Übungsbeispiele

1. Sei $(A, \circ)$ eine Algebra vom Typ (2), sodass gilt:

   a) $\circ$ ist assoziativ,

   b) es gibt ein Linkseinselement e,

   c) zu jedem $x \in A$ gibt es ein $y \in A$ mit $y \circ x = e$.

   Man zeige, dass dann e sogar ein Einselement und jedes $x \in A$ invertierbar ist.

2. Sei M eine beliebige Menge, $\circ$ die Komposition von Funktionen, aufgefasst als zweistellige Operation auf M^M, und $f \in M^M$. Man zeige:

   a) $\circ$ ist assoziativ.

   b) id_M ist ein Einselement bezüglich $\circ$.

   c) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt ein Linksinverses.

   d) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt ein Rechtsinverses.

   e) f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist invertierbar.

3. Man bestimme alle Paare (a, b) von reellen Zahlen, für welche die durch

$$x \circ y = ax + by \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

   erklärte Operation auf $\mathbb{R}$ assoziativ ist.

4. Sei A die Menge aller zweizeiligen quadratischen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}.$$

   Man zeige, dass A bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Halbgruppe bildet, in der es unendlich viele Linkseinselemente, aber kein Rechtseinselement gibt.

5. Man gebe alle binären Operationen auf $A = \{a, b\}$ an und überprüfe sie hinsichtlich Kommutativität, Assoziativität, Invertierbarkeit und Existenz von (Rechts-, Links-) Einselementen.

6. Man gebe alle binären Operationen $\circ$ auf $A = \{a, b, c\}$ an, sodass $\circ$ kommutativ und a Einselement ist, und überprüfe sie hinsichtlich Assoziativität und Regularität.

7. Kann man die folgende Operationstafel so ergänzen, dass $\circ$ eine assoziative binäre Operation auf $A = \{a, b, c, d\}$ wird?

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

8. Man zeige, dass die symmetrische Differenz $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, aufgefasst als zweistellige Operation auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, assoziativ, kommutativ und invertierbar ist.

9. Sei A eine Menge mit zwei binären Operationen $+$ und $\circ$. Es sei dabei $\circ$ distributiv über $+$, und es existiere ein Einselement für $\circ$. Ferner sei $+$ assoziativ und regulär. Man zeige, dass daraus die Kommutativität von $+$ folgt.

10. Man stelle für die Menge D_3 aller Deckabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks, welche aus drei Drehungen um $0°$, $120°$ bzw. $240°$ und den drei Spiegelungen an den Symmetrieachsen des Dreiecks besteht, die Operationstafel für die Operation $\circ$ der Abbildungskomposition auf. Gibt es ein Einselement? Wenn ja, welche Elemente sind invertierbar?

11. Man zeige: Ist $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe, dann gilt für $a_1, \ldots, a_n \in H$, $n \geq 3$, und $r, s \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < s \leq n$:

$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots a_r (a_{r+1} \cdots a_s) a_{s+1} \cdots a_n.$$

12. Man zeige durch Aufstellen der Operationstafeln, dass alle Gruppen mit höchstens vier Elementen kommutativ sind.

13. Sei $(H, \circ)$ ein endliches Gruppoid. Man zeige: $\circ$ regulär $\Leftrightarrow$ $\circ$ invertierbar.

14. Man zeige, dass $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \circ)$ mit

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine abelsche Gruppe bildet.

15. Sei M eine Menge und $S_M := \{f \in M^M \mid f \text{ bijektiv}\}$. Man zeige, dass $(S_M, \circ)$ eine Gruppe bildet, und stelle für $M = \{1, 2, 3\}$ die Operationstafel von S_M auf.

16. Man definiere auf $\{e, a, b, c, d, f\}$ eine Gruppenoperation $\cdot$ so, dass e Einselement wird und die Beziehungen $a^2 = b^3 = e$ und $ab = b^2 a$ gelten. Welche bekannte Gruppe erhält man so (bis auf die Bezeichnungsweise der Elemente)?

17. Sei $A := \{r + s\sqrt{p} \mid r, s \in \mathbb{Q},\ r^2 + s^2 \neq 0\}$ für eine feste Primzahl p. Man zeige, dass A mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Gruppe bildet.

18. Sei $(H, \cdot, e)$ ein Monoid und $G := \{x \in H \mid x \text{ invertierbar}\}$. Man zeige, dass die Einschränkung von $\cdot$ auf $G \times G$ eine binäre Operation auf G und $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist.

19. Sei m eine feste natürliche Zahl und $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \ldots, m-1\}$. In $\mathbb{Z}_m$ sei eine Verknüpfung $\oplus$ definiert durch:

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & \text{falls } a + b < m, \\ a + b - m, & \text{falls } a + b \geq m. \end{cases}$$

Man zeige: $(\mathbb{Z}_m, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.