

Algebra (für LAK)

(Dorfer)

Musterprüfung

Name:

Matrikelnummer:

- (a) Man zeige, dass das direkte Produkt $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ der beiden Restklassengruppen $(\mathbb{Z}_2, +)$ und $(\mathbb{Z}_3, +)$ isomorph ist zur Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$. Gilt auch, dass $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorph zu \mathbb{Z}_4 ist? Man gebe die Operationstabellen der Gruppen $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ und $(\mathbb{Z}_4, +)$ an.

(b) Man formuliere den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.
- (a) Man betrachte die Menge $T_{105} := \{k \in \mathbb{N} : k \mid 105\}$ mit der Teilbarkeitsrelation $|$ als Ordnungsrelation. Man zeichne das Hasse-Diagramm der Halbordnung $(T_{105}, |)$ und zeige, dass es sich hierbei um eine Boolesche Algebra handelt (Verbandsoperationen, Komplement, größtes/kleinstes Element angeben). Weiters gebe man eine dazu isomorphe Potenzmengenalgebra $\mathfrak{P}(M)$ mit einer geeigneten Menge M an.

(b) Man beschreibe, wie die einem Verband (V, \wedge, \vee) assoziierte verbandsgeordnete Menge (V, \leq) aussieht, und konstruiere umgekehrt zu einer verbandsgeordneten Menge den zugehörigen Verband.
- Sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Man berechne mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' den ggT der beiden Polynome $x^2 + 1$ und $x^4 + x$ in $K[x]$.

Man begründe, warum der Polynomring $K[x]$ über einem beliebigen Körper K ein Euklidischer Ring ist. Weiters zeige man, dass $\mathbb{Z}[x]$ kein Hauptidealring ist (Hinweis: man betrachte zum Beispiel das Ideal, das von 2 und x erzeugt wird).
- Man betrachte die Zahlbereichserweiterungen

 - von den ganzen Zahlen \mathbb{Z} auf die rationalen Zahlen \mathbb{Q} ,
 - von den reellen Zahlen \mathbb{R} auf die komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Man erkläre jeweils genau, wie die Elemente der Erweiterung konstruiert werden, wie die Operationen in der Erweiterung definiert sind, welche algebraischen Strukturen vor bzw. nach der Erweiterung vorliegen und was man durch die Erweiterung an neuen Eigenschaften dazugewinnt.

Arbeitszeit: 100 Minuten