

89. Sei $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) \neq 0$ und p/q eine rationale Nullstelle von $f(x)$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $\text{ggT}(p, q) = 1$.

a) Man zeige: $p|a_0$ und $q|a_n$.

b) Man berechne sämtliche Nullstellen von $12x^4 - 31x^3 + 27x^2 - 9x + 1$.

90. (a) Man bestimme die Nullstellen von $x^n - 1$ in \mathbb{C} (n -te Einheitswurzeln).

(b) Man zeige, dass die n -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C} bezüglich der Multiplikation eine zyklische Gruppe der Ordnung n bilden.

91. Man bestimme alle Nullstellen des folgenden Polynoms in \mathbb{C} :

$$x^3 - 3x^2 + 12x - 4$$

92. Man bestimme alle Nullstellen des folgenden Polynoms in \mathbb{C} :

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 18$$

93. Ist R ein kommutativer Ring mit Einselement und $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$, dann sei $f'(x) := a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$ (Ableitung von f). Man zeige, dass für alle $f, g \in R[x]$, $a \in R$ gilt:

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f \cdot g)' = f'g + g'f, \quad (af)' = af'.$$

94. Man zeige: Ist $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$ und $f(z) = 0$, so ist auch $f(\bar{z}) = 0$.

95. Man zeige: Ist R ein Integritätsbereich, so auch $R[[x]]$.

96. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Man zeige: $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \in R[[x]]$ besitzt genau dann ein Inverses bezüglich \cdot in $R[[x]]$, wenn a_0 ein Inverses bezüglich \cdot in R besitzt.

97. Man zeige: a) Ist $a \in I$ eine k -fache Nullstelle ($k > 1$) von $p(x) \in I[x]$, so ist a eine mindestens $(k - 1)$ -fache Nullstelle von $p'(x)$ (I Integritätsbereich).

b) Sind $p(x)$ und $p'(x)$ teilerfremd, so hat $p(x)$ nur einfache Nullstellen. Gilt auch die Umkehrung?

c) Ist K Körper und $p(x) \in K[x]$ irreduzibel, dann gilt: $\text{ggT}(p(x), p'(x)) \neq 1 \Leftrightarrow p(x)|p'(x) \Leftrightarrow p'(x) = 0$.

98. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$, $f(5) = -40$. Man berechne zu den vier angegebenen Stellen ein Interpolationspolynom mit den Formeln

a) von Lagrange,

b) von Newton.

99. Sei $I = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Man zeige, dass I mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von \mathbb{C} einen Integritätsbereich bildet, in welchem das Element 3 zwar irreduzibel, aber nicht prim ist. Ist I ein ZPE-Ring?

100. Man bestimme in $\mathbb{Z}_2[x]$ alle irreduziblen Polynome bis zum Grad 3.