Mathematik für TCH Übung II

1. Man berechne die Dichte des Wassers bei 37 °C, wenn folgende Wertepaare für Temperatur t (in °C) und Dichte ρ (in g/cm^3) bekannt sind:

t (°C)	ρ (g/cm^3)
20	0,99823
30	0,99567
40	0,99224
50	0,98807
60	0,98324
70	0,97781

   Hinweis: Man ermittle den gesuchten Funktionswert von ρ bei 37 °C näherungsweise mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel.

2. Der Dampfdruck p des Wassers ist eine Funktion der Temperatur t. Es wurden folgende Wertepaare für p (in technischen Atmosphären) und t (in Grad Celsius) gemessen:

t (°C)	p (at)
50	0,126
100	1,03
150	4,85
200	15,86
250	40,56
300	87,6

   Ist die Funktion $p(t)$ eine quadratische Polynomfunktion?

   Anleitung: Man überprüfe die Annahme, dass $p(t)$ eine quadratische Polynomfunktion ist, indem man $p(t)$ mit Hilfe der gegebenen Funktionswerte für $t = 100, 150, 200$ durch eine quadratische Polynomfunktion interpoliert und sodann die gemessenen Dampfdruckwerte für $t = 50, 250, 300$ mit den interpolierten Werten an diesen Stellen vergleicht.

3. Bei Eichung eines Platin/Platinrhodium-Thermoelements wurden zu drei Temperaturen t (in ° C) die elektromotorischen Kräfte e (in mV) ermittelt (siehe Tabelle). Man interpoliere die Funktion $t = t(e)$ durch ein quadratisches Polynom, wobei man die Interpolation auf zwei Arten, nämlich sowohl mit der Newtonschen als auch die Lagrangeschen Interpolationsformel durchführe. Weiters bestimme man mit Hilfe des interpolierenden Polynoms die Temperatur, die einem Ablesewert von 9,00 mV entspricht.

t	e
630,5	5,535
960,5	9,117
1063,0	10,301

4. Aus den Werten $\phi(1{,}40) = 0{,}9192$, $\phi(1{,}50) = 0{,}9332$ und $\phi(1{,}60) = 0{,}9452$ berechne man mit Hilfe einer Interpolation durch eine quadratische Polynomfunktion näherungsweise $\phi(1{,}57)$.

5. Man löse die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, 4$, durch eine Polynomfunktion $y = p(x)$ für die Werte

x_i	-1	0	1	2
y_i	14	3	0	5

(a) mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel,

(b) mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel.

6. Man löse die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$, durch eine Polynomfunktion $y = p(x)$ für die Werte

x_i	-1	0	1
y_i	10	5	4

   (a) mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel,

   (b) mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel.

7. Man interpoliere die Funktion $f(x) = \sin x$ an den Stellen $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ und $\frac{3\pi}{2}$ durch eine Polynomfunktion $p(x)$ minimalen Grades und rechne nach, dass auch $f(2\pi) = p(2\pi)$ gilt.

8. Man berechne mit Hilfe der Keplerschen Fassregel einen Näherungswert für das Integral $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ und prüfe nach, dass man den gleichen Näherungswert erhält, wenn man die zu integrierende Funktion e^{-x^2} an den drei Stellen -1, 0 und 1 durch ein Polynom $p(x)$ interpoliert und anschließend $\int\limits_{-1}^{1} p(x)\, dx$ (exakt) berechnet.

9. Man berechne das Integral $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, \mathrm{d}x$ näherungsweise, indem man

   (a) die Funktion $f(x) = \sqrt{\cos x}$ an den drei Stellen $x = -\pi/2$, 0 und $\pi/2$ durch eine Polynomfunktion $p(x)$ interpoliere und $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x)\, \mathrm{d}x$ berechne,

   (b) die Keplersche Fassregel anwende.

   Warum ist das Ergebnis bei (a) und (b) gleich?

10. Man bestimme näherungsweise das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\ln x}\, dx$.

11. Man berechne das Integral $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

    (a) näherungsweise mit Hilfe der Sehnentrapezformel, wobei man das Integrationsintervall $[0, 1]$ in vier gleich große Teilintervalle teile,

    (b) näherungsweise mit Hilfe der Simpsonformel, wobei man die gleichen Teilungspunkte wie bei (a) verwende,

    (c) exakt mit Hilfe einer Stammfunktion (Grundintegral, siehe Formelsammlung),

    und vergleiche die erhaltenen Werte.

12. Man berechne das Integral
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$$
durch ein numerisches Näherungsverfahren auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma genau.

    Hinweis: Man beachte $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Begründung angeben!) und verwende beim Näherungsverfahren mindestens 4 Teilintervalle.

13. Zur Überprüfung eines elektrochemischen Präparates wurde in regelmäßigen Zeitabständen die Stromstärke i der übergehenden Ladungen gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

t (in min)	i (in A)
0	4,00
15	3,60
30	3,28
45	2,96
60	2,68
75	2,44
90	2,20
105	2,00
120	1,80
135	1,64
150	1,48

Wie groß ist die während der gesamten Versuchsdauer von 2,5 Stunden übergegangene Ladungsmenge?

Hinweis: Bezeichnen $i(t)$ die Stromstärke zur Zeit t und T die Versuchsdauer, so ist die gesamte übergegangene Ladungsmenge gleich $\int_0^T i(t)\,dt$.

14. In der Debye'schen Theorie zur Berechnung der spezifischen Wärme fester Körper treten im Rahmen der sogenannten Debye'schen Formel Integrale der Form

$$I(u) = \int_0^u \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

mit $u \in (0, \infty)$ auf. Man berechne $I(1{,}5)$ näherungsweise mittels zweier verschiedener Verfahren der numerischen Integration, wobei man jeweils 0,25 und 0,125 als Schrittweiten wähle, und vergleiche die so erhaltenen Näherungswerte miteinander sowie mit dem tatsächlichen Wert $I(1{,}5) = 0{,}615495$.

15. Nach Born und Mayer lässt sich die potentielle Energie E zweier einwertiger Ionen, die im gebundenen Zustand als Molekül eine stabilere Konfiguration bilden als im isolierten Zustand, ausdrücken durch die Formel

$$E = -\frac{q^2}{r} + b\,e^{-r/R},$$

wobei r der Ionenabstand, q die Elementarladung und b sowie R zwei für die betreffenden Ionen charakteristische positive Konstanten sind.

Man berechne den „stabilen Abstand“ der Ionen im Molekül für die numerischen Werte $q = 2$, $b = 6$ und $R = 2$. Der stabile Abstand $r^\star$ ist jener Wert von r, bei dem die Potentialfunktion $E(r)$ ihr (einziges) relatives Minimum annimmt.

16. Bei der Herleitung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes spielt die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

eine wichtige Rolle. Man zeige, dass es genau ein $x^* > 0$ gibt mit $f(x^*) = 5$ und bestimme x^* mit Hilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens auf vier Dezimalstellen hinter dem Komma genau.

Hinweis: Für die eindeutige Existenz von x^* bestimme man z.B. $f(1)$, $f(10)$ und zeige, dass $f(x)$ streng monoton wachsend für $x > 0$. Dann argumentiere man unter Verwendung der Stetigkeit von $f(x)$.

17. Gesucht ist eine in der Nähe von $x_0 = 0{,}9$ gelegene Nullstelle der Polynomfunktion $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$.

18. Gesucht ist die zwischen 0 und 1 liegende Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 3x^2$.

19. Die Lösungen der Gleichung $\tan x = x$ spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Der Vergleich der beiden Funktionsgraphen $y = x$ und $y = \tan x$ zeigt, dass unendlich viele Lösungen existieren, in jedem Intervall $((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, genau eine. Man ermittle die kleinste positive Lösung x^* dieser Gleichung auf vier Dezimalstellen genau mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens.

    Hinweis: Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $x < \tan x$. Daher liegt x^* im Intervall $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; um einen geeigneten Startwert für das Newtonverfahren zu finden, untersuche man die Funktion $\tan x - x$ in diesem Intervall genauer.

20. Man löse die Differentialgleichung $y'(x) = 2y(x) + x^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ näherungsweise mit Hilfe sukzessiver Approximation (Verfahren von Picard), wobei man drei Iterationsschritte durchführe.

    Die so erhaltenen Näherungslösungen $y^{[0]}(x)$, $y^{[1]}(x)$, $y^{[2]}(x)$ und $y^{[3]}(x)$ vergleiche man mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, indem man diese Funktion als Potenzreihe mit Entwicklungsstelle 0 darstelle.

21. Mit dem Verfahren der sukzessiven Approximation (auch Verfahren von Picard bzw. wiederholte Quadratur genannt) berechne man Näherungslösungen der Differentialgleichung

    $$y'(x) = y^2(x) - y(x) + 2x$$

    zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Die ersten vier Näherungsfunktionen $y^{[0]}(x), \dots, y^{[3]}(x)$ sind anzugeben.

22. Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

    Man bestimme dazu die ersten 5 Näherungslösungen $y^{[0]}(x), \dots, y^{[4]}(x)$ nach der Methode der sukzessiven Approximation (Verfahren von Picard).

23. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens (mindestens 2 Schritte) berechne man den Wert der Lösung $y(x)$ an der Stelle $x = 0{,}2$.

24. In der Kinetik chemischer Reaktionen erster Ordnung treten Differentialgleichungen der Form

    $$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - y$$

    auf. Man löse die angegebene Differentialgleichung näherungsweise an der Stelle $x = 0{,}2$ für die Anfangsbedingung $y(0) = -1$ mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens (a) mit Schrittweite $h = 0{,}2$ bzw. (b) mit Schrittweite $h = 0{,}1$. Man vergleiche die erhaltenen Näherungswerte mit der exakten Lösung $y(x) = e^{-x}(x-1)$.

25. Man ermittle einen Näherungswert für die Lösung $y(x)$ an der Stelle $x = 1{,}2$ der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$ (a) mit Hilfe des Euler'schen Polygonzugverfahrens, (b) mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens, wobei man jeweils die Schrittweite $h = 0{,}1$ verwende.

    Man vergleiche den erhaltenen Näherungswert mit der exakten Lösung $y(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ an der Stelle $x = 1{,}2$.

26. Für die Differentialgleichung $y'(x) = 2x \cdot y(x)^2$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ bestimme man mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens Näherungswerte für die Lösung $y(x)$ an den Stellen $x = 1{,}1$ und $x = 1{,}2$ und vergleiche die erhaltenen Werte mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{1}{2-x^2}$.

    Wie würde der Vergleich aussehen, wenn man für $x = 1{,}3$, $x = 1{,}4$, ... weitere Näherungswerte mit dem Runge-Kutta Verfahren berechnet? (Hinweis: Man skizziere den Funktionsgraphen der exakten Lösung $y(x)$ für x im Intervall $[1, 2]$ und betrachte insbesondere $x = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$.)

27. Man prüfe jeweils nach, ob im Vektorraum $\langle F(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}\rangle$ die folgenden Elemente linear unabhängig sind:

    (a) $e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x}$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig

    (b) $e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig

    (c) $1,\ x,\ x^2$

28. Man prüfe jeweils nach, ob die Menge aller Elemente $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die die folgende Gleichung erfüllen, einen Unterraum im Vektorraum $\langle \mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}\rangle$ bildet. Wenn ja, gebe man eine Basis dieses Unterraums an.

    (a) $x - 3y + 2z = 0$,

    (b) $x - 3y + 2z = -1$.

    Hinweis: Zur Überprüfung verwende man das Unterraumkriterium aus der Vorlesung. Um eine Basis zu finden, ermittle man eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge der Gleichung (ist in beiden Fällen eine Ebene!)

29. Die Menge der Vibrationen eines N-atomigen Moleküls, dessen Atome unabhängig voneinander schwingen, ist dadurch angebbar, dass man für jedes einzelne Atom dessen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage beschreibt und diese Informationen zu einem Vektor zusammenfasst. Man zeige, dass man auf diese Weise aus den Schwingungszuständen des Moleküls einen Vektorraum konstruieren kann, dessen Dimension $3N$ ist.

30. Im Vektorraum der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen ist durch $(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$ ein inneres Produkt definiert. Man suche eine Funktion $\neq 0$, welche zu $\sin(\pi t)$ orthogonal ist.

31. Im Anschauungsraum vorgegeben sei ein fester Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Man zeige, dass jeder beliebige Vektor $\vec{x}$ in eine Summe $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ zerlegt werden kann, sodass $\vec{y}$ parallel zu $\vec{a}$ und $\vec{z}$ orthogonal zu $\vec{a}$ ist. Wie können die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ durch $\vec{x}$ und $\vec{a}$ ausgedrückt werden?

32. In einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gleichförmig rotierenden Bezugssystem (etwa der Erde) befinde sich in einem Punkt P ein „Massenpunkt“ M mit der Masse m. Für einen festen Punkt O auf der Rotationsachse bezeichne $\vec{r}$ den Vektor von O nach P. Falls der Massenpunkt M relativ zum rotierenden System in Ruhe ist, wirkt auf ihn nur die Zentrifugalkraft $\vec{k}_1 = m\,\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$. Bewegt sich der Massenpunkt M aber relativ zum rotierenden System mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{c}$, so wirkt auf ihn außer der Zentrifugalkraft $\vec{k}_1$ noch die Corioliskraft $\vec{k}_2 = 2m(\vec{c} \times \vec{\omega})$.

    Man zeige, dass $\vec{k}_1$ nicht von der Wahl des Punktes O auf der Rotationsachse abhängt, und veranschauliche durch Skizzen die Richtungen der beiden Kräfte $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$.

33. Ein Massenpunkt M mit der Masse m (in g) rotiere um eine durch den Ursprung des rechtwinkeligen Koordinatensystems gehende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (1, 1, 1)$, die Dimension von $\|\vec{\omega}\|$ sei s^{-1}, und die Bahnkurve von M enthalte den Punkt

$(1,0,0)$. Man bestimme den Betrag $\|\vec{k}\|$ der auf M wirkenden Zentrifugalkraft $\vec{k}$ und den Betrag $\|\vec{v}\|$ der Umlaufgeschwindigkeit $\vec{v}$ von M.

Hinweis: Siehe Aufgabe 32, und $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

34.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = ?$$

35. Bestimmen Sie (unter Verwendung von Zeilen-/Spaltenumformungen und Entwicklungssatz) die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & 8 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Was folgt daraus für die Spaltenvektoren von A? Wie groß ist der Rang von A?

36. Die Anzahl der unabhängigen Teilreaktionen einer chemischen Reaktion, die m Substanzen betrifft, kann aus den Konzentrationen dieser m Substanzen zu $p+1$ verschiedenen Zeitpunkten $0, t_1, t_2, ..., t_p$ berechnet werden ($p \geq m$). Dazu bildet man die $m \times p$ Matrix $C = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = c_i(t_k) - c_i(0)$, wobei $c_i(t)$ die Konzentration der i-ten Substanz zum Zeitpunkt t bedeutet. Der Rang von C gibt dann die Anzahl der unabhängigen Teilreaktionen an.

Man bestimme die Anzahl der unabhängigen Teilreaktionen unter der Annahme, dass folgende Werte von Konzentrationen gemessen wurden:

t	0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
$c_1(t)$	4,0	2,8	1,9	1,3	1,0	0,7
$c_2(t)$	3,5	2,9	2,7	2,6	2,4	2,2
$c_3(t)$	0	0,3	0,8	1,2	2,3	4,1
$c_4(t)$	0	1,5	2,1	2,4	1,8	0,5

37. Zu den Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

bilde man alle Produkte A_iA_j $(i, j = 1, 2, 3)$, welche definiert sind.

38. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ist A nicht-singulär? Man berechne A^{-1}, soferne dies möglich ist.

39. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} u & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit dem Parameter $u \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme alle Werte von u, sodass A singulär ist.

(b) Für $u = 10$ bestimme man die inverse Matrix A^{-1}.

40. Man untersuche die Lösbarkeit folgender Gleichungssysteme und berechne gegebenenfalls alle ihre Lösungen:

(a) $$\begin{array}{rcrcr} 2\,x_1 & - & 4\,x_2 & = & 1 \\ 3\,x_1 & + & 5\,x_2 & = & 3 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcr} 4\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 0 \\ 7\,x_1 & - & 5\,x_2 & = & 0 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} 6\,x_1 & - & 2\,x_2 & = & 1 \\ -9\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 2 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcr} 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & = & 24 \\ 15\,x_1 & + & 20\,x_2 & = & 30 \end{array}$$

41. Man gebe alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 9x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

Stellt man obiges Gleichungssystem in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dar, so gebe man auch die im Zuge des Verfahrens ermittelten Ränge der Systemmatrix A und der erweiterten Systemmatrix $(A \vdots \vec{b})$ an.

42. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

43. Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsalgorithmus gebe man sämtliche reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \end{array}$$

44. Man gebe alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems an, dabei verwende man den Gaußschen Eliminationsalgorithmus:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & +5x_2 & -5x_3 & +7x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & = & 8 \\ 4x_1 & +5x_2 & +5x_3 & -9x_4 & = & 11 \end{array}$$

45. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2\,x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & 3\,x_4 & + & 5\,x_5 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

46. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem in den Variablen $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -3 \\ -2x & - & 2y & + & az & = & 5 \\ 3x & + & ay & & & = & -12 \end{array}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Konstante ist. Unter Verwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens und/oder durch Berechnung geeigneter Determinanten bestimme man

(a) alle Werte von a, für die obiges Gleichungssystem eindeutig lösbar ist und gebe diese Lösung an,

(b) alle Werte von a, für die obiges Gleichungssystem keine Lösung besitzt,

(c) alle Werte von a, für die obiges Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt und gebe alle Lösungen an.

47. Gegeben sei in den reellen Zahlen das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & u & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dem Vektor der Unbekannten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und der rechten Seite $\vec{b} = (4, 0, -1)^T$. Dabei ist der Wert u in der Koeffizientenmatrix zunächst eine unbestimmte reelle Zahl.

(a) Man bestimme jenen Wert von u, für den das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ keine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzt.

(b) Für den in (a) gefundenen Wert von u löse man das Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsalgorithmus'.

48. Für die Reaktion

$$x_1 \mathrm{KI} + x_2 \mathrm{MnO_2} + x_3 \mathrm{H_2SO_4} \longrightarrow x_4 \mathrm{I_2} + x_5 \mathrm{MnSO_4} + x_6 \mathrm{K_2SO_4} + x_7 \mathrm{H_2O}$$

bestimme man die stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_7$, indem man für jedes Element die Bilanzgleichung aufstelle und das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren löse.

49. Man bestimme die stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_5$ folgender Reaktion, indem man für jedes Element die Bilanzgleichung aufstelle und das entstehende lineare Gleichungssystem systematisch mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren löse:

$$x_1\, \mathrm{C_6H_8O_7} + x_2\, \mathrm{CaCO_3} \longrightarrow x_3\, \mathrm{Ca_3(C_6H_5O_7)_2} + x_4\, \mathrm{CO_2} + x_5\, \mathrm{H_2O}$$

50. Durch Einleiten von Chlor in heiße Kalilauge entstehen die Reaktionsprodukte Kaliumchlorat, Kaliumchlorid und Wasser:

$$x_1\, \mathrm{KOH} + x_2\, \mathrm{Cl_2} \rightarrow x_3\, \mathrm{KClO_3} + x_4\, \mathrm{KCl} + x_5\, \mathrm{H_2O}$$

Man bestimme die stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_5$ dieser Reaktion, indem man für jedes Element die Bilanzgleichung aufstelle und das entstehende lineare Gleichungssystem systematisch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren löse.

51. Man bestimme die stöchiometrischen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_6$ der folgenden Reaktion:

$$x_1\, \mathrm{As_2S_3} + x_2\, \mathrm{HNO_3} + x_3\, \mathrm{H_2O} \longrightarrow x_4\, \mathrm{H_3AsO_4} + x_5\, \mathrm{H_2SO_4} + x_6\, \mathrm{NO}$$

Man stelle für jedes Element die Bilanzgleichung auf und löse das entstehende lineare Gleichungssystem systematisch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Anzugeben ist jene Lösung mit den kleinstmöglichen ganzzahligen positiven Werten $x_1, \ldots, x_6$.

52. In einem elektrischen Feld besteht zwischen der Feldstärke $\mathcal{E}$ und der elektrischen Verschiebung $\mathcal{D}$ ein „linearer Zusammenhang“ $\mathcal{D} = \varepsilon\,\mathcal{E}$. Im anisotropen Medium (z. B. in einem Kristall) ist ε eine symmetrische Matrix.

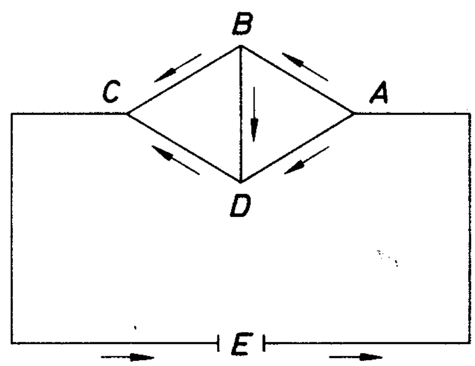
Man bestimme die Feldstärke $\mathcal{E}$, wenn bekannt ist, dass

$$\varepsilon = 10^{-12}\begin{pmatrix} 12 & 11 & 14 \\ 11 & 13 & 15 \\ 14 & 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{D} = 10^{-11}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(Die Zahlenangaben beziehen sich auf das MKSA-System; ε in As/Vm, $\mathcal{D}$ in As/m^2.)

53. Abbildung 1 zeigt eine Wheatstone'sche Brücke, der aus einer Stromquelle von der elektromotorischen Kraft E ein galvanischer Strom zugeführt wird. Die Widerstände in AB, BC, CD, DA, BD seien r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, und der Widerstand von C zurück zur Stromquelle sei r, die entsprechenden Stromstärken seien i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, und die Stromstärke in EA sei i. Die elektromotorische Kraft E sowie sämtliche Widerstände seien bekannt.

Abbildung 1:



Man berechne i_5.

Anleitung: Gemäß den Kirchhoff'schen Gesetzen gilt:

$$\begin{aligned} -i_1 - i_4 + i &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_5 &= 0 \\ i_2 + i_3 - i &= 0 \\ r_1 i_1 - r_4 i_4 + r_5 i_5 &= 0 \\ r_2 i_2 - r_3 i_3 - r_5 i_5 &= 0 \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 + r i &= E \end{aligned}$$

54. Man stelle das folgende lineare Gleichungssystem in den Variablen $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x - y + z &= -2 \\ 3x - 2y - z &= 1 \\ 2x - y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ dar und bestimme den Lösungsvektor $\vec{x}$

(a) mit Hilfe der Cramer'schen Regel,

(b) durch Berechnung der inversen Matrix A^{-1} und $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

55. Ein Unternehmen benötigt zur Weiterverarbeitung drei Mineralien M_1, M_2 und M_3. Diese Mineralien werden von dem Unternehmen selbst in einem Separationsprozess aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 gewonnen. Die Ausbeute hinsichtlich der drei Mineralien ist für die beiden Rohstoffe verschieden, und zwar kann man aus 1 t Rohstoff R_1 0,03 t von M_1, 0,125 t von M_2 und 0,4 t von M_3 gewinnen, wohingegen man aus 1 t Rohstoff R_2 0,6 t von M_1, 0,25 t von M_2 und 0,05 t von M_3 erhält.

    In einem Monat werden mindestens 30 t von Mineral M_1, mindestens 25 t M_2 und mindestens 20 t M_3 für die weitere Produktion benötigt. Welche Mengen an Rohstoffen R_1 und R_2 sollte das Unternehmen kaufen, wenn 1 t R_1 250 EUR und 1 t R_2 200 EUR kostet und die Ausgaben möglichst gering sein sollen?

56. Vier Legierungen L_1, L_2, L_3 und L_4 haben folgende Zusammensetzungen:

	L_1	L_2	L_3	L_4
Titan	6 %	1 %	4 %	3 %
Chrom	1 %	3 %	—	4 %

    Die Preise der Legierungen L_1, L_2, L_3 und L_4 stehen im Verhältnis $4:1:2:2$. Aus L_1, L_2, L_3 und L_4 soll durch Mischen eine neue Legierung hergestellt werden, die genau 4 % Titan und 2 % Chrom enthält. In welchem Verhältnis müssen die Ausgangslegierungen gemischt werden, um eine möglichst kostengünstige neue Legierung zu erhalten?

    Hinweis: Das Aufstellen der Nebenbedingungen dieser linearen Optimierungsaufgabe führt auf ein Gleichungssystem mit 4 Variablen und 3 Gleichungen. Anstatt die Basislösungen einzeln zu berechnen, löse man dieses Gleichungssystem allgemein mit dem Gaußschen Eliminationsalgorithmus (das führt auf eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter) und untersuche anschließend die einzelnen Basislösungen durch entsprechende Wahl des freien Parameters.

57. Benzin mit 10 % Ethanolgehalt soll durch Mischen von vier Benzinsorten A, B, C, D möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei haben die Sorten A, B, C, D einen Ethanolgehalt von 10, 7, 20 bzw. 3 %, und ihre Kosten pro Liter betragen 0,55, 1,00, 0,40 bzw. 0,65 EUR.

58. Eine pharmazeutische Fabrik soll täglich mindestens 2 kg des Produkts P_1 und 3 kg des Produkts P_2 erzeugen. Diese Mengen kann sie aus den Rohstoffen R_1 und/oder R_2 gewinnen. Aus 1 t R_1 lassen sich 1 kg P_1 und 1 kg P_2 herstellen, pro t R_2 dagegen 1 kg P_1 und 2 kg P_2. Der Preis beträgt 80 EUR/t für R_1 und 100 EUR/t für R_2. Gesucht sind jene Mengen von R_1 und R_2, die pro Tag einzukaufen sind, sodass der Bedarf befriedigt wird, gleichzeitig aber die gesamten Rohmaterialkosten minimal sind.

    Man formuliere die Aufgabe als lineare Optimierungsaufgabe, bestimme alle Basislösungen und das Optimum/die Optima mit Hilfe des Hauptsatzes der linearen Optimierung.

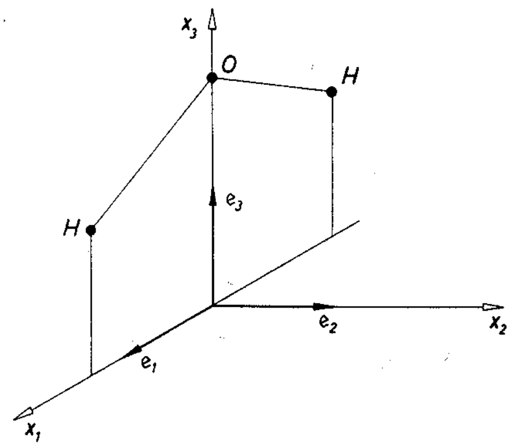
59. Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ drei Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$ und $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Die Matrix A einer Lineartransformation $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Wie lautet die Matrix der Lineartransformation f bezüglich $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$?

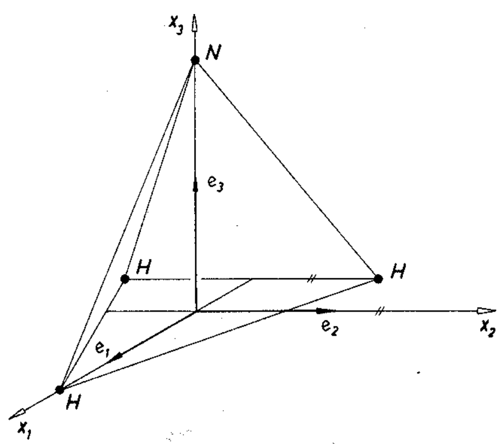
60. Durch welche Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich erhält man sämtliche Symmetrieoperationen des (in Abbildung 2 veranschaulichten) H_2O–Moleküls? Man zeige, dass die gefundenen Abbildungen Lineartransformationen sind und gebe bezüglich einer passend gewählten Orthonormalbasis die ihnen entsprechenden Matrizen an.

Abbildung 2:



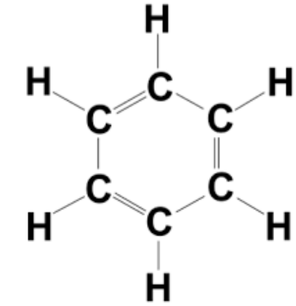
61. Durch welche Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich erhält man sämtliche Symmetrieoperationen des (in Abbildung 3 veranschaulichten) NH_3–Moleküls? Wie lauten die diesen Abbildungen bezüglich einer gewählten Orthonormalbasis entsprechenden Matrizen?

Abbildung 3:



62. Wir fassen das Benzol-Molekül auf als ebenes Molekül im 3-dimensionalen Anschauungsraum, wobei die H-Atome und die C-Atome konfokale regelmäßige 6-Ecke bilden (siehe Graphik).

Man wähle ein kartesisches Koordinatensystem im Anschauungsraum, d.h. einen Ursprung und eine Orthonormalbasis (ONB) im zugehörigen Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, sodass (i) alle Symmetrieoperationen von Benzol Lineartransformationen des $\mathbb{R}^3$ sind, und (ii) die Symmetrieoperationen von Benzol möglichst einfache Darstellungsmatrizen bzgl. dieser ONB besitzen.



Unter den Symmetrieoperationen von Benzol wähle man (a) eine Drehung ($\neq$ id), (b) eine Spiegelung und (c) eine Drehspiegelung aus und gebe jeweils die zugehörige (orthogonale) Darstellungsmatrix an.

Man zeichne gewählte Basis und Ursprung in nebenstehender Graphik (und/oder eigener Skizze) ein.

63. Man bestimme alle Werte $x, y, z \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist.

Weiters beschreibe man in allen sich ergebenden Fällen die durch A induzierte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ geometrisch als Drehung bzw. Spiegelung durch Angabe von Drehwinkel bzw. Spiegelgeraden.

64. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 7 & 10 & 1 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

(a) Man bestimme alle Eigenwerte von A.

(b) Zu einem Eigenwert von A bestimme man alle zugehörigen Eigenvektoren.

65. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 8 & 12 \\ 6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

(a) Man bestimme alle Eigenwerte von A.

(b) Zu einem der Eigenwerte (freie Wahl) von A bestimme man alle Eigenvektoren.

66. Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

67. Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

68. Die Energiematrix E eines π-Elektronensystems vom linearen Molekültyp ABA besitzt in der Hückel-Molekular-Orbital-Näherung die Gestalt

$$E = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha_2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

($\beta \neq 0$). Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix E.

69. Man berechne die Eigenwerte der Hamilton-Matrix

$$H_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

von Butadien und vergleiche sie mit den Eigenwerten der Hamilton-Matrix

$$H_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

zweier isolierter Äthylen-Moleküle (α, β negativ).

Hinweis: Man zeige, dass mit $u = \frac{\alpha - E}{\beta}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix} = \beta^4 \begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}.$$

70. Die Hamilton-Matrix von Äthylen lautet

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta \text{ negativ}).$$

Man bestimme für Äthylen alle möglichen molekularen Orbitale $\vec{\psi}$ und jeweils die Energie eines Elektrons im Zustand $\vec{\psi}$.

71. Die Eigenschaften der Hamilton-Matrix von Ethen sind verwandt zu jenen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A und bestimme eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D, sodass $T^t \cdot A \cdot T = D$ gilt, d. h. T transformiert A auf Diagonalgestalt (hier bezeichnet T^t die transponierte Matrix zu T).

72. Man bestimme eine zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ähnliche Diagonalmatrix D sowie eine *orthogonale* Matrix T, sodass $T^{-1}AT = D$.

73. Man berechne alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

74. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ soll auf Diagonalgestalt transformiert werden. Das heißt, man gebe eine Diagonalmatrix D und eine Transformationsmatrix T an, sodass $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$ gilt.

75. Man transformiere die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ auf Diagonalform. Es ist eine orthogonale Matrix T anzugeben, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Die Gleichung $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$ ist nachzurechnen.

76. Man transformiere die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer orthogonalen Matrix auf Diagonalform. D. h. es ist eine orthogonale Matrix T anzugeben, sodass $T^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot T = D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist und T^{t} die transponierte Matrix zu T bezeichnet. Die Gleichung $T^{\mathrm{t}} \cdot A \cdot T = D$ ist nachzurechnen.

77. Für die folgenden Funktionen $f(x, y)$ prüfe man nach, in welchem Bereich $f_{xy} = f_{yx}$ ist:

(a) $\frac{x^2}{1+y^2}$

(b) $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)}$

(c) $\sqrt{xy^3}$

Hinweise: Insbesondere sind auch die Definitionsbereiche dieser Funktionen und ihrer partiellen Ableitungen zu bestimmen.
Es gilt *nicht stets*, dass $\sqrt{xy^3} = \sqrt{x}\sqrt{y^3}$, z. B. für $x = y = -1$.

78. Die innere Energie eines Gases ist im Allgemeinen eine Funktion des (Mol-)Volumens V und der absoluten Temperatur T. In der Thermodynamik wird gezeigt, dass die Änderung der inneren Energie U eines Gases bei Änderung seines Volumens, aber Konstanthaltung der Temperatur, mit dem Druck und der Temperatur gemäß $\frac{\partial U}{\partial V} = T(\frac{\partial p}{\partial T}) - p$ zusammenhängt.

    Man berechne die Größe $\frac{\partial U}{\partial V}$ sowohl für ein ideales als auch für ein reales Gas.

79. Man zeige, dass unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen

    (a) ein Gradientenfeld wirbelfrei ist,

    (b) $\nabla(\nabla \times \vec{f}) = 0$.

80. Welches der folgenden Vektorfelder $(f_1, f_2, f_3)^T$ ist ein Gradientenfeld, und wie lautet eine zugehörige Stammfunktion?

    (a) $(z, z, x + y)^T$

    (b) $(2x + yz, 2y + xz, xy^2)^T$

    (c) $\left(y\sqrt{1+z}\ ,\ x\sqrt{1+z}\ ,\ \frac{xy}{2\sqrt{1+z}}\right)^T$

81. Man zeige, dass die Differentialform

$$V^{\kappa-1}dT + (\kappa - 1)TV^{\kappa-2}dV$$

    (κ konstant) ein vollständiges Differential ist, und bestimme dazu eine Stammfunktion $F(T, V)$.

82. Man zeige, dass das elektrostatische Feld einer Punktladung ein Gradientenfeld ist und berechne alle Stammfunktionen.

    Anleitung: Ein punktförmiger Ladungsträger mit der Ladung Q, der sich im Koordinatenursprung befindet, erzeugt im Raum ein elektrisches Feld $(f_1, f_2, f_3)^T$ mit

$$f_i(x_1, x_2, x_3) \; = \; cQ\frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

    wobei c eine positive Konstante ist, die von der gewählten Ladungseinheit abhängt.

83. Man überprüfe, ob das Vektorfeld $\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))^T$, $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, ein Gradientenfeld ist und bestimme gegebenenfalls alle Stammfunktionen von $\vec{f}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 2xyz^2 - 3y^2z + 2z^3, \\ f_2(x, y, z) &= x^2z^2 - 6xyz + 10yz^2 - 4y^3, \\ f_3(x, y, z) &= 2x^2yz - 3xy^2 + 6xz^2 + 10y^2z + 5 \end{aligned}$$

84. Man überprüfe, ob das Vektorfeld

$$\vec{f}(x, y, z) = (3x^2yz^2 - 2xy^2 + 2z^2 + 3, x^3z^2 - 2x^2y - 6yz - 10y, 2x^3yz + 4xz - 3y^2 + 2z)^T$$

    ein Gradientenfeld ist und bestimme gegebenenfalls alle Stammfunktionen von $\vec{f}(x, y, z)$.

85. Man überprüfe, ob das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) - \cos(z-x) \\ -\cos(x-y) - \sin(y-z) \\ \sin(y-z) + \cos(z-x) \end{pmatrix}, \quad x,y,z \in \mathbb{R}$$

ein Gradientenfeld ist und berechne gegebenenfalls alle Stammfunktionen dieses Feldes.

86. Das elektrische Feld eines im Ursprung ruhenden elektrischen Dipols mit Dipolmoment $\vec{p} = (1,0,0)^T$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)^T.$$

Man zeige, dass $\vec{E}(x,y,z)$ im Definitionsbereich $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\}$ ein Gradientenfeld ist und bestimme alle Stammfunktionen $F(x,y,z)$ von $\vec{E}(x,y,z)$.

Anleitung: Man überprüfe zuerst die Integrabilitätsbedingungen für $\vec{E}(x,y,z) = (E_1,E_2,E_3)^T$, und bei der Bestimmung der Stammfunktion beginne man mit der Darstellung

$$F(x,y,z) = \int \frac{3xy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,dy$$

und substituiere bei der Berechnung des Integrals $x^2+y^2+z^2 = u$. Die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial x} = E_1$ (und $\frac{\partial F}{\partial z} = E_3$) verwende man erst danach.

87. Mit Hilfe der Kettenregel berechne man alle partiellen Ableitungen höchstens 2. Ordnung von $F(x,y) = f(g(x,y))$

(a) allgemein,

(b) speziell für $f(z) = \sqrt{a+z^2}$, $\quad g(x,y) = y\sin x$.

88. Der Zustand eines reinen Stoffes wird beschrieben durch das vollständige Differential $dU = TdS - p\,dV$, wobei U die innere Energie, T die absolute Temperatur, S die Entropie, p den Druck und V das Volumen bedeuten. Erweisen sich die Zustandsvariablen S und V als unzweckmäßig, dann können statt diesen etwa S und p als unabhängige Variablen gewählt werden. Zudem führt man als neue Variable die Enthalpie $H = U + pV$ ein.

Man zeige, dass die Enthalpie eine Stammfunktion von $(T(S,p), V(S,p))$ ist. (D. h., die Enthalphie ist das thermodynamische Potential für die unabhängigen Variablen Entropie und Druck.)

89. Voraussetzungen wie in Aufgabe 88. Vom Standpunkt der Praxis ist die Wahl von Temperatur und Volumen als unabhängige Variablen (anstatt S und V) oft zweckmäßiger. Nun wird eine neue Variable f, die freie Energie, definiert, welche mit U, T und S durch die Gleichung $f = U - TS$ zusammenhängt.

Man zeige: Die freie Energie ist eine Stammfunktion von $(-p(V,T), -S(V,T))$.

90. Die theoretische Durchrechnung des Joule-Thomson-Effektes ergibt, dass mit einer kleinen Druckänderung $\triangle p$ des Gases eine Temperaturänderung $\triangle T$ verbunden ist, die sich näherungsweise aus der Gleichung

$$\triangle T = \frac{T\frac{\partial V}{\partial T} - V}{C_p}\,\triangle p$$

berechnen lässt (T absolute Temperatur, V Molvolumen, p Druck, C_p Molwärme des Gases; C_p ist als eine Konstante zu betrachten).

Man zeige, dass ein ideales Gas keinen Joule-Thomson-Effekt aufweist, und berechne den Joule-Thomson-Effekt eines realen Gases.

91. Aus der Van der Waalsschen Zustandsgleichung eines realen Gases

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$

leite man auf zwei Arten eine Formel für $\frac{\partial V}{\partial T}$ (bei konstantem p) her:

(a) Man berechne direkt aus obiger Gleichung $\frac{\partial T}{\partial V}$ und benütze die Beziehung $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}$.

(b) Man forme obige Gleichung auf die Gestalt $F(p, V, T) = 0$ um und benütze die Beziehung $\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}}$.

92. Gesucht ist ein linearer Ausdruck in p und V, welcher eine gute Näherung für die Temperatur eines realen Gases darstellt, wenn p nur wenig von p_0 und V nur wenig von V_0 abweicht. (p ist der Druck und V das Molvolumen des Gases.)

93. Man entwickle die folgenden Funktionen nach dem Taylor'schen Satz bis zu den 2. Potenzen (mit Restglied R_2):

(a) $f(x, y) = x^2 y + 3\,y - 2$ im Punkt $(1, -2)$

(b) $f(x, y) = y/x$ im Punkt $(1, 1)$

(c) $f(x, y) = e^{x+2y}$ im Punkt $(1, 1)$

94. Man bestimme die Taylorentwicklung der Funktion $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ an der Entwicklungsstelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ bis inklusive der zweiten Ordnung (ohne Angabe des Restglieds). Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an den Funktionsgraphen von $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, 1)$? Weiters rechne man nach, dass $f(x, y)$ eine harmonische Funktion ist, d.h. $\Delta f(x, y) = 0$ ist (Δ ist der Laplace-Operator).

95. Man gebe die lineare und die quadratische Taylorapproximation $T_1(x, y)$ und $T_2(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = e^{x+y} \cdot \cos(x - y)$ an der Entwicklungsstelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ an. Wie kann man den Funktionsgraphen von $f(x, y)$ gegeben durch $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ geometrisch interpretieren? Was entspricht in dieser Hinsicht dem Funktionsgraphen von $T_1(x, y)$?

96. Die Dichte ρ eines Stoffes soll aus den Ergebnissen unabhängiger Messreihen, welche für die Masse und das Volumen des Stoffes durchgeführt wurden, berechnet werden. Die Messungen der Masse ergaben das Mittel $\bar{p} = 10{,}287$ g und als mittleren Fehler des Mittelwertes $m_{\bar{p}} = 0{,}008$ g; die Bestimmung des Volumens V lieferte den Mittelwert $\bar{V} = 2{,}319$ cm^3 und als mittleren Fehler des Mittelwertes $m_{\bar{V}} = 0{,}006$ cm^3.

97. Man bestimme die Brennweite f einer Linse, wenn Messungen der Gegenstandsweite g die Werte $\bar{g} \pm m_g = 250{,}00 \pm 0{,}27$ cm und der Bildweite b die Werte $\bar{b} \pm m_b = 12{,}10 \pm 0{,}04$ cm ergeben haben.

Hinweis: $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$.

98. Die van-der-Waals-Gleichung für (ein Mol) Sauerstoff lautet

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

mit $a = 137{,}8$ und $b = 0{,}0318$, die Gaskonstante beträgt $R = 8{,}314$. Wir fassen Druck p (in kPa), Volumen V (in l) und Temperatur T (in K) als Zufallsvariable auf und haben die unabhängigen Größen V und T in der Form Mittelwert $\pm$ Standardabweichung gegeben: $V = 10{,}0 \pm 0{,}1$, $T = 380{,}0 \pm 0{,}5$.

Man ermittle mit Hilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes den Mittelwert und die Standardabweichung für den Druck p.

99. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

100. Man berechne die relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 4xy + y^3 - 5y$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

101. Man bestimme alle relativen Extremwerte und Sattelpunkte der Funktion:

$$f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 2y^3 - 3y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

102. Man bestimme alle relativen Extremwerte und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = -x^3 + x^2 + xy^2 - y^2$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

103. Man bestimme die relativen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{-(x^2+y^2)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

104. Man bestimme die relativen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + y^2 - y$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

105. Man bestimme alle relativen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - y^3 + y^2$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

106. Man bestimme alle relativen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = 2x^2y + 3xy^2 - 6xy$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

107. Man bestimme alle relativen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 4x^2 - xy^2 + 4x$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

108. Man ermittle alle relativen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

109. Man bestimme das *absolute* Maximum der Funktion

$$f(x,y) = xy(3-x-y)$$

auf dem Bereich

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0 \,\wedge\, 0 \leq y \leq -x+3\}\,.$$

110. Man berechne die absoluten Extrema der Funktion

$$z = f(x,y) = x^2 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Man beachte (und begründe!) die Eigenschaften $f(x,y) \geq 0$ und $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0$, wobei $(x,y) \to \infty$ bedeutet, dass $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$.

111. Zwei isotrope Medien M_1 und M_2 mit den Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2 mögen den (x,y,z)–Raum ausfüllen. M_1 befinde sich im „Halbraum“ $z > 0$, M_2 im „Halbraum“ $z < 0$. Ein Lichtstrahl von einem Punkt A_1 des ersten Halbraums (Medium M_1) zu einem Punkt A_2 des zweiten Halbraums (Medium M_2) nimmt den Weg, der die kürzeste Zeit erfordert. Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in M_1 bzw. M_2 folgt, dass sich der Lichtstrahl innerhalb eines einzelnen Mediums geradlinig fortpflanzt. Der Weg des Lichtes ist also bekannt, wenn man weiß, in welchem Punkt P die Trennebene $z = 0$ getroffen wird.

Man zeige, dass P in derjenigen Ebene liegt, welche die Gerade durch A_1 und A_2 enthält und normal auf die Trennebene steht, und berechne den Quotienten aus den Sinus von Einfalls- und Brechungswinkel des Lichtstrahls (Snellius'sches Brechungsgesetz).

Anleitung: Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass $A_1 = (0,0,a)$ und $A_2 = (b,0,c)$ mit $a > 0,\ b \geq 0,\ c < 0$ gilt.

112. Man bestimme die zu den folgenden Wertepaaren (T_i, V_i) gehörende Ausgleichsgerade (T Temperatur in K, V Volumen in m^3).

i	1	2	3	4	5
T_i	300	320	340	360	380
V_i	2,09	2,19	2,21	2,33	2,41

113. Zu den Messwerten

x	1	6	9	13	16
y	2,2	0,6	−0,6	−1,9	−3, 1

bestimme man die Ausgleichsgerade.

114. In einem Wechselstromkreis berechnet sich der Gesamtwiderstand Z gemäß der Formel

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

(R ist der Ohm'sche Widerstand, X_L der induktive Widerstand, X_C der kapazitive Widerstand).

(a) Klären Sie durch eine elementare Überlegung: In welchem Verhältnis zueinander müssen bei einem fest vorgegebenen Ohm'schen Widerstand R die beiden Widerstände X_L und X_C stehen, damit der Gesamtwiderstand Z möglichst klein wird?

(b) Untersuchen Sie die Bedingungen (partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung) für relative Minima von Z. Für welche Wertepaare (X_L, X_C) sind die Bedingungen erfüllt?

115. Man bestimme die möglichen relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ mittels der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

116. Man bestimme die absoluten Extremwerte der Funktion $f(x,y) = 2y - 3x$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$ unter Verwendung der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode.

Man gebe an, welche Teilmenge (Kurve!) in $\mathbb{R}^2$ durch die Nebenbedingung festgelegt wird, auf der die Funktion f maximiert/minimiert werden soll und argumentiere, warum die durch die Lagrangesche Multiplikatorenmethode gefundenen Kandidaten absolute Extremwerte sind.

117. Es soll die wirtschaftlich optimale Höhe einer Rektifikationskolonne bestimmt werden. Dabei sollen die Amortisationskosten als proportional zur Bodenzahl x_1 und die Betriebskosten als proportional zum Rücklaufverhältnis x_2 angenommen werden. (Die als Kostenkoeffizienten in die Proportionalitäten eingehenden Faktoren seien als bekannt vorausgesetzt.) Bei gegebenem Durchsatz und festgelegten Destillationsqualitäten verfügt die Rektifikationskolonne nur über einen einzigen Freiheitsgrad, da zwischen der Bodenzahl x_1 und dem Rücklaufverhältnis x_2 ein Zusammenhang besteht. Dieser Zusammenhang sei wiedergegeben durch die Gleichung

$$(x_1 - x_{1\,\min})(x_2 - x_{2\,\min}) = a\,.$$

Darin bedeute $x_{1\,\min}$ die minimale Bodenzahl (für $x_2 \to \infty$), $x_{2\,\min}$ das minimale Rücklaufverhältnis (für $x_1 \to \infty$), und a sei eine (als bekannt angenommene) Konstante.

118. Ein Leiter L_0 der Länge l_0 verzweigt sich in einem seiner Enden in k einzelne Leiter L_s mit den Längen l_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$, wobei die Stromstärke in den Teilleitern $i_0, i_1, \ldots, i_k$ sei. Gefragt ist, wie die Querschnittflächen $q_0, q_1, \ldots, q_k$ der einzelnen Teilleiter zu wählen sind, damit bei gegebener Potentialdifferenz E und gegebenem Widerstand c des Leitungsdrahtes für die Ketten $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1)$, $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_2)$, $\ldots$, $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_k)$ die geringste Materialmenge benötigt wird.

Hinweis:

$$c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_s i_s}{q_s}\right) = E \qquad \text{für} \;\; s = 1, 2, \ldots, k\,.$$

119. Man berechne die absoluten Extrema der Funktion $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

Man gebe auch eine geometrische Interpretation dieser Aufgabe an.

Hinweise: Zur geometrischen Interpretation: Was gibt $f(x,y)$ an? Welche Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ beschreibt die Nebenbedingung? – Antworten darauf sind nützlich im Hinblick auf die Existenz absoluter Extrema.

120. Man bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x \cdot y$ auf der Ellipse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

Man argumentiere, warum die mit dieser Methode gefundenen Punkte tatsächlich absolute Maxima/Minima sind, skizziere die Ellipse und die zeichne die Extremstellen ein.

121. Man berechne alle Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x \cdot y^3$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 2y^2 = 1$ mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

122. Man berechne die absoluten Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ unter der Nebenbedingung
$x^2 + y^2 + z^2 = 3$ mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren.

123. Für den Bereich $B = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$ berechne man folgende Bereichsintegrale:

(a) $\iint_B x^2 y^3 \, dx \, dy$
(b) $\iint_B (x+y) \, dx \, dy$
(c) $\iint_B \ln(2x+3y) \, dx \, dy$

124. Man berechne das Bereichsintegral

$$\iint\limits_B \sin(x+y) \, dx \, dy$$

für die beiden folgenden Bereiche B:

(a) Rechtecksbereich $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$,
(b) Dreiecksbereich $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}$,

Man skizziere die Bereiche B aus (a) und (b) in der x,y-Ebene und interpretiere die erhaltenen Zahlenwerte geometrisch.

125. Sei C gleich der oberen Halbellipse in Mittelpunktslage, mit den Halbachsen a und b, von $(-a,0)$ bis $(a,0)$. Man berechne

$$\int_C \big((2+y+x^2)\,dx + (x^2+8\,y^2)\,dy\big)\,.$$

126. Man überprüfe die Gültigkeit des Gauß'schen Integralsatzes in der Ebene

$$\int\limits_K p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \iint\limits_B \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

an Hand folgenden Beispiels: $p(x,y) = x^2+y^2$, $q(x,y) = x^2-y^2$, B ist der Dreiecksbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq x\}$ und K die geschlosssene Randkurve von B, die die Punkte $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,0)$ jeweils geradlinig in der angegebenen Reihenfolge verbindet. Man skizziere B und K und berechne linke und rechte Seite der obigen Gleichung.

127. Man überprüfe die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene

$$\int\limits_K p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \iint\limits_B \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

an Hand folgenden Beispiels: $p(x,y) = x^3y^2 - 2xy^2$, $q(x,y) = x^2y - xy$, B ist der Rechtecksbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } -1 \leq y \leq 1\}$ und K die geschlosssene Randkurve von B, die die Punkte $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, $(0,1)$ und $(0,-1)$ jeweils geradlinig in der angegebenen Reihenfolge verbindet. Man skizziere B und K und berechne linke und rechte Seite der obigen Gleichung.

128. Man überprüfe die Gültigkeit des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene

$$\int\limits_K (p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy) = \iint\limits_B \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy$$

an Hand folgenden Beispiels: $p(x,y) = x-y^2$, $q(x,y) = x^2-y$, B ist der Rechtecksbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$ und K die geschlosssene Randkurve von B, die die Punkte $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ und $(-1,0)$ jeweils geradlinig in der angegebenen Reihenfolge verbindet. Man skizziere B und K und berechne linke und rechte Seite der obigen Gleichung.

129. Gegeben seien die elektrischen Felder (in Newton/Coulomb)

$$E_1 = \left(\frac{y}{1+xy}, \frac{x}{1+xy}\right)^T \quad \text{und} \quad E_2 = \left(\frac{y}{1+x}, \frac{x}{1+y}\right)^T.$$

Man berechne die Arbeit, die man leisten muss, um eine Einheitsladung (1 Coulomb) in E_1 bzw. E_2 entlang der folgenden beiden Wege W_1 und W_2 zu verschieben.

$$W_1 \colon x = t,\ y = t, \quad t \in [0,1]$$

$$W_2 \colon x = t^2,\ y = t, \quad t \in [0,1]$$

130. Man zeige, dass das Vektorfeld $\vec{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))^T$ gegeben durch

$$\vec{f}(x,y,z) = (\,y^2z + z^3 - 4xy - 6x,\ 2xyz - 2x^2 + z + 5,\ xy^2 + 3xz^2 + y - 4\,)^T$$

ein Gradientenfeld ist, bestimme alle Stammfunktionen von $\vec{f}(x,y,z)$ und berechne damit das Kurvenintegral

$$\int\limits_K f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz,$$

wobei die Kurve K vom Anfangspunkt $A(0,0,0)$ auf einem beliebigen Weg zum Endpunkt $B(1,1,1)$ läuft. Warum muss hier der Kurvenverlauf nicht genau spezifiziert werden?

131. Gegeben sei folgendes Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x})$ im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{f}(x,y,z) = (2xyz + 6x - 2y^2 + 5z, x^2z - 4xy - z^2 - 4z + 3, x^2y + 5x - 2yz - 4y - 12z)^T$$

(a) Man überprüfe, ob $\vec{f}$ ein Gradientenfeld ist.

(b) Man berechne alle Stammfunktionen von $\vec{f}$.

(c) Man berechne das Kurvenintegral $\int\limits_K \vec{f}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x}$, wobei K eine beliebige Kurve mit Anfangspunkt $(0,0,0)$ und Endpunkt $(1,1,1)$ ist. Warum muss hier die Kurve K nicht näher spezifiziert werden?

132. Man berechne das wegunabhängige Kurvenintegral (die Wegunabhängigkeit ist zu überprüfen!)

$$\int_K (y^2 - 2xy + 3)dx + (-x^2 + 2xy - 5)dy,$$

wobei die Kurve K den Anfangspunkt $A(0,0)$ und den Endpunkt $B(1,2)$ habe, auf zwei Arten:

(a) Man bestimme eine Stammfunktion $F(x,y)$ des zu integrierenden Vektorfeldes $(y^2 - 2xy + 3, -x^2 + 2xy - 5)^T$ und berechne das Integral mit Hilfe von $F(x,y)$.

(b) Man wähle die Kurve K als geradlinige Verbindung von $A(0,0)$ nach $B(1,2)$ und berechne das Integral durch Einsetzen der Parameterdarstellung dieser Kurve.

133. Welche Arbeit leistet das elektrostatische Feld

$$\left(\frac{cQx_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}, \frac{cQx_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}, \frac{cQx_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\right)^T,$$

wenn eine positive Einheitsladung vom Punkt $(a_1,a_2,a_3)^T$ auf irgendeinem Weg ins Unendliche bewegt wird?

134. Berechnen Sie die Wärmemenge Q, die nötig ist, um ein Mol eines idealen Gases zunächst bei konstantem Volumen von 300 K auf 500 K zu erwärmen und anschließend das Volumen isotherm von 75 ℓ auf 125 ℓ auszudehnen. Würde die gleiche Wärmemenge benötigt, wenn das Gas erst ausgedehnt und anschließend erwärmt würde?

Hinweis: $Q = \int_C (c_V\, dT + \frac{RT}{V}\, dV)$, $c_V = 12{,}5\ \mathrm{JK}^{-1}$, $\mathrm{R} = 8{,}3\ \mathrm{JK}^{-1}\mathrm{mol}^{-1}$. In beiden Fällen skizziere man den Integrationsweg C in einem (T,V)-Diagramm und berechne Q durch das angegebene Kurvenintegral.

135. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int\limits_K \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \right),$$

wobei K der Viertel-Kreisbogen des Kreises mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und Radius 1 mit Startpunkt $A(1,0)$ und Endpunkt $B(0,1)$ ist, auf zwei verschiedene Arten:

(a) Mit Hilfe einer Parameterdarstellung von K.

(b) Durch Bestimmung einer Stammfunktion des zu integrierenden Vektorfelds $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})^T$.

136. Gegeben sei eine Kurve K in Parameterdarstellung und ein Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))^T$:

$$K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \qquad \vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Um welche Kurve handelt es sich bei K? – Man skizziere K in der x,y-Ebene.

(b) Man berechne das Kurvenintegral $\int_K f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$ durch Einsetzen der Parameterdarstellung von K.

(c) Man überprüfe die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld $\vec{f}(x,y)$.

(d) Wieso folgt aus (c) nicht, dass das Ergebnis bei (b) gleich 0 ist?

137. Wir betrachten das ebene Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T$.

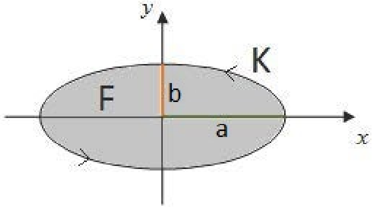
(a) Man bestimme die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ von $\vec{f}$.

(b) Man überprüfe die Integrabilitätsbedingungen für $\vec{f}$.

(c) Man betrachte das skalare Feld $F(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ und zeige, dass F auf der Definitionsmenge $D^+ := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ eine Stammfunktion von $\vec{f}$ ist.

(d) Warum kann $F(x,y)$ ausgehend von $(x,y)^T$ von D^+ nicht so auf ganz D fortgesetzt werden, dass F auf D eine Stammfunktion von $\vec{f}$ ist? (Hinweis: Man beachte, dass (c) auch mit Defintionsmenge $D^- := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ funktioniert und dass man Integrationskonstanten bei Stammfunktionen addieren kann; was ist das Problem bei den Punkten $(x,y)^T \in D$ mit $x = 0$?)

138. Gegeben sei eine Ellipse K mit Halbmessern $a, b > 0$ durch ihre Parameterdarstellung:



$$K: \begin{cases} x(t) = a \cdot \cos(t) \\ y(t) = b \cdot \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(a) Man berechne den Wert des Kurvenintegrals $A := \frac{1}{2} \int\limits_K (-y\, dx + x\, dy)$.

(b) Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene

$$\int_K p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \iint_F \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right)\,dx\,dy$$

(wobei F hier die von K berandete Ellipsenfläche bezeichnet, siehe grauer Bereich in der Graphik) begründe man, dass der Wert A aus (a) der Flächeninhalt von F ist, indem man in der obigen Formel $p(x,y) = -y$ und $q(x,y) = x$ setzt und den Wert des Bereichsintegrals auf der rechten Seite geeignet interpretiert.

139. Man berechne die Länge der Kurve

$$K = \{(x(t), y(t), z(t))^T \mid x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 3t,\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

140. Gegeben sei eine ebene Kurve in Parameterdarstellung

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{array}\right\}\ t \in [0, \infty).$$

Man berechne die Länge dieser Kurve für den Parameterbereich $t \in [0, \infty)$ und skizziere die Kurve in der x, y-Ebene.

Hinweis zur Skizze: In Polarkoordinaten $[r, \varphi]$ mit Radius r und Winkel φ kann die Kurve in der Form $r(\varphi) = e^{-\varphi}$ angegeben werden. Bei der Kurve handelt es sich um eine logarithmische Spirale.