsprechenden Matrizen an.

29. Durch welche Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich erhält man sämtliche Symmetrieoperationen des (in Abbildung 3 veranschaulichten) NH_3–Moleküls? Wie lauten die diesen Abbildungen bezüglich einer gewählten Orthonormalbasis entsprechenden Matrizen?

30. Die Energiematrix E eines π-Elektronensystems vom linearen Molekültyp ABA besitzt in der Hückel-Molekular-Orbital-Näherung die Gestalt

    $$E = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha_2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

    ($\beta \neq 0$). Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix E.

Abbildung 2:

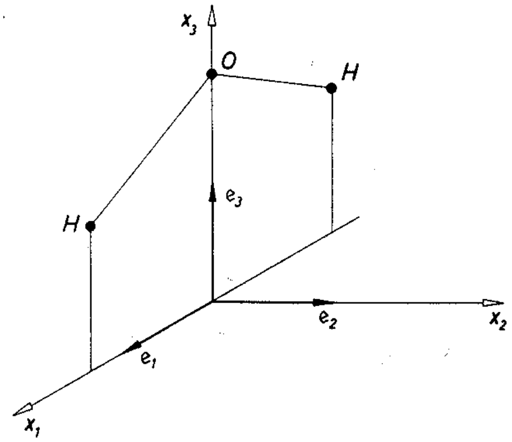
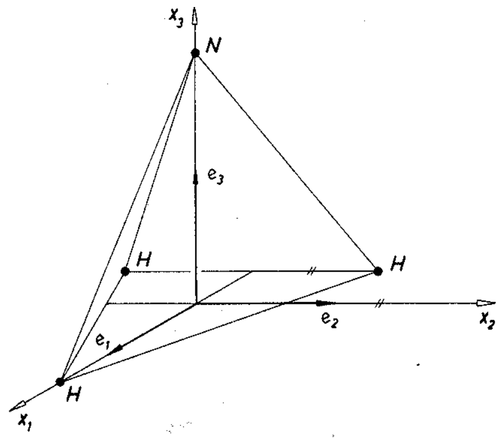


Abbildung 3:



31. Man berechne die Eigenwerte der Hamilton-Matrix

$$H_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

von Butadien und vergleiche sie mit den Eigenwerten der Hamilton-Matrix

$$H_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

zweier isolierter Äthylen-Moleküle (α, β negativ).

Hinweis: Man zeige, dass mit $u = \frac{\alpha - E}{\beta}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix} = \beta^4 \begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}.$$

32. Man bestimme eine zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine *orthogonale* Matrix T, sodass $T^{-1}AT = D$.

33. Für die folgenden Funktionen $f(x, y)$ prüfe man nach, in welchem Bereich $f_{xy} = f_{yx}$ ist:

(a) $\frac{x^2}{1+y^2}$

(b) $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$

(c) $\sqrt{xy^3}$

Hinweise: Insbesondere sind auch die Definitionsbereiche dieser Funktionen und ihrer partiellen Ableitungen zu bestimmen.
Es gilt *nicht stets*, dass $\sqrt{xy^3} = \sqrt{x}\sqrt{y^3}$, z. B. für $x = y = -1$.

34. Die innere Energie eines Gases ist im Allgemeinen eine Funktion des (Mol-)Volumens V und der absoluten Temperatur T. In der Thermodynamik wird gezeigt, dass die Änderung der inneren Energie U eines Gases bei Änderung seines Volumens, aber Konstanthaltung der Temperatur, mit dem Druck und der Temperatur gemäß $\frac{\partial U}{\partial V} = T(\frac{\partial p}{\partial T}) - p$ zusammenhängt.

Man berechne die Größe $\frac{\partial U}{\partial V}$ sowohl für ein ideales als auch für ein reales Gas.

35. Man zeige, dass unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen

(a) ein Gradientenfeld wirbelfrei ist,

(b) $\nabla(\nabla \times \vec{f}) = 0$.

36. Welches der folgenden Vektorfelder (f_1, f_2, f_3) ist ein Gradientenfeld, und wie lautet eine zugehörige Stammfunktion?

(a) $(z, z, x + y)$

(b) $(2x + yz, 2y + xz, xy^2)$

(c) $\left(y\sqrt{1+z}\ ,\ x\sqrt{1+z}\ ,\ \frac{xy}{2\sqrt{1+z}}\right)$

37. Man zeige, dass die Differentialform

$$V^{\kappa-1}dT + (\kappa - 1)TV^{\kappa-2}dV$$

(κ konstant) ein vollständiges Differential ist, und bestimme dazu eine Stammfunktion $F(T, V)$.

38. Man zeige, dass das elektrostatische Feld einer Punktladung ein Potential besitzt, und berechne dieses.

Anleitung: Ein punktförmiger Ladungsträger mit der Ladung Q, der sich im Koordinatenursprung befindet, erzeugt im Raum ein elektrisches Feld (f_1, f_2, f_3) mit

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = cQ\frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei c eine positive Konstante ist, die von der gewählten Ladungseinheit abhängt.

39. Mit Hilfe der Kettenregel berechne man alle partiellen Ableitungen höchstens 2. Ordnung von $F(x,y) = f(g(x,y))$

    (a) allgemein,

    (b) speziell für $f(z) = \sqrt{a + z^2}$, $\;g(x,y) = y \sin x$.

40. Der Zustand eines reinen Stoffes wird beschrieben durch das vollständige Differential $dU = TdS - p\,dV$, wobei U die innere Energie, T die absolute Temperatur, S die Entropie, p den Druck und V das Volumen bedeuten. Erweisen sich die Zustandsvariablen S und V als unzweckmäßig, dann können statt diesen etwa S und p als unabhängige Variablen gewählt werden. Zudem führt man als neue Variable die Enthalpie $H = U + pV$ ein.

    Man zeige, dass die Enthalpie eine Stammfunktion von $(T(S,p), V(S,p))$ ist. (D. h., die Enthalphie ist das thermodynamische Potential für die unabhängigen Variablen Entropie und Druck.)

41. Voraussetzungen wie in Aufgabe 40. Vom Standpunkt der Praxis ist die Wahl von Temperatur und Volumen als unabhängige Variablen (anstatt S und V) oft zweckmäßiger. Nun wird eine neue Variable f, die freie Energie, definiert, welche mit U, T und S durch die Gleichung $f = U - TS$ zusammenhängt.

    Man zeige: Die freie Energie ist eine Stammfunktion von $(-p(V,T), -S(V,T))$.

42. Die theoretische Durchrechnung des Joule-Thomson-Effektes ergibt, dass mit einer kleinen Druckänderung $\triangle p$ des Gases eine Temperaturänderung $\triangle T$ verbunden ist, die sich näherungsweise aus der Gleichung

$$\triangle T = \frac{T\frac{\partial V}{\partial T} - V}{C_p} \triangle p$$

    berechnen lässt (T absolute Temperatur, V Molvolumen, p Druck, C_p Molwärme des Gases; C_p ist als eine Konstante zu betrachten).

    Man zeige, dass ein ideales Gas keinen Joule-Thomson-Effekt aufweist, und berechne den Joule-Thomson-Effekt eines realen Gases.

43. Gesucht ist ein linearer Ausdruck in p und V, welcher eine gute Näherung für die Temperatur eines realen Gases darstellt, wenn p nur wenig von p_0 und V nur wenig von V_0 abweicht. (p ist der Druck und V das Molvolumen des Gases.)

44. Man entwickle die folgenden Funktionen nach dem Taylor'schen Satz bis zu den 2. Potenzen (mit Restglied R_2):

    (a) $f(x,y) = x^2 y + 3\,y - 2$ im Punkt $(1,-2)$

    (b) $f(x,y) = y/x$ im Punkt $(1,1)$

    (c) $f(x,y) = e^{x+2y}$ im Punkt $(1,1)$

45. Die Dichte ρ eines Stoffes soll aus den Ergebnissen unabhängiger Messreihen, welche für die Masse und das Volumen des Stoffes durchgeführt wurden, berechnet werden. Die Messungen der Masse ergaben das Mittel $\bar{p} = 10{,}287$ g und als mittleren Fehler des Mittelwertes $m_{\bar{p}} = 0{,}008$ g; die Bestimmung des Volumens V lieferte den Mittelwert $\bar{V} = 2{,}319$ cm^3 und als mittleren Fehler des Mittelwertes $m_{\bar{V}} = 0{,}006$ cm^3.

46. Man bestimme die Brennweite f einer Linse, wenn Messungen der Gegenstandsweite g die Werte $\bar{g} \pm m_g = 250{,}0 \pm 0{,}27$ cm und der Bildweite b die Werte $\bar{b} \pm m_b = 12{,}1 \pm 0{,}04$ cm ergeben haben.

    Hinweis: $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.

47. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)\,.$$

48. Man bestimme das *absolute* Maximum der Funktion

$$f(x,y) = xy(3-x-y)$$

auf dem Bereich

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0 \,\wedge\, 0 \leq y \leq -x+3\}\,.$$

49. Zwei isotrope Medien M_1 und M_2 mit den Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2 mögen den (x,y,z)–Raum ausfüllen. M_1 befinde sich im „Halbraum“ $z>0$, M_2 im „Halbraum“ $z<0$. Ein Lichtstrahl von einem Punkt A_1 des ersten Halbraums (Medium M_1) zu einem Punkt A_2 des zweiten Halbraums (Medium M_2) nimmt den Weg, der die kürzeste Zeit erfordert. Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in M_1 bzw. M_2 folgt, dass sich der Lichtstrahl innerhalb eines einzelnen Mediums geradlinig fortpflanzt. Der Weg des Lichtes ist also bekannt, wenn man weiß, in welchem Punkt P die Trennebene $z=0$ getroffen wird.

   Man zeige, dass P in derjenigen Ebene liegt, welche die Gerade durch A_1 und A_2 enthält und normal auf die Trennebene steht, und berechne den Quotienten aus den Sinus von Einfalls- und Brechungswinkel des Lichtstrahls (Snellius'sches Brechungsgesetz).

   Anleitung: Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass $A_1 = (0,0,a)$ und $A_2 = (b,0,c)$ mit $a>0,\ b\geq 0,\ c<0$ gilt.

50. Man bestimme die zu den folgenden Wertepaaren (T_i, V_i) gehörende Ausgleichsgerade (T Temperatur in K, V Volumen in m^3).

i	1	2	3	4	5
T_i	300	320	340	360	380
V_i	2,09	2,19	2,21	2,33	2,41

51. Zu den Messwerten

x	1	6	9	13	16
y	2,2	0,6	−0,6	−1,9	−3, 1

   bestimme man die Ausgleichsgerade.

52. In einem Wechselstromkreis berechnet sich der Gesamtwiderstand Z gemäß der Formel

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

   (R ist der Ohm'sche Widerstand, X_L der induktive Widerstand, X_C der kapazitive Widerstand).

   (a) Klären Sie durch eine elementare Überlegung: In welchem Verhältnis zueinander müssen bei einem fest vorgegebenen Ohm'schen Widerstand R die beiden Widerstände X_L und X_C stehen, damit der Gesamtwiderstand Z möglichst klein wird?

   (b) Untersuchen Sie die Bedingungen (partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung) für relative Minima von Z. Für welche Wertepaare (X_L, X_C) sind die Bedingungen erfüllt?

53. Man bestimme die möglichen relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = x+y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2-1=0$ mittels der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

54. Es soll die wirtschaftlich optimale Höhe einer Rektifikationskolonne bestimmt werden. Dabei sollen die Amortisationskosten als proportional zur Bodenzahl x_1 und die Betriebskosten als proportional zum Rücklaufverhältnis x_2 angenommen werden. (Die als Kostenkoeffizienten in die Proportionalitäten eingehenden Faktoren seien als bekannt vorausgesetzt.) Bei gegebenem Durchsatz und festgelegten Destillationsqualitäten verfügt die Rektifikationskolonne nur über einen einzigen Freiheitsgrad, da zwischen der Bodenzahl x_1 und dem Rücklaufverhältnis x_2 ein Zusammenhang besteht. Dieser Zusammenhang sei wiedergegeben durch die Gleichung

$$(x_1 - x_{1\,\mathrm{min}})(x_2 - x_{2\,\mathrm{min}}) = a\,.$$

Darin bedeute $x_{1\,\mathrm{min}}$ die minimale Bodenzahl (für $x_2 \to \infty$), $x_{2\,\mathrm{min}}$ das minimale Rücklaufverhältnis (für $x_1 \to \infty$), und a sei eine (als bekannt angenommene) Konstante.

55. Ein Leiter L_0 der Länge l_0 verzweigt sich in einem seiner Enden in k einzelne Leiter L_s mit den Längen l_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$, wobei die Stromstärke in den Teilleitern $i_0, i_1, \ldots, i_k$ sei. Gefragt ist, wie die Querschnittflächen $q_0, q_1, \ldots, q_k$ der einzelnen Teilleiter zu wählen sind, damit bei gegebener Potentialdifferenz E und gegebenem Widerstand c des Leitungsdrahtes für die Ketten $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1)$, $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_2)$, ..., $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_k)$ die geringste Materialmenge benötigt wird.

Hinweis:

$$c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_s i_s}{q_s}\right) = E \quad \text{für} \;\; s = 1, 2, \ldots, k\,.$$

56. Für den Bereich $B = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2 \wedge 1 \le y \le 4\}$ berechne man folgende Bereichsintegrale:

   (a) $\iint_B x^2 y^3\, dx\, dy$
   (b) $\iint_B (x + y)\, dx\, dy$
   (c) $\iint_B \ln(2x + 3y)\, dx\, dy$

57. Sei C gleich der oberen Halbellipse in Mittelpunktslage, mit den Halbachsen a und b, von $(-a, 0)$ bis $(a, 0)$. Man berechne

$$\int_C \left((2 + y + x^2)\, dx + (x^2 + 8\,y^2)\, dy\right).$$

58. Gegeben seien die elektrischen Felder (in Newton/Coulomb)

$$E_1 = \left(\frac{y}{1 + xy}, \frac{x}{1 + xy}\right) \quad \text{und} \quad E_2 = \left(\frac{y}{1 + x}, \frac{x}{1 + y}\right).$$

Man berechne die Arbeit, die man leisten muss, um eine Einheitsladung (1 Coulomb) in E_1 bzw. E_2 entlang der folgenden beiden Wege W_1 und W_2 zu verschieben.

$$W_1 \colon x = t,\; y = t, \quad t \in [0, 1]$$
$$W_2 \colon x = t^2,\; y = t, \quad t \in [0, 1]$$

59. Welche Arbeit leistet das elektrostatische Feld

$$\left(\frac{cQx_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \frac{cQx_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \frac{cQx_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}\right),$$

wenn eine positive Einheitsladung vom Punkt (a_1, a_2, a_3) auf irgendeinem Weg ins Unendliche bewegt wird?

60. Man berechne die Länge der Kurve

$$K = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid x = 4\cos t,\; y = 4\sin t,\; z = 3t,\; t \in [0, 2\pi]\}.$$