101. Sei $D \neq 1$ eine quadratfreie ganze Zahl.
a) Man bestimme für $D < 0$ die Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] := \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.
Hinweis: Betrachte die *Normfunktion* $N(a + b\sqrt{D}) := a^2 - b^2 D$.
b) Man zeige, dass für $D = 2$ unendlich viele Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] \subseteq \mathbb{R}$ existieren.

102. Man zeige, dass $I[x]$ kein Hauptidealring ist, falls I kein Körper ist. Hinweis: Betrachte das von a und x erzeugte Ideal, wo $a \neq 0$ eine Nichteinheit von I ist.

103. Man zeige, dass $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ und $\mathbb{C}$ als Ringe isomorph sind.

104. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Man zeige: Ist J ein Ideal von R, dann gilt: J maximal $\Leftrightarrow$ R/J ist ein Körper.

105. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $J \lhd R$. Man zeige:
a) J ist Primideal von $R \Leftrightarrow R/J$ ist ein Integritätsbereich.
b) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

106. Sei I ein Integritätsbereich und $a, b, c \in I$ mit $c \neq 0$. Man zeige: Existiert $\mathrm{ggT}(ac, bc)$, so auch $\mathrm{ggT}(a, b)$, und es ist $c \cdot \mathrm{ggT}(a, b) \sim \mathrm{ggT}(ac, bc)$.

107. Man zeige: Ist K ein Körper und die Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ zyklisch, so ist K endlich.

108. Man zeige, dass $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit den Standardoperationen von $\mathbb{C}$ ein euklidischer Ring ist, genannt der *Ring der ganzen Gauß'schen Zahlen*. Hinweis: Setze $H(z) := |z|^2$.

109. Man bestimme in $\mathbb{Z}[i]$ den ggT der Elemente $a = 3 - i$ und $b = 1 + 3i$ und stelle ihn in der Form $ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ dar.

110. Man bestimme in $\mathbb{Z}[i]$ die Primfaktorzerlegungen von $27 + 6i$ und $-3 + 4i$.

111. a) Man bestimme in $\mathbb{Z}$ den ggT von 6188 und 4709 und stelle ihn als ganzzahlige Linearkombination von 6188 und 4709 dar.
b) Analog für 525 und 231.

112. a) Man bestimme in $\mathbb{Q}[x]$ alle ggT von $4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ und $2x^3 - 5x + 4$ und stelle den normierten ggT als Linearkombination der beiden Polynome dar.
b) Analog für $2x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 2x - 2$ und $x^5 - 2x^3 - 1$.

113. Man beweise: In einem Hauptidealring I sind $a, b \in I$ genau dann teilerfremd, wenn es $x, y \in I$ gibt mit $ax + by = 1$.

114. Man beweise, dass der Faktorring $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ ein Körper ist, und demonstriere an Hand eines Beispiels die Berechnung des multiplikativen Inversen (mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus).

115 – 117. Quotientenhalbgruppe und Quotientenring. Mit der Bezeichnung aus Abschnitt 6.1 beweise man folgende Aussagen:

115. Durch
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$
ist eine Operation $\cdot$ auf S_1 definiert, und $(S_1, \cdot, \frac{1}{1})$ ist ein kommutatives Monoid.