

116. Durch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

ist eine Operation  $+$  auf  $S_1$  definiert, und  $(S_1, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

117.  $E(\mathfrak{T}) = R(\mathfrak{T}) = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in R(\mathfrak{M})\}$ , und für  $\frac{a}{b} \in R(\mathfrak{T})$  gilt  $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ .

Im folgenden sei  $K$  ein Körper.

118. Sei  $L$  ein Erweiterungskörper von  $K$  und  $E$  ein Erweiterungskörper von  $L$  mit  $[E : K] < \infty$ . Man zeige, dass  $[E : K] = [E : L] \cdot [L : K]$  gilt (Gradsatz, vgl. Vorlesung).

119. Man zeige: Ist  $\alpha$  transzendent über  $K$ , so ist  $K(\alpha) \cong K(x)$ .

120. Man zeige: Ist  $\text{char } K = 0$ , so hat jedes irreduzible  $f(x) \in K[x]$  in jedem Erweiterungskörper von  $K$  nur einfache Nullstellen.

121. Man bestimme  $\alpha \in \mathbb{C}$  so, dass  $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$ .

122. Man gebe das Minimalpolynom von

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,

b)  $\sqrt{3} + i$

über  $\mathbb{Q}$  an.

123. Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $\alpha^5 = 1$ , aber  $\alpha \neq 1$ . Man gebe das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}$  an.

124. Man bestimme den Grad von  $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15})$  über  $\mathbb{Q}$ .

125. Seien  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  die Nullstellen von  $x^3 - 2$ . Man bestimme den Grad von  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$  über  $\mathbb{Q}$ .

126. Man konstruiere die Operationstabellen eines endlichen Körpers mit 8 Elementen.

127. Man zeige: Ist  $K$  ein endlicher Körper der Charakteristik  $p$ , dann wird durch  $a \mapsto a^p$ ,  $a \in K$ , ein Automorphismus von  $K$  definiert.

128. Man bestimme die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad 2 über  $\text{GF}(q)$ .

129. Man zeige: Ist  $\varphi$  ein Automorphismus des Körpers  $K$  und  $P$  der Primkörper von  $K$ , so gilt  $\varphi(a) = a$  für alle  $a \in P$ .

130. Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$ . Man zeige:  $x^p + a \in K[x]$  ist entweder irreduzibel, oder  $p$ -te Potenz eines linearen Polynoms.