zurückzuführen, man kann daher alle Anwendungsgebiete dieser Booleschen Algebra, insbesondere die Aussagenlogik und die Schaltalgebra, auch mit Hilfe des Restklassenkörpers modulo 2 behandeln, was tatsächlich hin und wieder durchgeführt wird.

Übungsaufgaben zu § 5

1. Man zeige: Definiert man in einem kommutativen Ring R mit Einselement 1 zwei Operationen $+$ und $\circ$ durch $a+b=a+b-1$ und $a\circ b=a+b-ab$, so ist die Menge der Elemente von R mit diesen beiden Operationen ein kommutativer Ring $\bar{R}$ mit Einselement. — Ferner: Ist R ein Boolescher Ring, so ist auch $\bar{R}$ ein Boolescher Ring. — Welcher Zusammenhang besteht in diesem Fall zwischen den beiden Booleschen Algebren $\mathfrak{B}(R)$ und $\mathfrak{B}(\bar{R})$, welche gemäß dem vorher bewiesenen Satz R bzw. $\bar{R}$ zugeordnet sind?
2. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement der Charakteristik 2 und S die Menge aller Elemente a von R, für die gilt: $a^2=a$. Man zeige: Definiert man in S die Operationen genauso wie in R, so erhält man einen Booleschen Ring.
3. Man gebe die Operationstafel für $+$ desjenigen Booleschen Ringes an, welcher gemäß dem obigen Satz dem Teilerverband von 15 zugeordnet ist.
4. Wie drückt sich die Enthaltensrelation $\subseteq$ einer Booleschen Algebra B in dem ihr zugeordneten Booleschen Ring $\mathfrak{R}(B)$ aus? Genauer: Wie schreibt man mit Hilfe der Operationen von $\mathfrak{R}(B)$: $0\subseteq x$, $x\subseteq 1, x\subseteq x$ und $x\subseteq y$?

§ 6 Boolesche Funktionen und Boolesche Polynomfunktionen

Es sei B eine Boolesche Algebra. Wir betrachten die Menge $F_n(B)$ aller Funktionen von n Variablen auf B mit Werten in B. Eine derartige Funktion f ordnet also jedem geordneten n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von Elementen aus B einen eindeutig bestimmten Funktionswert $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\in B$ zu. Ist B endlich und g die Anzahl der Elemente von B, dann ist die Gesamtzahl aller Funktionen aus $F_n(B)$ gegeben durch g^{g^n}. Zu $F_n(B)$ gehören insbesondere auch die konstanten

/g^{g^n}

aus H. Bürger, D. Dorninger, W. Nöbauer: Boolesche Algebren und Anwendungen, Beiträge zur Lehrerfortbildung, Österr. Bundesverlag, Wien 1974

Funktionen und die sogenannten „*Projektionen*" $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche definiert sind durch $x_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)=a_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Wir definieren nun die Operationen $\cup$, $\cap$, 0, 1, $'$ in $F_n(B)$ — so wie bei Funktionen üblich — „punktweise", also z. B. $f\cup g$ durch $(f\cup g)(a_1, a_2, \ldots, a_n)=$ $=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\cup g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oder 0 durch $0(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$ für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Dadurch wird $F_n(B)$, wie man durch Nachprüfen der Axiome sofort erkennt, selbst zu einer Booleschen Algebra, genannt die „*Algebra der n-stelligen Booleschen Funktionen auf B*". Jede Funktion aus $F_n(B)$ ist eindeutig festgelegt durch Angabe ihrer „Wertetabelle", die natürlich, wenn B unendlich ist, selbst unendlich ist.

Wir betrachten nun alle jene Funktionen aus $F_n(B)$, die sich aus den konstanten Funktionen und den Projektionen durch endlich oftmaliges Anwenden der Operationen $\cup$, $\cap$ und $'$ aufbauen lassen. Diese Funktionen heißen die „*n-stelligen Booleschen Polynomfunktionen auf B*". So ist etwa für $n>1$ die Funktion $((b\cup x_1)\cap(c\cup x_2)')\cup x_2$ eine n-stellige Boolesche Polynomfunktion.
Es ist klar, daß Vereinigung und Durchschnitt Boolescher Polynomfunktionen wieder Boolesche Polynomfunktionen sind, ebenso sind die Funktionen 0 und 1 solche, und da das Komplement einer Booleschen Polynomfunktion auch eine solche ist, bildet die Menge $P_n(B)$ aller Booleschen Polynomfunktionen bezüglich der Operationen $\cup$, $\cap$, 0, 1, $'$ für Boolesche Funktionen selbst eine Boolesche Algebra; die Gesetze von § 2 sind ja erfüllt. Also: Die Menge $P_n(B)$ aller Booleschen Polynomfunktionen ist eine Unteralgebra von $F_n(B)$.

Wir wollen nun einen Überblick über alle Booleschen Polynomfunktionen gewinnen. Dazu definieren wir zweckmäßigerweise zunächst neue Symbole a^1 und a^{-1} durch die Festsetzung $a^1=a$, $a^{-1}=a'$, und verwenden die Zeichen $\bigcup$ bzw. $\bigcap$ so wie Summenzeichen. Dann können wir folgenden wichtigen Satz aussprechen:

Sei S die Menge aller geordneten n-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, die aus den Zahlen 1 und -1 gebildet werden können. Dann erhält man jede Boolesche Polynomfunktion von $P_n(B)$ genau einmal, wenn man alle Booleschen Polynomfunktionen der Gestalt

$$p=\bigcup_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)\in S} a_{i_1 i_2\ldots i_n}\cap x_1^{i_1}\cap x_2^{i_2}\cap\ldots\cap x_n^{i_n},\quad a_{i_1 i_2\ldots i_n}\in B$$

bildet.

Folgerung: Ist g die Elementzahl von B, dann gibt es genau g^{2^n} Boolesche Polynomfunktionen.

Beispiel: Die Menge der Booleschen Polynomfunktionen von $P_2(B)$ ist gegeben durch die Funktionen

$$(a_{11} \cap x_1 \cap x_2) \cup (a_{1-1} \cap x_1 \cap x_2') \cup (a_{-11} \cap x_1' \cap x_2) \cup \cup (a_{-1-1} \cap x_1' \cap x_2').$$

Beweis des Satzes:

1. Jede Boolesche Polynomfunktion befindet sich unter den Polynomfunktionen des Satzes.

Denn ist $a \in B$, dann gilt:

$$\bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n} =$$

$$= a \cap \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n} =$$

$$= a \cap \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})} (x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_{n-1}^{i_{n-1}}) \cap (x_n \cup x_n') =$$

$$= a \cap \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})} x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_{n-1}^{i_{n-1}} = \dots = a \cap (x_1 \cup x_1') = a$$

$$\bigcup_{(i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_n)} (1 \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_r^{i} \cap \dots \cap x_n^{i_n}) \cup \cup (0 \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_r^{-i} \cap \dots \cap x_n^{i_n}) =$$

$$= x_r^i \cap \bigcup_{(i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_n)} x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_{r-1}^{i_{r-1}} \cap x_{r+1}^{i_{r+1}} \cap \dots \cap \cap \dots \cap x_n^{i_n} = x_r^i$$

Also befindet sich jede Konstante, jedes x_r und jedes x_r' unter obigen Funktionen. Weiter gilt:

$$\Big(\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}\Big) \cup \cup \Big(\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} b_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}\Big) =$$

$$= \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} \big((a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}) \cup (b_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n})\big) =$$

$$= \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} (a_{i_1 \dots i_n} \cup b_{i_1 \dots i_n}) \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$$

$$\Big(\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}\Big) \cap \cap \Big(\bigcup_{(j_1, \dots, j_n)} b_{j_1 \dots j_n} \cap x_1^{j_1} \cap \dots \cap x_n^{j_n}\Big) =$$

(nach dem Distributivgesetz)

$$= \bigcup_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ (j_1, \dots, j_n)}} a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n} \cap b_{j_1 \dots j_n} \cap x_1^{j_1} \cap \dots \cap x_n^{j_n} =$$

(da $x_r^{i_r} \cap x_r^{j_r} = 0$ für $i_r \neq j_r$)

$$= \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} (a_{i_1 \dots i_n} \cap b_{i_1 \dots i_n}) \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$$

$$\Big(\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}\Big)' =$$

$$= \bigcap_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n}' \cup x_1^{-i_1} \cup \dots \cup x_n^{-i_n} =$$

$$= \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} c_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n},$$

denn nach den vorhergehenden Ergebnissen sind die $a_{i_1 \dots i_n}'$ und die $x_r^{-i_r}$ wieder Polynomfunktionen von der Form des Satzes, und die Vereinigung und der Durchschnitt von Polynomfunktionen von der Form des Satzes sind Polynomfunktionen von der Form des Satzes.
Da jede Boolesche Polynomfunktion aus den Konstanten und den Projektionen mittels $\cup$, $\cap$ und $'$ aufgebaut ist, und die Konstanten und Projektionen unter den im Satz angegebenen Polynomfunktionen sind, sind daher also alle Booleschen Polynomfunktionen unter den Polynomen des Satzes enthalten.

2. Je zwei Polynomfunktionen des Satzes sind voneinander verschieden. Denn angenommen, es sei

$$\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n} = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} b_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}.$$

Wenn wir auf beiden Seiten einsetzen $x_r = 1^{t_r}$ für $r = 1, 2, \dots, n$, dann folgt $a_{t_1 \dots t_n} = b_{t_1 \dots t_n}$, also sind die beiden Polynomfunktionen identisch.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet. Die Darstellung einer Booleschen Polynomfunktion p in der Gestalt des Satzes heißt die „*disjunktive Normalform von p*".

Man kann die disjunktive Normalform einer gegebenen Polynomfunktion p unmittelbar hinschreiben. Sie ist nämlich gegeben durch

$$p = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)} p(1^{i_1}, 1^{i_2}, \ldots, 1^{i_n}) \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n} \qquad \text{(Di)}$$

Beweis: Sei $p = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1\ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$

die disjunktive Normalform von p, dann gilt

$$p(1^{t_1}, 1^{t_2}, \ldots, 1^{t_n}) = a_{t_1 t_2 \ldots t_n}.$$

Man kann die disjunktive Normalform einer gegebenen Polynomfunktion p also stets dadurch finden, daß man die Werte von p an den 2^n Stellen $(1^{i_1}, 1^{i_2}, \ldots, 1^{i_n})$ ausrechnet. Im Fall $n = 2$ sieht die disjunktive Normalform etwa so aus:

$$p = (p(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (p(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup \\ \cup (p(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup (p(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

Eine weitere Methode, um die disjunktive Normalform einer gegebenen Polynomfunktion p zu finden, soll an dem folgenden Beispiel erklärt werden:

Es soll die Boolesche Polynomfunktion $p = ((b \cup x_1) \cap (c \cup x_2)') \cup x_2$ auf disjunktive Normalform gebracht werden.

1. Man bringt alle vorkommenden Zeichen $'$ durch Anwendung der Regeln von De Morgan unmittelbar an die x_i bzw. an die Konstanten heran:

$$p = ((b \cup x_1) \cap (c' \cap x_2')) \cup x_2.$$

2. Man stellt p durch Anwendung des Distributivgesetzes als Vereinigung von Durchschnitten dar:

$$p = (b \cap c' \cap x_2') \cup (c' \cap x_1 \cap x_2') \cup x_2.$$

3. Man fügt jedem Glied für jedes darin nicht vorkommende x_i ein $x_i \cup x_i'$ ein:

$$p = (b \cap c' \cap (x_1 \cup x_1') \cap x_2') \cup (c' \cap x_1 \cap x_2') \cup ((x_1 \cup x_1') \cap x_2)$$

4. Man entwickelt jedes Glied nach dem Distributivgesetz:

$$p = ((b \cap c') \cap x_1 \cap x_2') \cup ((b \cap c') \cap x_1' \cap x_2') \cup (c' \cap x_1 \cap x_2') \cup \\ \cup (x_1 \cap x_2) \cup (x_1' \cap x_2)$$

5. Man faßt jeweils gleichnamige Glieder zusammen und ordnet die Glieder:

$$p = (x_1 \cap x_2) \cup (c' \cap x_1 \cap x_2') \cup (x_1' \cap x_2) \cup (b \cap c' \cap x_1' \cap x_2')$$

Man kann alle bisher angestellten Überlegungen über die disjunktive Normalform einer Polynomfunktion dualisieren und erhält so die „*konjunktive Normalform*" der Polynomfunktion p, die gegeben ist durch

$$p = \bigcap_{(i_1,\ldots,i_n)} p(0^{i_1}, 0^{i_2}, \ldots, 0^{i_n}) \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n} \qquad \text{(Ko)}$$

Die Darstellung einer Booleschen Polynomfunktion p in Normalform ist wohl für theoretische Überlegungen sehr wertvoll, in der Praxis aber oft unzweckmäßig, da die Normalform Vereinigung (bzw. Durchschnitt) von 2^n Gliedern ist, von denen jedes wieder $n+1$ Glieder enthält. Mit insgesamt $2^n(n+1)$ Konstanten und x_i^r ist die Normalform daher sehr umfangreich. Für praktische Anwendungen ist es deshalb oft zweckmäßig, eine Darstellung von p mit möglichst wenig Konstanten und x_i^r zu finden, eine sogenannte „*Minimalform*" von p.

Betrachten wir etwa die Polynomfunktion

$$p = [((a \cap x_1) \cup b) \cap (x_1' \cap x_2)] \cup (c \cup x_2').$$

Durch eine einfache Umrechnung erhält man: $p = (b \cap x_1') \cup c \cup x_2'$; die Minimalform von p kann also höchstens vier Konstanten und x_i^r enthalten.
Die disjunktive Normalform von p hingegen lautet:

$$p = (c \cap x_1 \cap x_2) \cup (x_1 \cap x_2') \cup ((b \cup c) \cap x_1' \cap x_2) \cup (x_1' \cap x_2').$$

Man sieht also schon an Hand dieses sehr einfachen Beispiels, um wieviel umfangreicher die disjunktive Normalform sein kann als eine Minimalform.
Auf das Problem der Minimalform werden wir in § 9 nochmals zurückkommen.

Wir haben bisher gesehen, daß in der Booleschen Algebra $F_n(B)$ der n-stelligen Booleschen Funktionen die Menge $P_n(B)$ der Booleschen Polynomfunktionen eine Unteralgebra bildet. Falls B endlich ist, dann ist die Gesamtzahl aller Funktionen von $F_n(B)$ gegeben durch g^{g^n}, die Anzahl der Polynomfunktionen durch g^{2^n}. Diese beiden Zahlen sind genau dann gleich, wenn $g = 1$ oder $g = 2$. Also gilt:

Für die endlichen Booleschen Algebren mit 1 *oder* 2 *Elementen, aber für keine anderen endlichen Booleschen Algebren, sind alle Booleschen Funktionen Boolesche Polynomfunktionen.*

Während das Übereinstimmen der Booleschen Funktionen mit den Booleschen Polynomfunktionen für die Boolesche Algebra mit einem

Element trivial ist, bildet es im Fall der Algebra mit zwei Elementen die Grundlage für viele Anwendungen der Booleschen Algebra. Wir wollen daher unsere allgemeinen Sätze über Boolesche Polynomfunktionen noch kurz spezialisieren auf die Boolesche Algebra $W=\{0,1\}$ mit zwei Elementen. Es ist also jede Boolesche Funktion auf W eine Boolesche Polynomfunktion, und diese kann man mittels (Di) oder (Ko) sofort in disjunktiver bzw. konjunktiver Normalform hinschreiben. Man läßt dabei üblicherweise in (Di) alle Glieder mit dem Koeffizienten 0 weg und schreibt die Koeffizienten 1 nicht hin, und in (Ko) läßt man alle Glieder mit dem Koeffizienten 1 weg und schreibt die Koeffizienten 0 nicht hin.

Beispiel: $n=3$, die Funktion f auf W sei gegeben durch die Wertetabelle

x_1	x_2	x_3	f
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Dann ist die disjunktive Normalform von f gegeben durch

$$f=(x_1\cap x_2\cap x_3)\cup(x_1\cap x_2\cap x_3')\cup(x_1\cap x_2'\cap x_3)\cup \\ \cup(x_1'\cap x_2\cap x_3')\cup(x_1'\cap x_2'\cap x_3')$$

und die konjunktive Normalform von f durch

$$f=(x_1\cup x_2\cup x_3')\cap(x_1\cup x_2'\cup x_3')\cap(x_1'\cup x_2\cup x_3)$$

Wie wir oben für eine beliebige Boolesche Algebra B gezeigt haben, ist

$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in S}(a\cap x_1^{i_1}\cap x_2^{i_2}\cap\ldots\cap x_n^{i_n})=a,$$

also ist insbesondere für $a=1$:

$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} x_1^{i_1}\cap x_2^{i_2}\cap\ldots\cap x_n^{i_n}=1.$$

Im Falle, daß B die Algebra W ist, bezeichnet man den Ausdruck

$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} x_1^{i_1}\cap x_2^{i_2}\cap\ldots\cap x_n^{i_n}$ als die *vollständige disjunktive Normalform*

und den dazu dualen Ausdruck als die *vollständige konjunktive Normalform.*

Da die vollständige disjunktive Normalform die konstante Funktion mit dem Wert 1 darstellt, kann man das Komplement einer in disjunktiver Normalform gegebenen Funktion f auf W darstellen als die Vereinigung g derjenigen Ausdrücke $x_1^{i_1}\cap x_2^{i_2}\cap\ldots\cap x_n^{i_n}$ der vollständigen disjunktiven Normalform, welche in der disjunktiven Normalform von f nicht vorkommen, denn es gilt ja $f\cup g=1$ und $f\cap g=0$. Auf analoge Weise erhält man das Komplement einer in konjunktiver Normalform gegebenen Funktion.

Dies kann man wegen $(f')'=f$ und der Tatsache, daß bei der Komplementbildung gemäß den Regeln von De Morgan $\cup$- und $\cap$-Zeichen vertauscht werden, dazu benützen, um aus einer gegebenen Normalform einer Funktion auf W unmittelbar die dazu duale Normalform zu gewinnen.

Im obigen Beispiel etwa erhält man die konjunktive Normalform von f aus der disjunktiven Normalform, indem man gemäß den Regeln von De Morgan das Komplement des Ausdrucks

$$(x_1\cap x_2'\cap x_3')\cup(x_1'\cap x_2\cap x_3)\cup(x_1'\cap x_2'\cap x_3)$$

bildet.

Übungsaufgaben zu § 6

1. a) Man führe den Beweis des Satzes, daß man jede Boolesche Polynomfunktion von $P_n(B)$ genau einmal erhält, wenn man alle Polynomfunktionen der Gestalt

$$p=\bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} a_{i_1\ldots i_n}\cap x_1^{i_1}\cap x_2^{i_2}\cap\ldots\cap x_n^{i_n}$$

bildet, für den Fall $n=2$ durch.
b) Man führe den dualen Beweis zum Beweis dieses Satzes durch.

2. Sei $M=\{1,2,3\}$ und seien $a_1=\emptyset$, $a_2=\{1\}$, $a_3=\{2\}$, $a_4=\{3\}$, $a_5=\{1,2\}$, $a_6=\{1,3\}$, $a_7=\{2,3\}$ und $a_8=M$. Man suche für die folgende Polynomfunktion p aus $P_2(\mathfrak{P}(M))$ eine Minimalform und vergleiche diese mit der disjunktiven Normalform von p.

$$p=[((a_1\cap x_2')'\cup(a_3\cap x_1)\cup x_2')'\cap((x_1\cup a_3')\cap x_2)]\cup$$
$$\cup\,[((a_2\cap a_3)\cup a_7)'\cap(x_2\cup a_6)\cap(a_5\cup a_4))].$$

3. Ebenso für die Polynomfunktion
$$p=[((a_1\cup x_2)'\cap a_5)'\cup((a_4\cup x_1)\cap x_2')]\cap((x_1\cap a_4)\cup a_5)'.$$
4. So wie für Boolesche Algebren ist auch für beliebige Verbände eine n-stellige Polynomfunktion definiert als eine Funktion, die sich aus den konstanten Funktionen und den Projektionen durch endlich oftmaliges Anwenden der Verbandsoperationen aufbauen läßt. — Man beweise, daß man jede einstellige Polynomfunktion eines distributiven Verbandes V mit neutralen Elementen 0 und 1 für die Operationen $\cup$, $\cap$ genau einmal erhält, wenn man alle Polynomfunktionen der Gestalt $(a\cap x)\cup b$ mit $a\supseteq b$, $a, b\in V$, bildet. (Vgl. hiezu Üb. zu § 3, Bsp. 2.).
5. Man zeige, daß $P_2(W)$ und $P_1(W^2)$ zueinander isomorph sind und gebe einen Isomorphismus von $P_2(W)$ auf $P_1(W^2)$ explizit an.
6. Man gebe eine zweistellige Funktion auf der in 2. definierten Booleschen Algebra an, welche keine Polynomfunktion ist.
7. Man schreibe die folgenden Funktionen p und q aus $P_3(W)$ sowohl in disjunktiver als auch in konjunktiver Normalform an und stelle ihre Wertetabellen auf:
$$p=((x_1\cup x_2)'\cap((x_2'\cap x_3)\cup x_1'))\cup(x_1\cup x_2'\cup x_3)' \text{ und}$$
$$q=[((x_1\cup x_2)'\cap x_3)'\cup[((x_1'\cap x_2)\cup x_3)\cap x_1']']\cap(x_1\cup x_3).$$
8. Man schreibe die vier durch die folgende Tabelle gegebenen Booleschen Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 aus $P_3(W)$ in einer Normalform an und trachte diese dann zu vereinfachen.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0

II. ANWENDUNGEN DER BOOLESCHEN ALGEBRA

§ 7 Grundbegriffe der Aussagenlogik

Wir wollen nun eine der wichtigsten Anwendungen der Booleschen Algebra kennenlernen, nämlich die Anwendung auf die Aussagenlogik.

Wir betrachten also nun *Aussagen.* So eine Aussage hat sprachlich die Form eines Satzes. Eine Aussage ist z. B. „heute ist es kalt“ oder „12 ist eine Primzahl“ oder „es gibt unendlich viele Primzahlen“ oder „die Sonne ist ein Fixstern“. Eine Aussage ist in der klassischen Logik entweder wahr oder falsch, „tertium non datur“. Jede Aussage hat also einen bestimmten *Wahrheitswert,* und zwar entweder den Wert „wahr“ oder den Wert „falsch“. Der Einfachheit halber schreiben wir 1 für den Wahrheitswert wahr und 0 für den Wahrheitswert falsch, d. h. wir geben einer wahren Aussage den Wahrheitswert 1 und einer falschen Aussage den Wahrheitswert 0. Wir betrachten also eine „zweiwertige“ Logik.

Man kann Aussagen miteinander verknüpfen. Eine Grundverknüpfung für Aussagen ist die „*Disjunktion*“, sprachlich ausgedrückt durch „oder“ (wobei das nicht ausschließende „oder“ gemeint ist), symbolisch ausgedrückt durch $\vee$. Die Disjunktion verknüpft die beiden Aussagen A, B zur Aussage „A oder B“, symbolisch geschrieben $A\vee B$. Eine weitere Grundverknüpfung ist die „*Konjunktion*“, sprachlich ausgedrückt durch „und“, symbolisch durch $\wedge$. Die Konjunktion verknüpft die beiden Aussagen A, B zur Aussage „A und B“, symbolisch $A\wedge B$. Die dritte Grundverknüpfung (eine einstellige Verknüpfung) ist die „*Negation*“, sprachlich ausgedrückt durch „nicht“, symbolisch durch $'$. Diese verwandelt die Aussage A in die Aussage „nicht A“, symbolisch geschrieben A'. Durch wiederholte Anwendung dieser drei Grundverknüpfungen kann man aus gegebenen Aussagen zusammengesetzte Aussagen aufbauen, z. B. „heute ist es kalt und es gibt nicht unendlich viele Primzahlen“, usw. —

Eines der Grundprobleme der Aussagenlogik ist es, den Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage aus den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile zu berechnen. Das kann man durchführen mit Hilfe der „*Wahrheitstafeln*" für die Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $'$. Diese sehen folgendermaßen aus:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	A'
1	0
0	1

Seien nun $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Aussagen. Jede Aussage, die daraus durch Anwendung von $\vee$, $\wedge$ und $'$ aufgebaut ist, heißt eine zusammengesetzte Aussage in $A_1, A_2, \ldots, A_n$; wir schreiben für eine derartige Aussage $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Ob $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ wahr oder falsch ist, hängt von den Wahrheitswerten von $A_1, A_2, \ldots, A_n$, nicht aber von der speziellen Gestalt der A_i ab, denn die Berechnung des Wahrheitswertes von $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ erfolgt ja nur aus den Wahrheitswerten der $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Wir können daher die A_i in $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ auch als unbestimmte Symbole, sogenannte „*Aussagenvariablen*" auffassen; $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ nennen wir dann eine „*Aussageform*". Je zwei Aussageformen kann man mittels $\vee$ bzw. $\wedge$ verknüpfen zu einer neuen Aussageform, und aus jeder Aussageform erhält man durch Anwendung von $'$ eine neue Aussageform. Die Aussageformen in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden daher mit $\vee$, $\wedge$ und $'$ eine Algebra.

Sei $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ eine Aussageform. Durch $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ wird jedem n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von Wahrheitswerten, oder, wie man auch sagt, jeder „Belegung der Aussagenvariablen A_i mit Wahrheitswerten" ein Wahrheitswert $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eindeutig zugeordnet. Der Aussageform $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ entspricht also eindeutig eine Boolesche Funktion $w(F)$ von n Variablen auf der Booleschen Algebra W, genannt „die zur Aussageform F gehörige *Wahrheitsfunktion*".

Sei etwa $F(A_1, A_2) = A_1 \wedge (A_1' \vee A_2)$, so ist $w(F)$ gleich der Booleschen Funktion $f = x_1 \cap x_2$, denn bestimmen wir die Wahrheitswerte von $F(A_1, A_2)$ mit Hilfe einer Wahrheitstafel, so erhalten wir

A_1	A_2	A_1'	$A_1' \vee A_2$	$A_1 \wedge (A_1' \vee A_2)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Da $f(1, 1) = 1$ und $f(1, 0) = f(0, 1) = f(0, 0) = 0$, ist $w(F) = f$.

Es gilt:
$$w(F_1 \vee F_2) = w(F_1) \cup w(F_2)$$
$$w(F_1 \wedge F_2) = w(F_1) \cap w(F_2)$$
$$w(F') = w(F)'.$$

Beweis: Wir müssen zeigen, daß in jeder dieser drei Gleichungen die auf der linken Seite und die auf der rechten Seite stehende Funktion für jedes n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von Wahrheitswerten den gleichen Wert hat. Wir zeigen dies zunächst für die erste Gleichung und gehen dazu alle Möglichkeiten für $w(F_1)$ und $w(F_2)$ durch:

$w(F_1)$	$w(F_2)$	$w(F_1 \vee F_2)$	$w(F_1) \cup w(F_2)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Bei den beiden anderen Gleichungen schließt man ebenso.

Weiter gilt: *Zu jeder Booleschen Funktion f auf W in n Variablen gibt es eine Aussageform $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ mit $w(F) = f$.*

Beweis: Wir stellen f dar als Boolesche Polynomfunktion in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (etwa in einer der beiden Normalformen) und ersetzen in dem erhaltenen Ausdruck jedes $\cup$ durch $\vee$, jedes $\cap$ durch $\wedge$ und jedes x_i durch A_i. Dadurch erhalten wir eine Aussageform F. Nun ist aber $w(A_i) = x_i$, denn $w(A_i)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i = x_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, daher gilt nach dem vorher Bewiesenen $w(F) = f$.

Zusammenfassend erhalten wir folgenden

Satz: Ordnet man jeder Aussageform in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die zugehörige Wahrheitsfunktion zu, so erhält man einen Epimorphismus der Algebra der Aussageformen in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf die von den Booleschen Funktionen auf W in n Variablen mit den Operationen $\cup$, $\cap$, $'$ gebildete Algebra.

Dieser Satz ist der Grund für den engen Zusammenhang zwischen Boolescher Algebra und Aussagenlogik.

Neben den Aussageverknüpfungen „oder", „und", „nicht" werden in der Aussagenlogik noch weitere Aussagenverknüpfungen verwendet, die aus den Grundverknüpfungen abgeleitet werden.

1. Die *Subjunktion* (auch Implikation genannt), sprachlich ausgedrückt durch „wenn, dann", symbolisch durch $\rightarrow$, welche die Aussagen A, B zur Aussage „wenn A, dann B", symbolisch geschrieben $A \rightarrow B$, verknüpft. Sie ist definiert durch: $A \rightarrow B = A' \vee B$ und hat daher die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

2. Die *Bijunktion* (auch Äquivalenz genannt), sprachlich ausgedrückt durch „genau dann, wenn", symbolisch durch $\leftrightarrow$, welche die Aussagen A, B zur Aussage „A genau dann, wenn B", symbolisch geschrieben $A \leftrightarrow B$, verknüpft. Sie wird definiert durch $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ und hat daher die Wahrheitstafel:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Es ist klar, daß durch obige Definitionen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ auch für Aussageformen erklärt sind.

Definition: Eine Aussageform heißt allgemeingültig oder *Identität*, wenn die zugehörige Wahrheitsfunktion die konstante Funktion 1 ist, und sie heißt *Kontradiktion*, wenn die zugehörige Wahrheitsfunktion die konstante Funktion 0 ist.

Eine Identität ist also wahr ohne Rücksicht auf Wahrheit oder Falschheit der Aussagen, aus denen sie zusammengesetzt ist; man kann über die Wahrheit dieser Aussagen also aus dem Wahrheitswert der Identität überhaupt nichts entnehmen; man nennt die Identität deshalb manchmal auch *Tautologie*. Eine Kontradiktion hingegen ist eine Aussage, die von vornherein falsch ist.

Ist F eine Identität, dann schreiben wir symbolisch $\models F$. Wie wir noch sehen werden, ist das Studium der Identitäten von großer Wichtigkeit für die Aussagenlogik. Die Konstruktion neuer Identitäten aus gegebenen wird ermöglicht durch folgende Sätze:

1. *Aus* $\models F$ *und* $\models (F \rightarrow G)$ *folgt* $\models G$ *(„Abtrennungsregel" oder „modus ponens").*

Beweis: Nach Voraussetzung haben F und $F \rightarrow G$ für jede Belegung $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wahrheitswert 1, gemäß der Wahrheitstafel für $\rightarrow$ hat also auch G für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wahrheitswert 1.

2. *Ersetzt man in einer Identität* $\models F$ *eine darin vorkommende Aussagenvariable* A_i *an allen Stellen, wo sie vorkommt, durch eine gegebene Aussageform* H*, so ist die erhaltene Aussageform* $F(H)$ *wieder eine Identität („Ersetzungsregel").*

Beweis: Klar.

Definition: Zwei Aussageformen F_1, F_2 heißen *„semantisch äquivalent"*, wenn ihre Wahrheitsfunktionen gleich sind.

Will man also die Wahrheit einer Aussage, die aus Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zusammengesetzt ist, nachprüfen, so kann man statt der zugehörigen Aussageform $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ auch eine dazu semantisch äquivalente Aussageform betrachten.

Dies ist etwa in der folgenden Lebenssituation nicht ohne Bedeutung (das Beispiel ist dem Buch von WHITESITT entnommen):
Der reizbare Gatte trägt am Hochzeitstag seine junge Frau über die Schwelle seines Hauses und bemerkt dann: „Wir werden gut miteinander auskommen, Liebling, vorausgesetzt du beachtest folgende Regeln:

a) Zu jeder Mahlzeit mußt du Eiscreme reichen, wenn du kein Brot gibst.
b) Wenn du Brot und Eiscreme zur gleichen Mahlzeit gibst, darfst du keine sauren Gurken servieren.
c) Wenn saure Gurken gereicht werden oder Brot nicht gereicht wird, darf es auch keine Eiscreme geben."

Die junge Frau ist mit allem einverstanden, aber etwas verwirrt. Wie sollte sie diese verwickelte Regel behalten? — Wenn sie die Elemente der Aussagenlogik kennen würde, würde sie der Zukunft wesentlich gefaßter entgegenblicken und etwa folgende Überlegung anstellen: „Schreibe ich E für die Aussage ‚ich reiche Eiscreme', B für ‚ich reiche Brot' und S für ‚ich serviere saure Gurken', so lautet die Vorschrift für mich:

$$(B' \to E) \wedge ((B \wedge E) \to S') \wedge ((S \vee B') \to E').$$

Will ich keinen Streit haben, so muß die Aussage wahr sein. Diese Aussage kann ich mir aber nicht merken, also suche ich mir eine einfachere, zu der dieser Aussage entsprechenden Aussageform semantisch äquivalente Aussageform. Diese werde ich mir gut einprägen; wenn sie nämlich den Wahrheitswert 1 hat, dann ist auch die Vorschrift meines Gatten erfüllt."
Bezeichnen wir die ursprüngliche Aussageform mit $F(B, E, S)$, so ist also

$$F(B,E,S) = ((B')' \vee E) \wedge ((B \wedge E)' \vee S') \wedge ((S \vee B')' \vee E')$$

und daher

$$\begin{aligned} w(F) &= ((x_1')' \cup x_2) \cap ((x_1 \cap x_2)' \cup x_3') \cap ((x_3 \cup x_1')' \cup x_2') = \\ &= (x_1 \cup x_2) \cap (x_1' \cup x_2' \cup x_3') \cap (x_2' \cup x_3') \cap (x_1 \cup x_2') = \\ &= (x_1 \cup x_2) \cap (x_2' \cup x_3') \cap (x_1 \cup x_2') = x_1 \cap (x_2 \cap x_3)'. \end{aligned}$$

Da $x_1 \cap (x_2 \cap x_3)'$ die Wahrheitsfunktion der Aussageform $G(B,E,S) = B \wedge (E \wedge S)'$ ist, sind F und G semantisch äquivalent.
Die junge Frau braucht sich also bloß die eine Regel zu merken: Der Gatte wünscht stets Brot, aber niemals saure Gurken und Eiscreme zugleich.

Um nachzuprüfen, ob zwei Aussageformen semantisch äquivalent sind, kann man den folgenden Satz verwenden:

Satz: Genau dann sind F_1 und F_2 semantisch äquivalent, wenn gilt: $\models (F_1 \leftrightarrow F_2)$.

Beweis: Ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ Identität, dann hat $w(F_1 \leftrightarrow F_2)$ für jede Belegung $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wert 1, also ist $F_1 \leftrightarrow F_2$ stets wahr, gemäß der Wahrheitstafel für $\leftrightarrow$ ist also $w(F_1) = w(F_2)$, also sind F_1 und F_2 semantisch äquivalent. In der umgekehrten Richtung schließt man genauso.

Übungsaufgaben zu § 7

1. Ein Verband wird planar genannt, falls man sein Hasse-Diagramm (vgl. Üb. zu § 3, Bsp. 7) derart zeichnen kann, daß darin einander keine zwei Strecken (außer in Endpunkten) überschneiden. — Wir schreiben E für „endlich sein", D für „distributiv sein", P für „planar sein", B für „eine achtelementige Boolesche Algebra als Unterverband besitzen" (unter einem Unterverband eines Verbandes versteht man eine Teilmenge des Verbandes, welche mit den Verbandsoperationen selbst ein Verband ist) und O für „kein Element besitzen, das oberer Nachbar von mehr als zwei Elementen ist."
Man übersetze die folgenden (im übrigen inhaltlich richtigen) Aussagen der Verbandstheorie in aussagenlogische Symbole:

(1) Ein endlicher distributiver Verband ist planar, wenn er kein Element besitzt, das oberer Nachbar von mehr als zwei Elementen ist.
(2) Ein endlicher distributiver Verband ist nur planar, wenn er kein Element besitzt, das oberer Nachbar von mehr als zwei Elementen ist.
(3) Ein endlicher distributiver Verband ist nicht planar, es sei denn, er besitzt keine achtelementige Boolesche Algebra als Unterverband.*)
(4) Eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein endlicher distributiver Verband planar ist, ist, daß er keine achtelementige Boolesche Algebra als Unterverband besitzt.
(5) Dann und nur dann besitzt ein endlicher distributiver Verband keine achtelementige Boolesche Algebra als Unterverband, falls er kein Element besitzt, das oberer Nachbar von mehr als zwei Elementen ist.
(6) Ein endlicher Verband ist nicht notwendigerweise planar, falls er kein Element besitzt, das oberer Nachbar von mehr als zwei Elementen ist.
(7) Entweder ist ein endlicher distributiver Verband planar oder er besitzt eine achtelementige Boolesche Algebra als Unterverband.

*) Die sprachliche Wendung: „Es gilt eine Aussage A, es sei denn, es trifft eine Aussage B zu", wird in der Mathematik ausschließlich im Sinn von $B \to A'$ (oder einer dazu semantisch äquivalenten Formulierung) verstanden.

2. Man bestimme durch Aufstellen der Wahrheitstafeln, welche der folgenden Aussageformen Tautologien sind:
   (1) $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$
   (2) $((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to ((P \to Q) \vee (Q \to P))'$
   (3) $(P \to Q) \to [(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow (Q \wedge (P \vee R))]$
3. Man zeige, daß die folgenden Aussageformen Tautologien sind:
   (1) $(P \to R) \to [(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R)]$
   (2) $(P \leftrightarrow Q') \to (P \to Q')$
   (3) $((P \to Q) \wedge (P \to R')) \leftrightarrow (P \to (Q \wedge R'))$

nicht

4. Man zeige, daß die folgenden beiden Aussageformen semantisch äquivalent sind:

$$[(P \wedge (R \wedge S')') \to (P' \wedge R')] \leftrightarrow [((Q \to S) \to (Q \wedge S)) \wedge (R \to S)]$$
und $[P' \to (Q \wedge (S \to Q))] \wedge (R \to S)$.

5. Die Aussageverknüpfung | (der sogenannte *Sheffer-Strich*) ist definiert durch $A|B = (A \wedge B)'$. Man zeige: Zu jeder Booleschen Funktion auf W in einer Variablen kann man eine Aussageform F mit $w(F) = f$ angeben, in der außer dem Sheffer-Strich keine weiteren aussagelogischen Verknüpfungszeichen vorkommen.

§ 8 Die Theorie des richtigen Schließens

Die Aussagenlogik ist ein wirksames Mittel, um die Richtigkeit von logischen Schlüssen auf algorithmischem Weg, also durch ein stets in endlich vielen Schritten zum Ziel führendes Verfahren, zu überprüfen. Um so ein Verfahren zu erhalten, geben wir zunächst folgende wichtige

Definition: Die Aussageform G heißt eine „*gültige Konsequenz*" der Menge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ von Aussageformen $F_1, F_2, \ldots, F_m$, wenn gilt: Für jede Belegung der in G und $F_1, F_2, \ldots, F_m$ vorkommenden Aussagenvariablen durch Wahrheitswerte, bei der jedes F_i den Wert 1 annimmt, nimmt auch G den Wert 1 an.
Anders ausgedrückt: Für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, für die $w(F_1)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \ldots = w(F_m)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, gilt $w(G)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.
Ist G gültige Konsequenz der Menge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$, dann schreibt man symbolisch $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$.

Spezialfall: Jede Identität ist eine gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$.

Die Menge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ kann auch die leere Menge sein. In diesem Fall sind die gültigen Konsequenzen der Menge genau die Identitäten.

Wir wollen uns die praktische Bedeutung dieser Definition vor Augen führen: Ganz allgemein geht man beim Schließen doch so vor, daß man aus gegebenen Aussageformen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ durch irgendwelche Schlußregeln eine Folgerung G ableitet, und zwar tut dies nicht nur der Mathematiker; fast jeder Mensch wird im Laufe seines Lebens immer wieder gezwungen, Schlüsse zu ziehen. Bei diesem Schließen kann man aber Fehler machen, also einen „Trugschluß" begehen. Wie kann man nun feststellen, ob ein Schluß, den man ausgeführt hat, korrekt, also kein Trugschluß, war? Wenn G gültige Konsequenz von $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ist, dann ist G sicher wahr, vorausgesetzt, daß $F_1, F_2, \ldots, F_m$ wahr sind; der Schluß von $F_1, F_2, \ldots, F_m$ auf G war also einwandfrei. —
Wenn man nun auch weiß, daß G gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ist, so darf man natürlich deswegen noch nicht annehmen, daß G für jede Belegung $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten wahr ist. Es kann G jedoch für eine derartige Belegung höchstens dann falsch sein, wenn nicht alle F_i für diese Belegung wahr sind. Andererseits kann ein G, das keine gültige Konsequenz der F_i ist, trotzdem für ein gegebenes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ wahr sein.
Um nochmals zusammenzufassen: „G ist gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$" heißt nur, daß G korrekt aus $F_1, F_2, \ldots, F_m$ gefolgert werden kann, es besagt aber nichts über den Wahrheitswert von G schlechthin.

Bemerkung: Genau dann ist G gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$, wenn $w(F_1) \cap w(F_2) \cap \ldots \cap w(F_m) \subseteq w(G)$. Denn ist $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$ und hat $w(F_1) \cap w(F_2) \cap \ldots \cap w(F_m)$ für eine Belegung den Wert 1, dann hat für diese Belegung auch $w(G)$ den Wert 1. Daher gilt $w(F_1) \cap w(F_2) \cap \ldots \cap w(F_m) \subseteq w(G)$. Ist dies umgekehrt der Fall und haben für eine Belegung alle $w(F_i)$ den Wert 1, dann hat auch $w(G)$ den Wert 1, also gilt $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$.

Satz: $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$ gilt genau dann, wenn $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \models G$, und genau dann, wenn $\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G)$.
(Die zweite Aussage zeigt, daß sich der Begriff der gültigen Konsequenz auf den Begriff der Identität zurückführen läßt.)

Beweis: Sei $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$. Angenommen, es hat $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m$ den Wert 1, dann haben alle F_i den Wert 1, also auch G. Die Umkehrung ist genauso zu zeigen. Um die zweite Behauptung zu beweisen, genügt es nun zu zeigen, daß $F \models G$ genau dann, wenn $\models (F \to G)$. Sei also $F \models G$, dann ist für alle Belegungen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, für die F den Wert 1 hat, der Wert von G gleich 1, es hat also $F \to G$ für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wert 1, also gilt $\models (F \to G)$. Ist dies umgekehrt erfüllt, dann hat $F \to G$ für alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wert 1; wenn also F für $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wert 1 hat, dann hat auch G für $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Wert 1, also gilt $F \models G$.

Für praktische Anwendungen wichtig ist folgender

Satz: 1. $F_1, F_2, \ldots, F_m \models F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$
2. *Wenn* $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G_j, j = 1, 2, \ldots, p$ *und* $G_1, G_2, \ldots, G_p \models H$, *dann gilt* $F_1, F_2, \ldots, F_m \models H$.

Der Beweis ist klar.

Definition: Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_m$ Aussageformen. Unter einer *Schlußkette* aus der Prämissenmenge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ verstehen wir eine endliche Folge von Aussageformen $E_1, E_2, \ldots, E_r = D$, in der jedes E_i Prämisse oder gültige Konsequenz einer Menge von vorhergehenden E_j ist.

Behauptung: *Das letzte Glied D der Schlußkette ist eine gültige Konsequenz von* $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$.

Beweis: Wir zeigen durch Induktion nach i, daß E_i für $i = 1, 2, \ldots, r$ gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ist. Für $i = 1$ ist E_i Prämisse oder gültige Konsequenz der leeren Menge, also Identität und damit eine gültige Konsequenz der F_j. Es sei schon bewiesen, daß E_{i-1} gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ist. Es ist E_i Prämisse oder gültige Konsequenz einer Menge von vorhergehenden E_j, also nach dem vorhergehenden Satz gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$.

Will man nun überprüfen, ob eine Aussageform G gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ist, so kann man entweder die Wahrheitsfunktionen von G und $F_1, F_2, \ldots, F_m$ aufstellen und miteinander vergleichen (führt unbedingt in endlich vielen Schritten zum Ziel, ist aber eventuell recht mühsam), oder man kann versuchen, eine Schlußkette aus $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ zu finden, die mit G endet (dazu ist aber eine gewisse Geschicklichkeit erforderlich). Beim zweiten Verfahren ist von Nutzen die Kenntnis der Richtigkeit der folgenden gültigen Konsequenzen (der Leser möge nachprüfen, daß das wirklich gültige Konsequenzen sind):

$P, Q \models (P \wedge Q)$
$(P \wedge Q) \models P$
$P' \models (P \to Q)$
$P \vee Q, P' \models Q$
$Q \models (P \to Q)$
$P \to Q, Q \to R \models (P \to R)$ *(Gesetz des Syllogismus)*

Besonders wichtig ist jedoch das Bestehen der beiden folgenden gültigen Konsequenzen:

a) $P, P \to Q \models Q$ *(Abtrennungsregel* oder *modus ponens)*

Der Beweis ist klar.

b) *Ersetzt man in* $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$ *die Aussagenvariable* A_i *an jeder Stelle, wo sie vorkommt, durch eine Aussageform H, so ist* $G(H)$ *gültige Konsequenz von* $F_1(H), F_2(H), \ldots, F_m(H)$. *(Ersetzungsregel)*

Beweis: Es gilt $\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \to G)$, daher $\models ((F_1(H) \wedge F_2(H) \wedge \ldots \wedge F_m(H)) \to G(H))$, daher $F_1(H), F_2(H), \ldots, F_m(H) \models G(H)$.

Bemerkung: Die schon früher bewiesene Abtrennungs- und Ersetzungsregel für Identitäten sind ersichtlich Spezialfälle der obigen Regeln.

Definition: Eine Menge $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ von Aussageformen heißt *konsistent*, wenn es eine Belegung ihrer Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten gibt, so daß alle G_i den Wert 1 annehmen; andernfalls heißt sie *inkonsistent*.

Es gilt: $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ *ist inkonsistent genau dann, wenn* $G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_m$ *eine Kontradiktion ist.*

Der Beweis ist klar.

Satz: Die Menge $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ *ist genau dann inkonsistent, wenn sie eine Kontradiktion als gültige Konsequenz hat.*

Beweis: Ist $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ inkonsistent, dann hat es jede Aussageform als gültige Konsequenz. Ist umgekehrt eine Kontradiktion gültige Konsequenz von $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$, dann können $G_1, G_2, \ldots, G_m$ niemals gleichzeitig den Wert 1 annehmen, also ist $\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ inkonsistent.

Satz: Es gilt $F_1, F_2, \ldots, F_m \models B$ *sicher dann, wenn es eine Schlußkette aus der Prämissenmenge* $\{F_1, F_2, \ldots, F_m, B'\}$ *gibt, die mit einer Kontradiktion endet.*

Beweis: Ist dies der Fall, dann ist die Kontradiktion gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m, B'\}$, also ist $\{F_1, F_2, \ldots, F_m, B'\}$ inkonsistent. Haben daher $F_1, F_2, \ldots, F_m$ den Wert 1, dann hat B' den Wert 0, also B den Wert 1. Daher gilt $F_1, F_2, \ldots, F_m \models B$.

Dieser Satz ist die logische Grundlage der indirekten Beweise.

Wir haben vorher definiert, was man unter einer Schlußkette aus einer gegebenen Prämissenmenge versteht. Bei einer derartigen Schlußkette wird, um ein neues Kettenglied zu erhalten, entweder eine Prämisse angeschrieben, oder eine gültige Konsequenz aus vorhergehenden Gliedern der Kette. Es gibt nun aber viele Möglichkeiten, gültige Konsequenzen zu gewinnen, und diese Möglichkeiten kann man nur schwer überblicken. Wenn man also das Aufstellen einer Schlußkette mechanisieren, oder wie man besser sagt, formalisieren will, sodaß es etwa auch von einer Maschine durchgeführt werden kann, so muß man die Regeln, nach denen gültige Konsequenzen gewonnen werden dürfen, ein für allemal fest vorgeben, und zwar darf man natürlich nur endlich viele derartige Regeln vorgeben. Dadurch erhält man dann einen *„formalisierten Aussagenkalkül“* (denn es werden ja nun Schlüsse nur nach fest vorgegebenen Regeln gezogen). Da jede Identität gültige Konsequenz jeder beliebigen Menge von Aussageformen ist, müssen wir auch noch festsetzen, welche Identitäten in einer Schlußkette verwendet werden dürfen; die Anzahl dieser Identitäten muß ebenfalls endlich sein. Wir wollen also nun so einen formalisierten Aussagenkalkül festlegen:

Wir geben die folgenden vier Identitäten vor, die wir als Axiome bezeichnen (der Leser möge nachprüfen, daß es Identitäten sind):

$$(A \vee A) \to A$$
$$A \to (A \vee B)$$
$$(A \vee B) \to (B \vee A)$$
$$(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$$

Als einzige zulässige Schlußregel wird die Abtrennungsregel zugelassen.

Nun definieren wir: Es seien $F_1, F_2, \ldots, F_m$ Aussageformen. Unter einer *zulässigen Schlußkette* (unseres formalisierten Aussagenkalküls) aus der Prämissenmenge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ verstehen wir eine endliche Folge von Aussageformen $E_1, E_2, \ldots, E_r = D$, in der jedes E_i durch eine der folgenden Regeln erhalten wird:

(p) E_i ist eine Prämisse.

(e) E_i geht aus einem Axiom durch (einmalige oder mehrmalige) Anwendung der Ersetzungsregel für Identitäten hervor.

(d) E_i geht aus einem E_j mit $j < i$ hervor, indem man einen darin vorkommenden Ausdruck $(P' \vee Q')'$ durch den Ausdruck $P \wedge Q$ ersetzt oder umgekehrt.*)

(t) E_i wird aus den E_j mit $j < i$ durch Anwendung der Abtrennungsregel erhalten.

Eine Aussageform D heißt nun *„ableitbar“* aus der Prämissenmenge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$, wenn es eine zulässige Schlußkette aus $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ gibt, die bei D endet. Insbesondere heißt eine aus der leeren Menge ableitbare Aussageform ableitbar.

Klar ist: Jede aus $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ableitbare Aussageform ist gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ (denn eine zulässige Schlußkette ist sicher eine Schlußkette im Sinne unserer früheren Definition). Insbesondere ist jede ableitbare Aussageform eine Identität.

Es fragt sich nun aber: Liefert unser formalisierter Aussagenkalkül alle gültigen Konsequenzen von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$, ist also jede gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ aus $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ableitbar? Diese Frage wird bejaht durch den fundamentalen

Satz von Post: Für beliebiges $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ist jede gültige Konsequenz von $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ in unserem formalisierten Aussagenkalkül aus $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ableitbar.

Insbesondere ist also jede Identität in unserem formalisierten Aussagenkalkül ableitbar.

Der Beweis des Satzes von Post ist ziemlich kompliziert und kann hier nicht durchgeführt werden.

Man drückt den im Satz von Post angegebenen Sachverhalt kurz dadurch aus, daß man sagt: Unser formalisierter Aussagenkalkül ist *vollständig* („vollständig“ deshalb, weil man mit dem zugelassenen Apparat für das Schließen wirklich alles aus den Prämissen erhalten kann, was eine gültige Konsequenz der Prämissen ist).

Beispiel: Wir wollen mit Hilfe einer zulässigen Schlußkette unseres formalisierten Aussagenkalküls das Gesetz des Syllogismus beweisen, also zeigen, daß aus der Menge $\{P \to Q, Q \to R\}$ die Aussageform $P \to R$ ableitbar ist.

*) Diese Regel ermöglicht es, in die Schlußkette auch Aussageformen aufzunehmen, welche die Verknüpfung $\wedge$ enthalten.

Dazu gehen wir aus von dem Axiom $(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$. Mittels (e) erhalten wir daraus $(Q \to R) \to ((P' \vee Q) \to (P' \vee R))$, wegen $A' \vee B = A \to B$ also $(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$. Durch Anwendung von (t) ergibt sich nun $(P \to Q) \to (P \to R)$ und nochmalige Anwendung von (t) ergibt $P \to R$.
Unsere zulässige Schlußkette aus den Prämissen $P \to Q, Q \to R$ sieht also so aus:

$$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R)),\ Q \to R,\ (P \to Q) \to (P \to R),\ P \to Q,\ P \to R.$$

Als zweites Beispiel wollen wir beweisen, daß $Q \to (P \to Q)$ ableitbar ist. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Aus $A \to (A \vee B)$ erhalten wir mittels (e) zunächst $Q \to (Q \vee P')$ und aus $(A \vee B) \to (B \vee A)$ mittels (e) die Aussageform $(Q \vee P') \to (P' \vee Q)$. Schließlich wenden wir (e) auch noch an auf das Axiom $(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$, und zwar ersetzen wir A durch $Q \vee P'$, B durch $P' \vee Q$ und C durch Q'; dabei bedenken wir, daß $A' \vee B = A \to B$. Zweimalige Anwendung der Abtrennungsregel liefert dann die gewünschte Aussageform $Q \to (P \to Q)$.
Unsere zulässige Schlußkette sieht also folgendermaßen aus:

$$Q \to (Q \vee P'),\ (Q \vee P') \to (P' \vee Q),$$
$$((Q \vee P') \to (P' \vee Q)) \to [(Q \to (Q \vee P')) \to (Q \to (P' \vee Q))],$$
$$(Q \to (Q \vee P')) \to (Q \to (P' \vee Q)),$$
$$Q \to (P \to Q)$$

Übungsaufgaben zu § 8

1. Man beweise:
   (1) $((P \to Q) \wedge (R \to Q'))' \to P,\ R' \to P \models P' \to R$
   (2) $P \to (R \to Q),\ S' \vee P,\ R \models S \to Q$
   (3) $P \to (Q \wedge R),\ Q' \vee S,\ (T \to U') \to S',\ Q \to (P \wedge T') \models Q \to T$
2. Man untersuche die folgenden Mengen von Aussageformen auf ihre Konsistenz:
   (1) $\{R \to Q',\ P \to Q,\ R' \to S\}$
   (2) $\{(P \leftrightarrow Q') \to R,\ P \vee (R \to P'),\ Q \wedge (S' \vee R)\}$
   (3) $\{P \to (Q \wedge R)',\ (S \vee T) \to U,\ U \to V \vee W',\ R' \wedge T \wedge U' \wedge V\}$
3. Man beweise mit Hilfe von Schlußketten unter möglichst weitgehender Verwendung der bisher (in § 8 und in den Übungen) angegebenen gültigen Konsequenzen:

   (1) $(P \to Q) \to R,\ P \models Q \to R$
   (2) $R \to Q',\ P \to Q,\ R' \to S \models P \to S$
   (3) $P \to (Q \to R),\ (R \wedge S) \to T,\ U' \to (S \wedge T') \models P \to (Q \to U)$
4. Gilt:
   (1) $R,\ P \leftrightarrow Q',\ Q \to R \models P$?
   (2) $(P \to R) \to [(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R)] \models P \to P$?
5. Wir schreiben $\vdash_{\mathcal{F}} A$ für „die Aussageform A ist im formalisierten Aussagenkalkül ableitbar". — Man zeige, daß
   (1) $\vdash_{\mathcal{F}} P \to (Q \vee P)$
   (2) $\vdash_{\mathcal{F}} ((P \to Q) \to R) \to ((P \to Q) \to (Q \to R))$
6. $F_1, F_2, \ldots, F_m \vdash_{\mathcal{F}} E$ bedeute: „Die Aussageform E ist im formalisierten Aussagenkalkül aus der Prämissenmenge $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ ableitbar." Man beweise:
   (1) $P \vee Q \vdash_{\mathcal{F}} Q \vee P$
   (2) $Q \vdash_{\mathcal{F}} P \to Q$
   (3) $P \to Q \vdash_{\mathcal{F}} (R \vee P) \to (R \vee Q)$
   (4) $P \to Q \vdash_{\mathcal{F}} (P \vee R) \to (Q \vee R)$
7. Man beweise:
   (1) $\vdash_{\mathcal{F}} P \to P$
   (2) $\vdash_{\mathcal{F}} P \to (P')'$
   (3) $\vdash_{\mathcal{F}} (P')' \to P$
8. Man beweise:
   $P \to Q \vdash_{\mathcal{F}} Q' \to P'$
9. Man beweise:
   $A \to P,\ B \to P \vdash_{\mathcal{F}} (A \vee B) \to P.$

§ 9 Grundbegriffe der Schaltalgebra

Wir wollen nun die Überlegungen des § 7 über die Aussagenlogik nochmals durchführen, bloß wollen wir sie nun anders deuten. Wir betrachten an Stelle von Aussagen nämlich nun *Kontakte* (auch *Schalter* genannt). So ein Kontakt kann entweder offen sein — dann fließt kein Strom durch — oder geschlossen — dann kann Strom durchfließen —, und zwar je nach der Art des Schalters in nur einer Richtung *(„unilateraler Schalter“)* oder in beiden Richtungen *(„bilateraler Schalter“)*. — Der Einfachheit halber wollen wir zunächst alle Schalter als bilateral voraussetzen.

Wir geben einem offenen Kontakt den Wert 0 und einem geschlossenen Kontakt den Wert 1. Es hat also jeder Kontakt zu einem festen Zeitpunkt einen bestimmten *Schaltwert.*

Man kann nun Kontakte zu einer *„Schaltung“* zusammensetzen. Die Grundverbindungen sind dabei das *„Parallelschalten“*, welches zwei Kontakte, A, B, so wie in Abbildung 9.1 dargestellt, verbindet (symbolisch schreiben wir für diese Schaltung $A \vee B$), und das *„Serien-*

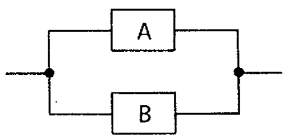

Abb. 9.1

schalten“, welches A, B so wie in Abbildung 9.2 verbindet (symbolisch schreiben wir für diese Schaltung $A \wedge B$).

Abb. 9.2

In einer Schaltung können mehrere Kontakte vorkommen, welche stets gleichzeitig geöffnet und geschlossen sind (etwa dadurch, daß sie von demselben Relais gesteuert werden): Solche Kontakte werden stets mit demselben Buchstaben bezeichnet. Es kann auch sein, daß zu einem Kontakt A ein anderer Kontakt vorhanden ist, der stets den entgegengesetzten Schaltwert wie A hat (ebenfalls z. B. durch Relaissteuerung zu erreichen): So einen Kontakt bezeichnen wir mit A'.

Wendet man nun diese Grundverbindungen $\vee$, $\wedge$, $'$ wiederholt an, so kann man aus gegebenen Kontakten Netzwerke aufbauen; derartige Netzwerke heißen *„Serienparallelschaltungen“*. So eine Serienparallelschaltung heißt eine *n-Pol-Schaltung,* wenn sie nach außen hin insgesamt n Anschlüsse besitzt. — In Abbildung 9.3 ist eine Dreipol-Serienparallelschaltung dargestellt.

(Die Anschlüsse nach außen hin — die sogenannten *Pole* der Schal-

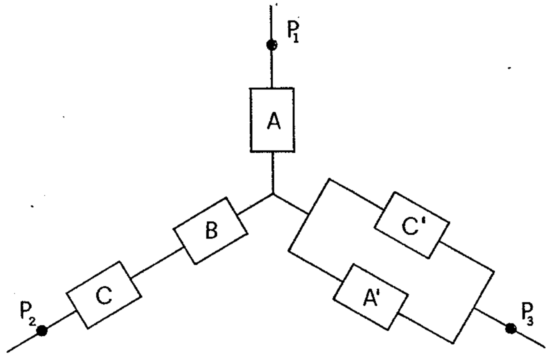

Abb. 9.3

tung — wollen wir so wie in Abb. 9.3 in allen Schaltskizzen durch kleine fettgedruckte Kreise kennzeichnen.)

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem einfachsten Fall einer Serienparallelschaltung, der *Zweipolschaltung.*

Ein wichtiges Problem ist es, den Schaltwert einer Zweipolschaltung aus den Schaltwerten ihrer Bestandteile zu berechnen. Das kann man durchführen mit Hilfe der *„Schaltwertstafeln“* für $\vee$, $\wedge$, $'$. Diese sehen folgendermaßen aus:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	A'
1	0
0	1

Ist nun $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ eine Zweipol-Serienparallelschaltung aus den Kontakten $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dann wird durch diese Schaltung jeder Belegung $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der Kontakte mit Schaltwerten eindeutig ein Schaltwert $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zugeordnet; es entspricht also jeder Zweipol-Serienparallelschaltung eindeutig eine Boolesche Funktion auf der Booleschen Algebra W, genannt die zu der Schaltung gehörige *Schaltfunktion.*

Je zwei gegebene Serienparallelschaltungen kann man mittels $\vee$ bzw. $\wedge$ verknüpfen zu einer neuen Serienparallelschaltung, und aus jeder Serienparallelschaltung erhält man durch Anwendung von ′ eine neue Serienparallelschaltung (die Anwendung von ′ auf die Schaltung kann z. B. darin bestehen, daß man mit der Schaltung ein Relais steuert).

Genau wie in der Aussagenlogik beweist man nun den

Satz: Ordnet man jeder Zweipol-Serienparallelschaltung in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *die zugehörige Schaltfunktion zu, so erhält man einen Epimorphismus der Algebra der Zweipol-Serienparallelschaltungen in* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *auf die von den Booleschen Funktionen auf W in n Variablen mit den Operationen* $\cup$, $\cap$, ′ *gebildete Algebra.*

Dieser Satz ist der Grund für den engen Zusammenhang zwischen Boolescher Algebra und Schaltalgebra.

Definition: Man nennt zwei Zweipol-Serienparallelschaltungen *äquivalent,* wenn sie dieselbe Schaltfunktion haben.

Bisher haben wir eigentlich nur die bei der Entwicklung der Aussagenlogik durchgeführten Überlegungen mit anderen Bezeichnungen wiederholt. Nun müssen wir aber von diesen Überlegungen abweichen, denn die Schaltalgebra verfolgt letzten Endes doch andere Ziele als die Aussagenlogik, nämlich die Ermöglichung der mathematischen Behandlung von Schaltungen, während sich die Aussagenlogik mit der mathematischen Untersuchung logischer Aussagen beschäftigt.
Die beiden Grundprobleme in der Theorie der Zweipol-Serienparallelschaltungen sind die Analyse und die Synthese von Schaltungen.

1. *Analyse einer gegebenen Schaltung:* Eine Zweipol-Serienparallelschaltung ist gegeben, etwa durch ihre Schaltskizze. Man berechne die zugehörige Schaltfunktion.
Dieses Problem wird folgendermaßen gelöst:

a) Man stellt die Schaltung mit Hilfe der Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$, ′ in symbolischer Schreibweise dar, schreibt also die zur Schaltung gehörige „*Schaltungsform*“ $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ auf.

b) Man sucht die Wertetabelle der zu dieser Schaltungsform gehörigen Schaltfunktion, entweder, indem man den Schaltwert von $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ für jede Belegung der A_i mit Schaltwerten mit Hilfe der Schaltwertstafeln ausrechnet, oder, indem man die Schaltfunktion durch die in § 6 besprochenen Umformungen auf disjunktive oder konjunktive Normalform bringt, aus der man dann die Wertetabelle sofort ablesen kann.

Betrachten wir etwa die in Abbildung 9.4 wiedergegebene Schaltung:

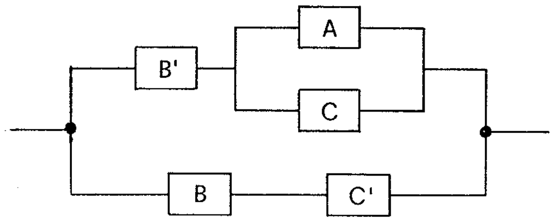

Abb. 9.4

Ihre Schaltungsform ist $F(A,B,C) = (B' \wedge (A \vee C)) \vee (B \wedge C')$. Also ist die zugehörige Schaltfunktion die Funktion

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_2' \cap (x_1 \cup x_3)) \cup (x_2 \cap x_3') = \\ &= (x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_2' \cup x_3') = \\ &= (x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2' \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2' \cup x_3'), \end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck ist die konjunktive Normalform von f; aus ihr lesen wir sofort die folgende Wertetabelle von f ab:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	0
alle übrigen Belegungen			1

2. *Synthese einer gesuchten Schaltung:* Eine Schaltfunktion ist durch ihre Wertetabelle gegeben. Man suche eine Zweipol-Serienparallelschaltung, die diese Schaltfunktion als zugehörige Schaltfunktion hat.
Dieses Problem wird am besten behandelt, indem man die Schaltfunktion durch eine Boolesche Polynomfunktion p in (disjunktiver oder konjunktiver) Normalform ausdrückt (beide Normalformen können sofort hingeschrieben werden).

Damit ist das Problem nun zwar theoretisch gelöst, für die Praxis aber bleibt dabei noch ein Gesichtspunkt unberücksichtigt, der von großer Wichtigkeit ist, nämlich: Ist die Darstellung einer Booleschen Polynomfunktion durch einen Ausdruck in den Projektionen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gegeben, dann ist die Anzahl der Kontakte, die man bei der technischen Realisierung der dieser Darstellung entsprechenden Schaltung braucht, gleich der Anzahl der vorkommenden Symbole x_i in dieser Darstellung der Schaltfunktion; diese Anzahl ist in der Normalform aber oft sehr groß. Man hat daher als weiteren Schritt bei der Schaltungssynthese noch die Aufgabe zu lösen, für die obige Polynomfunktion p eine Minimalform zu suchen.

Dieses *Minimalisierungsproblem* ist alles andere als leicht. Es gibt dafür wohl systematische Verfahren, diese sind aber im allgemeinen kompliziert und können daher hier nicht behandelt werden. Oft hilft es, „nach dem Gefühl" vorzugehen: Aus der Normalform erkennt man nicht selten, wie man sie vereinfachen kann. Gelegentlich kann man auch folgenden Kunstgriff anwenden: Man geht von einer Darstellung einer Booleschen Polynomfunktion zu deren Komplement über und sieht nach, ob man dieses noch vereinfachen kann. Ist das der Fall, führt man die Vereinfachung durch und kehrt durch erneute Komplementbildung wieder zu der ursprünglichen Polynomfunktion zurück. Das folgende Beispiel möge dieses Verfahren illustrieren.

Sei die im Verlauf der Rechnung erhaltene Darstellung einer Booleschen Polynomfunktion gegeben durch

$$f = (x_3 \cap x_2) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_3 \cap x_4') \cup (x_1' \cup x_3)' \cup \\ \cup (x_1 \cup x_2' \cup x_3)' \cup (x_2 \cup x_3 \cup x_4)'.$$

Fassen wir die drei ersten Glieder in dieser Darstellung zu einer Polynomfunktion g und die drei letzten zu einer Polynomfunktion h zusammen, dann gilt:

$$\begin{aligned} g' &= (x_3' \cup x_2') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3' \cup x_4') \cap (x_3' \cup x_4) = \\ &= x_3' \cup (x_2' \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_4') \cap x_4) = x_3' \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_4) \\ h' &= (x_1' \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap (x_2 \cup x_3 \cup x_4) = \\ &= x_3 \cup (x_1' \cap (x_1 \cup x_2') \cap (x_2 \cup x_4)) = x_3 \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_4) \end{aligned}$$

Daher ist $g' \cap h' = (x_3' \cap x_3) \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_4) = x_1' \cap x_2' \cap x_4$ und somit $f = (g' \cap h')' = x_1 \cup x_2 \cup x_4'$.

Oft ist bei der Synthese von Schaltungen die Wertetabelle der vorliegenden Schaltung nicht vollständig gegeben, sondern es sind die Werte der Schaltfunktion für gewisse Belegungen der Schaltvariablen

gleichgültig und können daher willkürlich gewählt werden. In diesem Fall bemüht man sich, für diese willkürlichen Werte 0 oder 1 so einzusetzen, daß die sich dadurch ergebende Boolesche Funktion möglichst einfach wird. Besonders vorteilhaft ist es, diese Werte, wenn möglich, so zu wählen, daß die Funktion von einzelnen Variablen überhaupt nicht mehr abhängt; diese Variablen brauchen in der Rechnung dann nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Sei etwa eine Schaltfunktion p gegeben durch die linksstehende unvollständige Wertetabelle:

x_1	x_2	x_3	p
1	1	1	1
1	1	0	beliebig
1	0	1	1
1	0	0	beliebig
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	beliebig

x_1	x_2	p
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Wie man sofort erkennt, wird p von der Variablen x_3 unabhängig, wenn wir für die beliebigen Werte von p in der zweiten und vierten Zeile eine 1 und in der letzten Zeile eine 0 (und nicht etwa auch eine 1) setzen. Wir brauchen daher bloß noch die Funktion in x_1, x_2 mit der rechtsstehenden Wertetabelle zu betrachten und durch einen Ausdruck in x_1, x_2 darzustellen, etwa durch $p = x_1 \cup x_2$. Dieser Ausdruck — aufgefaßt als Darstellung einer Polynomfunktion aus $P_3(W)$ — liefert dann die gesuchte Schaltung.

Das Problem der Analyse von *n-Pol-Serienparallelschaltungen* läßt sich zurückführen auf die Analyse von Zweipolschaltungen: Sind nämlich $P_1, P_2, \dots, P_n$ die n Pole der Schaltung, so kann man die Schaltung auffassen als Kombination von $\binom{n}{2}$ Zweipolschaltungen, nämlich jenen $\binom{n}{2}$ Zweipolschaltungen, die die $\binom{n}{2}$ möglichen Polpaare P_i, P_j verbinden. Eine n-Pol-Serienparallelschaltung kann daher beschrieben werden durch Angabe von $\binom{n}{2}$ Schaltfunktionen. — Damit ist das Problem der Analyse von n-Pol-Serienparallelschaltungen zwar theoretisch gelöst, in der Praxis ergeben sich dabei aber — insbesondere bei Schaltungen mit vielen Kontakten — noch große Schwierigkeiten. Wir werden in § 11 mathematische Verfahren kennenlernen, die eine wesentlich elegantere und übersichtlichere Behandlung von n-Pol-Serienparallelschaltungen ermöglichen.

Auch das Problem der Analyse von aus Kontakten bestehenden elektrischen Netzwerken mit zwei Polen, welche keine Serienparallelschaltungen sind (sog. „*Nicht-Serienparallelschaltungen*"), läßt sich theoretisch auf die Analyse von Zweipol-Serienparallelschaltungen zurückführen. Denn man erhält die Schaltfunktion einer Zweipol-Nicht-Serienparallelschaltung, wenn man in der Schaltskizze alle „Wege" (Zweipolserienschaltungen) heraussucht, in denen Strom von einem Pol zum anderen Pol fließen kann, und dann die diesen Wegen entsprechenden Schaltfunktionen vereinigt. —

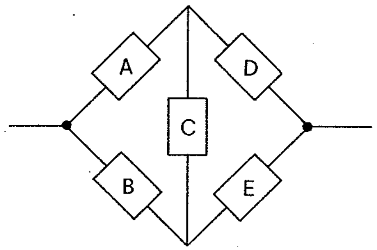

Abb. 9.5

In der in Abbildung 9.5 dargestellten „*Brückenschaltung*" etwa sind $x_1 \cap x_4$, $x_2 \cap x_5$, $x_1 \cap x_3 \cap x_5$ und $x_2 \cap x_3 \cap x_4$ die den möglichen Wegen von einem Pol zum anderen entsprechenden Schaltfunktionen; daher ist

$$p = (x_1 \cap x_4) \cup (x_2 \cap x_5) \cup (x_1 \cap x_3 \cap x_5) \cup (x_2 \cap x_3 \cap x_4) = \\ = [x_1 \cap (x_4 \cup (x_3 \cap x_5))] \cup [x_2 \cap (x_5 \cup (x_3 \cap x_4))]$$

die Schaltfunktion der Brückenschaltung.

Die in der Praxis bei der Analyse von Zweipol-Nicht-Serienparallelschaltungen auftretenden Probleme werden wir unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zusammen mit den bei der Analyse von n-Pol-Serienparallelschaltungen auftretenden Problemen behandeln.

Die bei der Synthese von n-Pol-Serienparallelschaltungen bzw. Nicht-Serienparallelschaltungen auftretenden Probleme sind fast ausschließlich physikalisch-technischer Natur und einer mathematischen Beschreibung schwer zugänglich; wir werden sie daher im folgenden nicht weiter besprechen. — Um welche Art von Schwierigkeiten es sich dabei unter anderem handelt, zeigt schon das sehr einfache Beispiel der oben betrachteten Brückenschaltung.

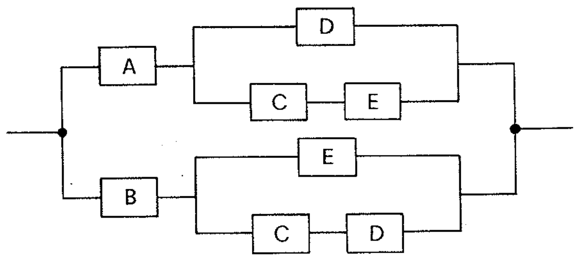

Abb. 9.6

In Abbildung 9.6 ist eine (möglichst einfache) Serienparallelschaltung wiedergegeben, welche dieselbe Schaltfunktion wie die Brückenschaltung hat. Obgleich man an Hand der beiden Schaltskizzen (Abb. 9.5 und Abb. 9.6) geneigt ist anzunehmen, daß die Brückenschaltung von einfacherer Bauart ist als die zu ihr äquivalente Serienparallelschaltung, so sind doch von Fall zu Fall verschieden zu beurteilende rein physikalisch-technische Gesichtspunkte ausschlaggebend, welcher Schaltung jeweils der Vorzug zu geben ist.

Übungsaufgaben zu § 9

1. Man analysiere die folgende Schaltung.

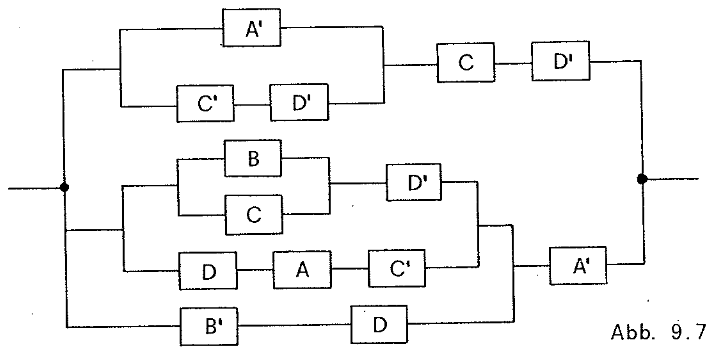

Abb. 9.7

2. Ebenso die Schaltung

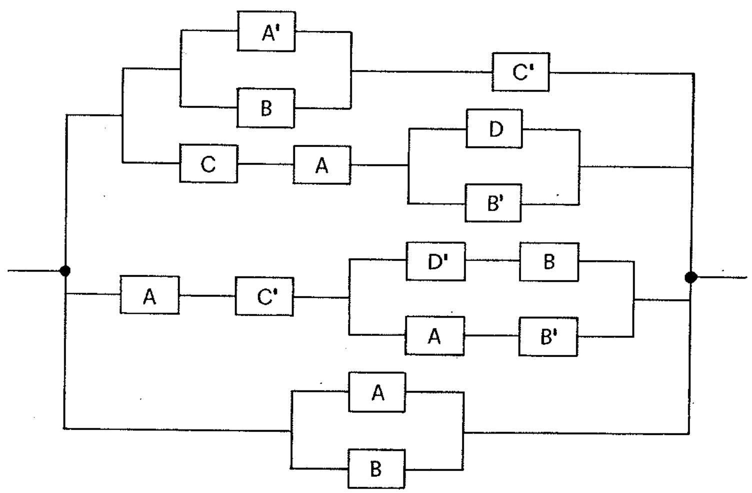

Abb. 9.8

3. Man suche Schaltungen, welche die durch die folgende Tabelle gegebenen Booleschen Polynomfunktionen $f_1, \ldots, f_4$ als zugehörige Schaltfunktionen haben.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1

4. Man suche eine Schaltung mit möglichst wenig Kontakten, welche die in der folgenden Tabelle gegebene Polynomfunktion F als zugehörige Schaltfunktion hat.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
alle übrigen Belegungen					0

5. Man vereinfache die folgende Schaltung und zeichne eine Schaltskizze der vereinfachten Schaltung.

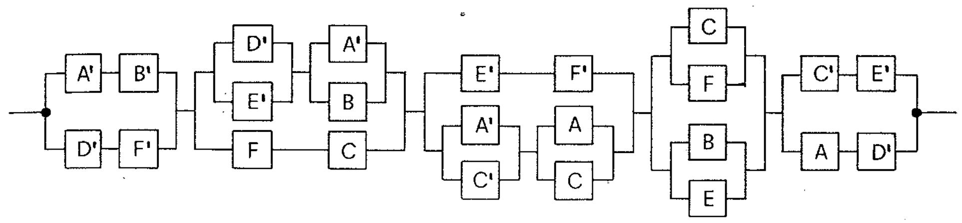

Abb. 9.9

6. Man suche Schaltungen mit möglichst wenig Kontakten, welche die in der folgenden unvollständigen Tabelle gegebenen Funktionen f_1 und f_2 als zugehörige Schaltfunktionen haben.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
1	1	1	beliebig	1
1	1	0	beliebig	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	beliebig
0	1	1	1	beliebig
0	1	0	1	0
0	0	1	beliebig	beliebig
0	0	0	1	1

7. Man analysiere die folgende 4-Pol-Schaltung mit den Polen P_1, P_2, P_3 und P_4.

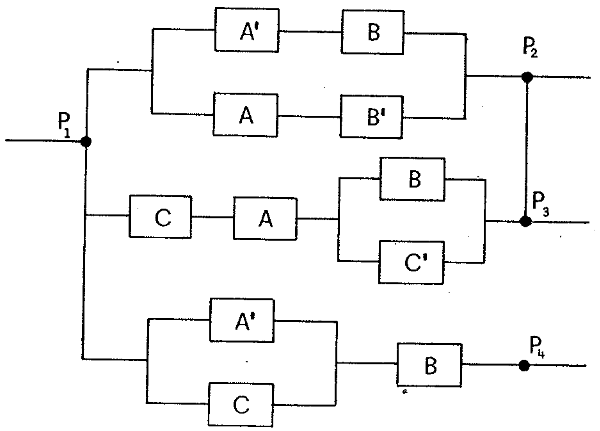

Abb. 9.10

8. Man suche eine Serienparallelschaltung mit möglichst wenig Kontakten, welche dieselbe Schaltfunktion hat wie die folgende Schaltung.

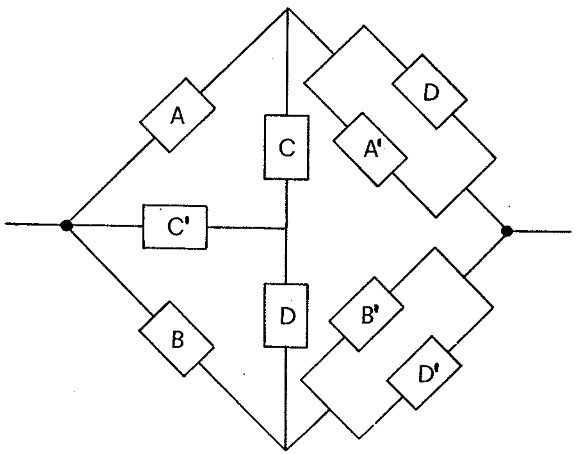

Abb. 9.11

§ 10 Boolesche Matrizen

Sei B eine beliebige, aber fest gewählte Boolesche Algebra mit den Operationen $\cup$, $\cap$, 0, 1 und $'$.

Wir betrachten die Menge $\mathscr{M}_n(B)$ aller $(n \times n)$-Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2n} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ m_{n1} & m_{n2} \dots m_{nn} \end{pmatrix}$$

deren Elemente aus B sind. m_{ij} bezeichne das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von M, (wobei $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$), (m_{ij}) stehe abkürzend für die Matrix M.

In $\mathscr{M}_n(B)$ definieren wir nun Operationen „Vereinigung", „Durchschnitt" und „Komplement" — in Zeichen: $\cup$, $\cap$, $'$ — durch die Festlegung: $(a_{ij}) \cup (b_{ij})$ sei die Matrix (c_{ij}) mit $c_{ij} = a_{ij} \cup b_{ij}$, $(a_{ij}) \cap (b_{ij})$ sei die Matrix (d_{ij}) mit $d_{ij} = a_{ij} \cap b_{ij}$ und $(a_{ij})'$ sei die Matrix (e_{ij}) mit $e_{ij} = a'_{ij}$. — Setzen wir noch

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 \dots 1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 1 & 1 \dots 1 \end{pmatrix}$$

dann wird — wie leicht einzusehen ist — $\mathscr{M}_n(B)$ mit den Operationen $\cup$, $\cap$, O, I und $'$ zu einer Booleschen Algebra.

Die Elemente von $\mathscr{M}_n(B)$ heißen „*Boolesche $(n \times n)$-Matrizen über B*".

In $\mathscr{M}_n(B)$ gilt für je zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$, wie sich unmittelbar aus der Definition von $\subseteqq$ ergibt:
$A \subseteqq B$ genau dann, falls $a_{ij} \subseteqq b_{ij}$ für alle $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$.